



Math. A. 245^{5v} = Undeutsch

Cassia, Leg. (am)
18. IV. 93.

<36609955590017

<36609955590017

Bayer. Staatsbibliothek

EINFÜHRUNG
IN DIE
MECHANIK

VON
HERMANN UNDEUTSCH,
PROFESSOR AN DER KÖNIGL. SÄCHS. BERGAKADEMIE ZU FREIBERG.

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN
SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM.

Mit 333 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

FREIBERG, 1881.
VERLAG VON CRAZ UND GERLACH
(ED. STETTNER).

Ankündigung.

Das vorliegende Buch bietet jedem Anfänger im Studium der Mechanik die erforderlichen Grundlehren, und zwar in solcher Weise, dass mit dem einfachsten Fall begonnen und der allgemeinste Fall durch eine allmähliche Steigerung erreicht wird.

Die Form der Behandlung des Stoffes ist eine leicht fassliche, zu deren Verständniss nur die einfachsten Grundlehren der Differential- und Integralrechnung erforderlich sind.

Viele in den Text eingedruckte Figuren dienen wesentlich zur Erleichterung des Studiums und zur graphischen Veranschaulichung sich ergebender Schlusswerthe.

Die den Grundlehren in kleinerem Druck beigefügten Anwendungen behandeln bekannte, aber allgemein interessante Fälle oder solche, deren Kenntniss zur eigentlichen Untersuchung von Körperbewegungen erforderlich ist.

Das Buch soll Studirenden zum Privatstudium oder so lange, als es sich um die erforderlichsten Principien der Mechanik handelt, zur Unterstützung bei Vorlesungen dienen.

EINFÜHRUNG
IN DIE
M E C H A N I K.

EINFÜHRUNG
IN DIE
M E C H A N I K

VON
HERMANN UNDEUTSCH,
PROFESSOR AN DER KÖNIGL. SÄCHS. BERGAKADEMIE ZU FREIBERG.

ZUM GEBRAUCH BEI VORLESUNGEN
SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM.

Mit 333 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

FREIBERG, 1881.
VERLAG VON CRAZ UND GERLACH
(ED. STETTNER).



Uebersetzungsrecht vorbehalten.

VORREDE.

Mit der Herausgabe des vorliegenden Buches erfüllt der Verfasser lediglich eine Bitte seiner Zuhörer. Derselben entsprechend, bietet das Buch weder ausführlich die Gebiete der „analytischen“, noch die der sogenannten „technischen Mechanik“, sondern nur in einfacher, aber allgemeiner Form diejenigen Unterlagen, auf welche sich die Vorträge oder private Studien auf dem Gebiete der Mechanik stützen; mit Rücksicht hierauf wurde der Titel „Einführung in die Mechanik“ gewählt.

Die Einleitung liefert ein allgemeines Bild dessen, womit es die Mechanik im Allgemeinen zu thun hat, sie bietet die erforderlichen Definitionen und vermittelt den Zusammenhang des in den vier folgenden Abschnitten behandelten Stoffes. Da in letzteren an den betreffenden Stellen die Definitionen wiederholt werden, so kann auch ohne vorheriges gründliches Verständniss der Einleitung mit dem Studium der Abschnitte begonnen werden, es empfiehlt sich jedoch, im Laufe der Studien auf die Einleitung zurück zu greifen.

Den ersten beiden Abschnitten sind in kleinerem Druck allgemein interessante und bekannte, der Technik nicht direct dienende Beispiele beigelegt worden, dem dritten

Abschnitt nur vorbereitende Anwendungen, während der vierte Abschnitt nur kurz die erweiterte Giltigkeit der Resultate des dritten Abschnittes kennzeichnet.

Die Ruhe und die gleichförmige Bewegung der Massen wurden als ein specieller Fall der „Bewegung der Massen im Allgemeinen“ hingestellt, und im Uebrigen alle Gebiete möglichst durch in den Text eingedruckte Holzschnitte veranschaulicht.

FREIBERG, im Mai 1881.

HERMANN UNDEUTSCH.

INHALTSVERZEICHNISS.

	Seite
Einleitung	1

Erster Abschnitt.

Bewegungslehre eines mathematischen Punktes, auch geometrische Bewegungslehre	17
I. Einfache Bewegung eines mathematischen Punktes	19
1) Gleichförmig geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes	20
2) Ungleichförmig geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes	23
a) Gleichförmig geänderte geradlinige Bewegung	23
b) Ungleichförmig geänderte geradlinige Bewegung	32
II. Zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes (geometrisches Parallelogrammgesetz)	38
1) Geradlinig gleichförmige resultirende Bewegung	39
2) Geradlinig gleichförmig geänderte resultirende Bewegung	49
3) Krummlinig gleichförmig geänderte und krummlinig ungleichförmig geänderte resultirende Bewegung	51

Zweiter Abschnitt.

Bewegungslehre eines materiellen Punktes	89
I. Allgemeines über Kraft und Masse und Principien der Mechanik	92

	Seite
1) Kraft	92
2) Masse	93
3) Grundgesetze der Mechanik	94
a) Gesetz der Beschleunigung	94
b) Gesetz der Unabhängigkeit der Bewegungen	97
c) Gesetz der Wechselwirkung	101
4) Specielles über das Gewicht der Körper	102
a) Absolutes Gewicht	102
b) Specifisches Gewicht	103
c) Relatives Gewicht	104
5) Leistung oder mechanische Arbeit einer Kraft und Ge- setz der mechanischen Arbeit	105
6) Princip der lebendigen Kräfte	116
7) Der Antrieb einer Kraft	130
8) Das statische Moment einer Kraft und das Gesetz der statischen Momente	133
9) Flächengeschwindigkeit und das Princip der Flächen	140
II. Freie Bewegung eines materiellen Punktes	146
1) Ungleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes in einer Curve	147
2) Ungleichförmig geänderte Kreisbewegung des materiel- len Punktes	148
3) Gleichförmig geänderte Kreisbewegung des materiellen Punktes	149
4) Gleichförmige Kreisbewegung des materiellen Punktes	149
5) Ungleichförmig geänderte geradlinige Bewegung des materiellen Punktes	149
6) Gleichförmig geänderte geradlinige Bewegung des ma- teriellen Punktes	150
7) Gleichförmig geradlinige Bewegung und Ruhezustand des materiellen Punktes	150
III. Unfreie oder gezwungene Bewegung eines mate- riellen Punktes	208
1) Bewegung eines materiellen Punktes auf einer horizon- talen ebenen Fläche	209
2) Bewegung eines materiellen Punktes auf einer geneig- ten ebenen Fläche, einer schiefen Ebene	212
3) Bewegung eines materiellen Punktes auf einer einfach gekrümmten Fläche	213

	Seite
4) Bewegung eines materiellen Punktes auf einer beliebig gekrümmten Körperoberfläche, resp. in einer streng vorgeschriebenen beliebig gekrümmten Linie	216
5) Die Arbeit der Effectivkraft	220
6) Gleichgewicht eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn	221
IV. Relative Bewegung eines materiellen Punktes	248
1) Relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen veränderlich fortschreitenden Punkt oder Raum	250
2) Relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen in veränderlicher Drehbewegung befindlichen Raum	252
3) Relative Bewegung des materiellen Punktes im Allgemeinen in Bezug auf einen in beliebiger Bewegung befindlichen Punkt oder Raum	257
4) Mechanische Arbeit der Relativkraft	260

Dritter Abschnitt.

Bewegungslehre eines Körpers oder Dynamik	273
<i>Bewegung eines starren Körpers</i>	276
I. Geometrisches über die Bewegung eines Körpers	276
II. Kräfte an einem starren Körper	277
1) Aeussere Kräfte an einem starren Körper	278
a) Aeussere Kräfte an einem starren Körper in ein und derselben Ebene und mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte	279
b) Aeussere Kräfte an einem starren Körper beliebig im Raume gerichtet und mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte	279
c) Aeussere Kräfte an einem starren Körper in ein und derselben Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten	280
d) Aeussere beliebig im Raum gerichtete Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten	291
2) Innere Kräfte des starren Körpers und Wirkung derselben	301
III. Freie Bewegung eines starren Körpers	305
1) Das d'Alembert'sche Princip und das Gesetz des Schwerpunktes	305

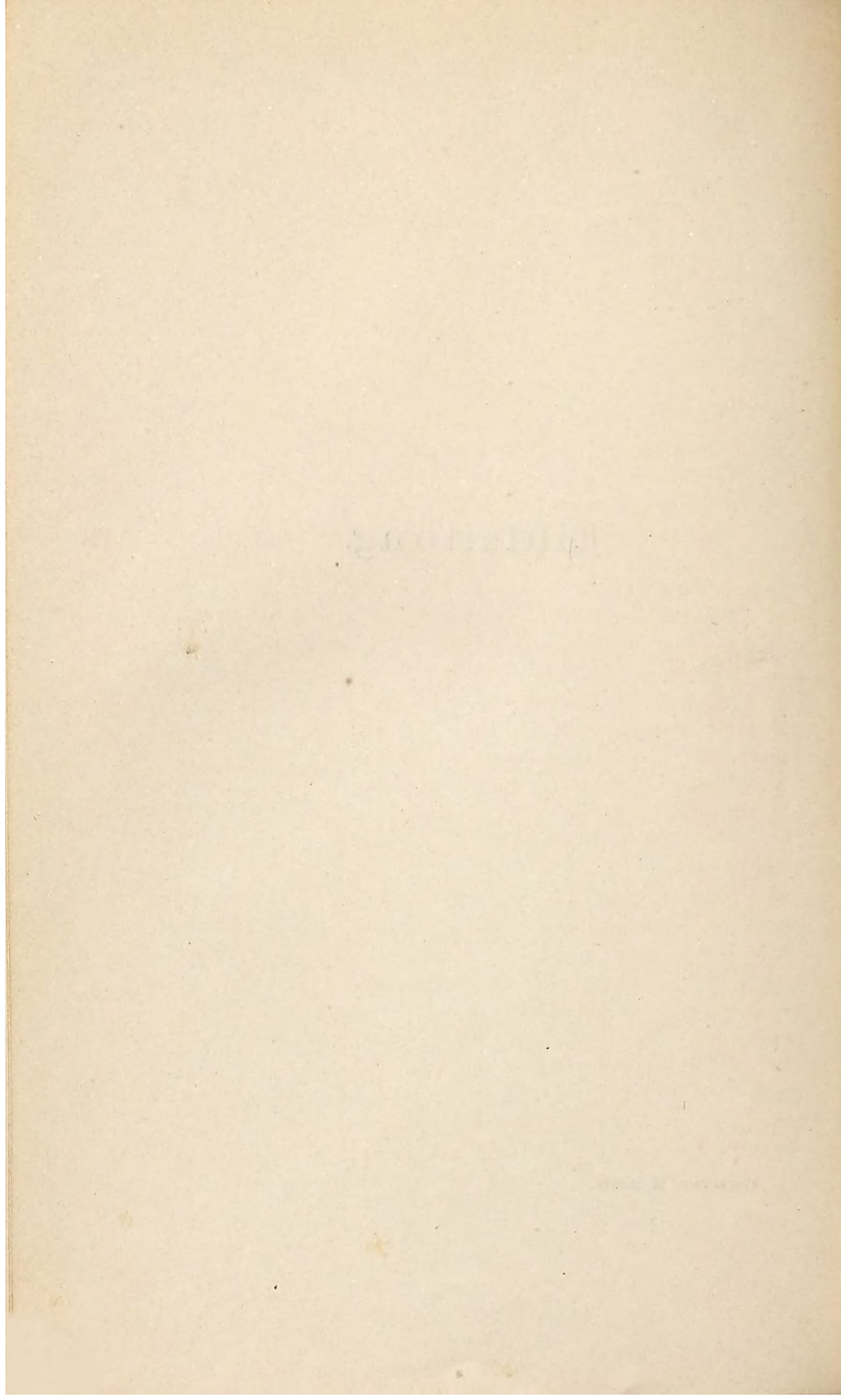
	Seite
2) Bewegungsarten eines freien Körpers	310
a) Geänderte fortschreitende Bewegung des Körper- Schwerpunktes	310
b) Geänderte Drehbewegung des freien Körpers um sei- nen Schwerpunkt	313
c) Geänderte fortschreitende Bewegung des Schwer- punktes und geänderte Drehbewegung des Körpers um den Schwerpunkt	314
d) Gleichförmige Bewegung und Ruhezustand eines freien Körpers	318
3) Lebendige Kraft eines freien starren Körpers und Arbeit der äusseren Kräfte	319
a) Lebendige Kraft eines freien starren Körpers bei fort- schreitender Bewegung des Schwerpunktes ohne Dre- hung um denselben	320
b) Lebendige Kraft des freien starren Körpers bei al- leiniger Drehbewegung desselben um eine Schwer- punktsachse	323
c) Lebendige Kraft des freien starren Körpers bei gleichzeitiger fortschreitender Bewegung des Schwer- punktes und der Drehbewegung des Körpers um den- selben	324
4) Trägheitsmomente starrer Körper	326
a) Reduction des Trägheitsmomentes eines starren Kör- pers, bezogen auf die Schwerpunktsachse, auf eine zur Schwerpunktsachse parallele Drehachse	327
b) Das Trägheitsmoment einer unendlich dünnen Platte, bezogen auf eine beliebige zur Plattenebene senkrecht stehende Achse O , ausgedrückt durch die Trägheits- momente der Platte, bezogen auf die in der Platten- ebene liegenden senkrecht aufeinander stehenden und in der O -Achse sich schneidenden Achsen X und Y	328
c) Bestimmung des Trägheitsmomentes eines starren Körpers, bezogen auf eine in einer XY -Ebene lie- gende durch den Ursprung der Achsen laufende und unter einem beliebigen Winkel zur X -Achse geneig- ten O -Achse, durch die Trägheitsmomente des Kör- pers, bezogen auf die senkrecht aufeinander stehen- den Achsen X und Y	330
d) Bestimmung des Trägheitsmomentes eines starren Körpers, bezogen auf eine beliebig im Raume gerich-	

	Seite
tete durch den Schnittpunkt von drei rechtwinkelig aufeinander stehenden Achsen X , Y , Z laufende O -Achse, durch die Trägheitsmomente des Körpers, bezogen auf jene Achsen	335
e) Trägheitshalbmesser	339
f) Reducirte Massen	340
5) Centrifugalkräfte und das Centrifugalmoment eines Kör- pers	341
6) Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung eines starren Körpers	347

Vierter Abschnitt.

Bewegungslehre eines Systems von Körpern	433
Bewegung eines Massensystems	435
1) Das d'Alembert'sche Princip und das Gesetz des Schwer- punktes	435
2) Lebendige Kräfte des Massensystems und Arbeit der wirkenden Kräfte (Kräftefunctionen, Princip der vir- tuellen Geschwindigkeit)	437

Einleitung.



Das Object der ganzen „Mechanik“ bilden die „Bewegung“ und die „Ruhe“ der Körper.

Der Begriff der Bewegung steht dem der Ruhe gegenüber und man versteht unter Bewegung

„die Veränderung des Ortes, welchen ein Körper einnimmt“,

unter Ruhe dagegen

„das Beibehalten dieses Ortes“.

Obgleich in Wirklichkeit dieser Gegensatz besteht, so umfassen doch die allgemeinen Gesetze der „Bewegung“ auch die Gesetze der „Ruhe“, und es kann daher der Ruhezustand als ein specieller Fall der Bewegung angesehen und „Mechanik“ kurz als die „Lehre von der Bewegung der Körper“ definirt werden.

Die Bewegung der Körper ist entweder

eine „absolute“ oder eine „relative“

und man sagt:

absolute Bewegung ist

„die Veränderung des absoluten Ortes“,

relative Bewegung

„die Veränderung des relativen Ortes“,

wenn man unter dem „absoluten Orte“ diejenige Stelle im unendlichen Weltraum versteht, welche ein Körper ohne Beziehung auf andere Körper in demselben einnimmt; während man mit „relativem Orte“ die Lage eines Körpers in Bezug auf andere ihn umgebende Körper kennzeichnet und dabei voraussetzt, dass letztere sowohl in Ruhe als auch in Bewegung sein können.

Relative Bewegung ist durch die gegebene Definition sicher gekennzeichnet, absolute Bewegung jedoch deshalb nicht streng, weil der leer zu denkende Weltraum unendlich gross, also unbegrenzt ist, und deshalb Ortsveränderungen in demselben nicht wahrgenommen werden können.

Es wird deshalb besser „absolute Bewegung“ als ein Gegensatz zur „relativen Bewegung“ hingestellt und folgendermassen definirt:

„Die absolute Bewegung eines Körpers besteht in der Veränderung des einen Ortes und dem stetigen Uebergange in einen anderen, sofern man sich sowohl den Anfangs- als auch den End-Ort nicht in Beziehung zu anderen Körpern, also als absolut vorstellt.“

Im Allgemeinen sind die Bewegungen als relative zu betrachten; sie dürfen jedoch als absolute angesehen werden, wenn man von der Beziehung des beobachteten bewegten Körpers zu anderen Körpern absieht.

Der relativen und absoluten Bewegung steht die relative und absolute Ruhe gegenüber, welche als specielle Fälle der entsprechenden Bewegungen angesehen werden dürfen und in dem Vorstehenden ihre Erklärung finden.

Die Bewegungen finden statt an Gebilden, welche man zum Unterschied von geometrischen Körpern „materielle“ oder „physische Körper“ nennt. Man denkt sich nämlich den geometrischen Rauminhalt mit „Materie“ respective „Masse“ erfüllt und versteht dabei unter „Materie“ das, „wodurch die Körper den Sinnen wahrnehmbar werden“, während „Masse“ das einen Körper bildende „Quantum von Materie“ vorstellt, welches bei gleichem geometrischen Rauminhalt verschieden gross sein kann (verschiedene Dichtigkeit, verschieden grosses Gewicht der Volumeneinheit).

Soll nun die Bewegung eines materiellen Körpers untersucht werden, so ist in erster Linie zu berücksichtigen, dass die Bewegungen der einzelnen Theile desselben von einander verschieden sein können. Man denkt sich deshalb den ma-

teriellen Körper in unendlich kleine Theile, sogenannte „materielle Punkte“, zerlegt, unterwirft diese einer selbstständigen Untersuchung und schliesst hierauf von den Bewegungen der einzelnen Theile auf die Bewegung des ganzen Körpers oder auf die Bahn eines ausgezeichneten Punktes desselben.

„Bahn“ oder „Weg“ bedeutet allgemein „den Raum, den ein Gebilde während seiner Bewegung durchschreitet“, und es ist demnach der Weg eines Punktes eine Linie, der Weg einer Linie eine Fläche und der Weg einer Fläche oder eines Körpers ein Körper.

Gewöhnlich versteht man jedoch unter der Bahn oder dem Weg eines Körpers

„diejenige Linie, welche ein bestimmter Punkt desselben, der später zu erklärende sogenannte Schwerpunkt, durchläuft“,

und man unterscheidet selbstredend auch hier „absoluten“ und „relativen“ Weg.

Die Wege oder Bahnen sind verschiedener Art und zwar sind zu unterscheiden

1) mit Rücksicht auf die „Richtung“ der Bewegung:

- a) geradlinige Bahnen und
- b) krummlinige Bahnen.

Bei ersteren bleibt die Richtung der Bewegung stets dieselbe, bei letzteren ändert sie sich in jedem Augenblick und man giebt sie an durch die Tangente im beobachteten Curvenpunkte.

Im Uebrigen bilden die krummlinigen Bahnen Linien, welche entweder

α) „in die Unendlichkeit laufen“
oder solche,

β) „welche sich schliessen“.

2) Mit Rücksicht auf die Nichtexistenz oder Existenz einer „vorgeschriebenen Bahn“
sind zu unterscheiden:

- a) freie Bewegungen und
- b) unfreie oder gezwungene Bewegungen.

Beispielsweise werden erstere in dem Weltraum an den Weltkörpern beobachtet, letztere auf der Erde an allen Maschinen.

Eine getrennte Untersuchungsweise dieser beiden Bewegungsarten findet jedoch nicht statt, da sich die Resultate der theoretischen Untersuchung von freier Bewegung leicht auf die gezwungene Bewegung übertragen lassen.

Endlich sind

3) mit Rücksicht auf die „Zeit“ folgende wichtigen Unterschiede zu machen:

Alle Veränderungen ereignen sich in der „Zeit“, sie erfolgen in einer gewissen Aufeinanderfolge innerhalb gewisser durch das Zeitmass zu kennzeichnenden „Zeiträume“; und die Art der Aufeinanderfolge innerhalb bestimmter Zeiträume, der sogenannten „Zeiteinheiten“, gestattet einen weiteren Schluss auf die Arten der Veränderungen respective der Bewegungen.

Strenger ist daher „Bewegung“

„eine Ortsveränderung in der Zeit“,
„Weg“

„der in der Zeit durchlaufene Raum“,
und ein Vergleich der „Zeit“ und des „Raumes“ ein weiteres Mittel zur Unterscheidung der Bewegungen.

Dieser Vergleich liefert den Begriff der

„Geschwindigkeit“

und man versteht unter ihr — je nach der Art der Bewegung — entweder „den vom Körper in der Zeiteinheit wirklich zurückgelegten Weg“ oder „denjenigen Weg, welchen der Körper unter bestimmten Voraussetzungen in der Zeiteinheit zurücklegen würde.“

Die Geschwindigkeit lässt daher auf die „Stärke der Bewegung“ schliessen.

Analog der „absoluten und relativen Bewegung“ spricht man selbstredend auch hier von „absoluter und relativer

Geschwindigkeit“ und beide sind den entsprechenden Bewegungen analog zu definieren.

Die Bewegungen mit Rücksicht auf die „Zeit“ sind nun entweder

a) gleichförmige (auf gerader oder krummer Bahn)
oder

b) ungleichförmige (auf gerader oder krummer Bahn).

Bei ersteren ist die Geschwindigkeit constant, d. h. „es legt der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück“, bei letzteren hingegen ändert sich dieselbe in jedem Augenblicke. Es ist daher bei gleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit durch den vom Körper in der Zeiteinheit zurückgelegten Weg direct messbar, bei ungleichförmiger Bewegung hingegen nicht; man denkt sich bei ihr die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblick ausgedrückt durch „dasjenige Wegstück, welches der Körper in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn in diesem Augenblick die ungleichförmige Bewegung in eine gleichförmige überginge“.

Auch pflegt man bei ungleichförmiger Bewegung von „mittlerer Geschwindigkeit“

zu reden und man bezeichnet durch sie diejenige „constante Geschwindigkeit“, mit welcher der in Wirklichkeit in der Zeiteinheit ungleichförmig durchlaufene Weg in derselben Zeit „gleichförmig“ durchlaufen werden würde.

Je nach der „Art der Geschwindigkeitsänderung bei ungleichförmiger Bewegung“ hat man weiter zu unterscheiden:

α) gleichförmig geänderte

und

β) ungleichförmig geänderte Bewegung,

und man nennt erstere

„gleichförmig beschleunigt“,

wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel zu-,
und

„gleichförmig verzögert“,

wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten gleich viel abnimmt.

Bei ungleichförmig geänderter Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit nach einem beliebigen Gesetz, nach welchem sie entweder nur zu- oder nur ab- oder bald zu- bald abnimmt.

Die Aenderung der Geschwindigkeit nennt man allgemein „Beschleunigung“, welche bei beschleunigter Bewegung positiv, bei verzögerter Bewegung negativ (Verzögerung) ist; gewöhnlich versteht man unter ihr

„das Mass der Geschwindigkeits-Zu- oder Abnahme in der Zeiteinheit“.

Dieses Mass ist bei ungleichförmig geänderter Bewegung aber veränderlich; man versteht deshalb in diesem Falle unter Beschleunigung „diejenige Geschwindigkeitsänderung, welche in der Zeiteinheit eintreten würde, wenn im Augenblicke der Beobachtung die ungleichförmig geänderte Bewegung in eine gleichförmig geänderte überginge“.

Findet die Bewegung in einem Kreise statt, ist sie also eine sogenannte Drehbewegung, oder ist die Bewegung überhaupt eine krummlinige, bei welcher ein Differential der krummen Bahn als ein Kreisbogen angesehen werden darf, so spricht man von

„Winkelgeschwindigkeit“

und

„Winkelbeschleunigung“

und versteht unter ersterer* bei „gleichförmiger Bewegung“ denjenigen Weg, welchen ein Punkt in der Entfernung Eins vom Mittelpunkte des Kreisbogens in der Zeit Eins zurücklegt; während man bei „geänderter“ Bewegung — analog Früherem — mit Winkelgeschwindigkeit denjenigen Weg

* Strenger ist Winkelgeschwindigkeit eine „Verhältnisszahl“ zwischen der wahren Drehgeschwindigkeit des Punktes und dem wahren Drehungshalbmesser; es ist aber die gewählte dem Anfänger anschaulichere Definition zulässig, wenn man den Drehungshalbmesser allgemein mit „Eins“ bezeichnet.

bezeichnet, welchen jener Punkt in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn im Augenblicke der Beobachtung die geänderte Bewegung in eine gleichförmige überginge.

Unter „Winkelbeschleunigung“ aber ist bei „gleichförmig geänderter Bewegung“ „das Ab- resp. Zu-Nehmen der Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit“ und bei „ungleichförmig geänderter Bewegung“ das zu verstehen, was in diesem Falle allgemein für „Beschleunigung“ angeführt wurde.

Als Zeitmass* benutzt man eine stetige Aufeinanderfolge von Ereignissen, beispielsweise die gleichförmige Drehbewegung eines Körpers, deren constante Geschwindigkeit ihrer Grösse nach im allgemeinen ganz beliebig ist.

Zur Feststellung der Grösse einer bestimmten Geschwindigkeit hat man aber die Drehbewegung der Erde um ihre Achse benutzt, die Dauer einer Umdrehung mit dem Namen „Tag“** belegt, in 24 gleiche Theile getheilt und jeden solchen Theil mit dem Namen „Stunde“ bezeichnet. Die Stunde ist in 60 gleiche Theile, „Minuten“, und die Minute in 60 gleiche beliebig weiter zerlegbare Theile, „Secunden“, getheilt worden.

Als Zeiteinheit pflegt man in der Mechanik gewöhnlich

$$1 \text{ Secunde} = \frac{1}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ eines Tages}$$

* Der Begriff der Zeit ist die Erkenntniss einer Aufeinanderfolge in den Zuständen unseres Bewusstseins. Durch unsere Erfahrung an solchen Naturprocessen, welche sich in gleichförmiger Weise vollziehen, kommen wir zur Erkenntniss der Möglichkeit eines Systemes der Zeitrechnung, in welchem alle Ereignisse ihren Platz finden, gleichgültig welcher Art sie sind.

** Scheinbare oder gemeine Zeit ist eine nach der Bewegung von Körpern geschätzte Dauer, so bei der Bestimmung von Tagen, Monaten, Jahren. Diese Zeitmasse sind provisorische; die Astronomie hat aber die Ungleichheiten der Tage, Monate und Jahre messen gelehrt und die scheinbare Zeit auf ein gleichförmiges Mass, „die mittlere Sonnenzeit“, zurückgeführt. Die gewöhnlichen Uhren gehen nach mittlerer Sonnenzeit.

und nur bei grösseren Zeiten Minuten, Stunden, Tage und Jahre anzuwenden.

Aus dem Bisherigen geht hervor, dass der Begriff der Bewegung aus den Vorstellungen Raum und Zeit entspringt, dass sich die Bewegungen an der Masse vollziehen und dass dieselben im allgemeinen ungleichförmig und krummlinig sind.

Die beobachtete Wirkung, bestehend in hervorgebrachter Bewegung, d. i. also Geschwindigkeits- und Richtungsänderung der Masse, bedarf nunmehr aber noch ihrer Erklärung; es ist noch die „Ursache“ anzugeben, welche die „Wirkung“ hervorbringt. Diese Ursache wird sich insgesamt gestalten durch Raum, Zeit und durch ein „Etwas“, welches als das Bedingende für die Durchlaufung des Raumes in der Zeit auftritt, welches entweder der Masse als solcher eigenthümlich oder ausserhalb derselben zu suchen ist.

Stellt man sich vor, es befände sich in dem unendlich grossen leer gedachten Weltraum ein einziger materieller Punkt und dieser in absoluter Ruhe, so wäre für die Möglichkeit, es werde die Masse desselben durch sich selbst irgend welche Bewegung nach irgend einer Richtung annehmen, kein Grund einzusehen, weil, wenn der Masse die Ursache ihrer eigenen Bewegung innewohnen würde, das Bewegungsbestreben nach „allen“ Richtungen hin gleich gross sein und der Punkt infolge dessen keinerlei Bewegung erhalten würde.

Weiter lehrt die Erfahrung, dass in der materiellen Welt aus ein und demselben Anfangszustande eines materiellen Punktes die verschiedensten denkbaren Bewegungen hervorgehen können, weshalb jener Anfangszustand das Bedingende für die mögliche Verschiedenartigkeit nicht in sich bergen und deshalb nur geschlossen werden kann, dass das den Verlauf einer Bewegung bedingende „Etwas“ ausserhalb der beobachteten „bewegten“ Masse zu suchen ist. Dieses Etwas bezeichnet man mit dem Namen

„Kraft“,

ohne das Wesen derselben genauer definiren zu können.

Die Erfahrung lehrt weiter, dass da, wo Masse ist, jederzeit auch Kraftwirkungen beobachtet werden, dass also Kraft und Masse nicht voneinander trennbare Begriffe sind.

Es wurde nun oben angeführt, dass ein einziger materieller Punkt im leeren Weltraum nicht im Stande ist, durch sich selbst Bewegung anzunehmen; hingegen lehrt die Erfahrung, dass ein zweiter materieller Punkt — in beliebige Entfernung zu dem ersten gebracht — auf den ersten und dieser auf den zweiten Kraftwirkung ausübt, und man erkennt, dass eine Masse wohl der Sitz einer Kraft sein, letztere aber nur benachbarte Massen beeinflussen kann.

Aus diesem Grunde ist aber die eine Masse in Bewegung versetzende Kraft stets ausserhalb der bewegten Masse zu suchen.

Man vermag eine Kraft nur durch ihre Wirkungen zu erkennen und diese sind im allgemeinen je nach der „Grösse“, der „Richtung“ und dem „Angriffspunkte“ der Kraft an einem Körper verschiedenartig; es wird daher eine Kraft nach diesen drei Gesichtspunkten zu bestimmen sein.

Obgleich die letzteren geometrischer Art zu sein scheinen, so ist doch Kraft kein geometrischer, sondern ein rein physikalischer Begriff und sind dem entsprechend auch jene Bestimmungstheile einer Kraft zu definiren.

Beobachtet man, dass sich ein Körper „geradlinig“ und „gleichförmig“ fortbewegt, oder dass der Körper „ruht“, so findet an demselben weder eine „Bewegungsrichtungs-“ noch eine „Geschwindigkeits-Aenderung“ statt, und man muss schliessen, dass entweder gar keine Kräfte auf den Körper wirken, oder dass sich die auf ihn wirkenden Kräfte in ihren „Wirkungen“ aufheben, dass — wie man sagt — die Kräfte im „Gleichgewicht“ stehen.

Die erste Annahme ist jedoch sofort ausgeschlossen, wenn man bedenkt, dass alle Körper im Weltall jederzeit Kraftwirkungen ausgesetzt sind, weshalb die zweite aus-

schliesslich als Ursache der gleichförmigen Bewegung resp. der Ruhe anzusehen ist.

Angenommen ein materieller Punkt oder Körper befände sich unter dem Einfluss von im Gleichgewicht stehenden Kräften in Ruhe, so würde derselbe auch so lange in diesem Zustande verharren, bis das Hinzutreten neuer Kraft den Gleichgewichtszustand stört. Tritt dieser Fall ein und wirkt der Kraftzuschuss nur eine bestimmte Zeit hindurch auf den Körper, dann erlangt der letztere eine bestimmte Geschwindigkeit, mit welcher er sich nach wieder eingetretenem Gleichgewichtszustand geradlinig und gleichförmig bis in die Unendlichkeit fortbewegt.

Diese der Masse innewohnende Eigenthümlichkeit nennt man

„das Beharrungsvermögen oder die Trägheit“ derselben.

Wird nun ein geradlinig und gleichförmig sich fortbewegender materieller Punkt von einer Kraft derart beeinflusst, dass wohl eine Geschwindigkeits-, nicht aber eine Bewegungsrichtungs-Aenderung entsteht, dann sagt man: „die Richtung der Kraft fällt mit der Richtung der schon vorhandenen geradlinigen Bewegung zusammen“. Beeinflusst eine Kraft jenen sich geradlinig und gleichförmig bewegendem materiellen Punkt aber so, dass keine Geschwindigkeits-, sondern nur Bewegungsrichtungs-Aenderung entsteht, so kann die vorhandene Kraft einen Einfluss stets nur „senkrecht zur Bewegungsrichtung“ ausüben. Würde nun schliesslich durch eine Kraft sowohl die Geschwindigkeit als auch die Richtung der Bewegung geändert, die Bewegung also eine ungleichförmig krummlinige werden, so muss man schliessen, „dass die Lage der Kraft weder mit der Richtung der Bewegung, noch mit der zu ihr Normalen zusammenfalle, und dass ein Antheil der Kraft die Geschwindigkeits- und ein zweiter Theil derselben die Richtungs-Aenderung bewirkt, dass der erste Theil eine Tangential- und der zweite eine Normalbeschleunigung erzeugt“.

Die Grössen dieser den Richtungen nach bekannten Beschleunigungen aber lassen, wie sich im Laufe der Untersuchungen zeigen wird, auf die Richtung der „Totalbeschleunigung“ des materiellen Punktes schliessen, und da diese den „Totaleinfluss“ der Kraft auf den materiellen Punkt repräsentirt, so versteht man unter jener Richtung zugleich auch die „Richtung der Kraft“, und es erhellt hieraus, dass man unter der letzteren nur den „Sinn“ begreift, in welchem der Punkt von der Kraft beeinflusst wird.

Die „Grösse der Kraft“ ist nach der „Grösse der Totalbeschleunigung“ zu bestimmen, und es wird die erstere — stets dieselbe Masse vorausgesetzt — um so grösser sein, je grösser die letztere ist.

Je nachdem die Grösse und Richtung einer Kraft während der Bewegung dieselben bleiben oder eine resp. beide sich ändern, nennt man die Kraft „constant“ oder „veränderlich“.

Wirkt eine Kraft nur auf „einen“ materiellen Punkt, so ist dieser zugleich der Ort, auf welchen der Einfluss der Kraft „direct“ ausgeübt wird; wirkt sie hingegen auf einen Körper, so ist derjenige Punkt desselben, auf welchen die Kraftäusserung direct stattfindet, der sogenannte „Angriffspunkt“ der Kraft, noch genauer zu kennzeichnen, weil — wie sich später zeigen wird — je nach diesem Orte unter sonst gleichen Verhältnissen die Totalwirkung auf einen Körper verschiedenartig ist.

Im weiteren Sinne pflegt man

„active“ und „passive“

Kräfte zu unterscheiden. Man versteht unter ersteren ausschliesslich diejenigen, welche „Bewegungen erzeugen“, unter letzteren hingegen sogenannte „Widerstände“, welche erst erregt werden, sobald durch active Kräfte Bewegung angestrebt oder erzeugt wird, welche ohne die Wirkung activer Kräfte „nie“ zur Geltung gelangen, welche niemals Bewegung erzeugen, sondern nur bereits existirende Bewegung

verzögern oder durch active Kräfte angestrebte Bewegung verhindern können.

Jede passive Kraft wirkt somit der angestrebten oder vorhandenen Bewegungsrichtung „entgegen“, weshalb man passive Kräfte als „negative active Kräfte“ ansehen kann und als solche in die Untersuchung einzuführen hat.

Besitzt weiter eine Masse Geschwindigkeit, so ist nur eine der Bewegungsrichtung des Körpers entgegengesetzt gerichtete Kraft im Stande, die vorhandene Geschwindigkeit zu vermindern oder aufzuheben, wobei die „bewegte Masse“ „active Kraftwirkung“ äussert, die der Bewegung entgegengesetzt gerichtete Kraft aber als „Widerstand“ erscheint.

Insofern nun „bewegte“ Masse Kraftwirkung hervorrufen kann, so spricht man von der Kraft der trägen Masse oder kurz von der

„Trägheitskraft“ oder der „lebendigen Kraft“ eines Körpers.

Das Messen der Masse erfolgt durch eine auf sie wirkende Kraft und die von derselben an der Masse erzeugte Beschleunigung; während Kräfte ihrer Grösse nach durch Gewichte (Kilogramm, Pfunde etc.) und Beschleunigungen durch Längenmasse (Meter, Fusse etc.) ausgedrückt werden.

Unter einem Gewicht versteht man hierbei diejenige Kraft, mit welcher ein Körper infolge der Anziehung der Erde, der Schwere, vertical abwärts gezogen wird. Die dieser Kraft entsprechende Beschleunigung nennt man Beschleunigung oder Acceleration der Schwere; und da diese für alle Körper in derselben Entfernung vom Erdmittelpunkt dieselbe ist und ausserdem Gewichte der Körper leicht bestimmt werden können, so benutzt man beide am bequemsten zum Mass der Masse.

Unter der Masseneinheit versteht man gewöhnlich dasjenige Massenquantum, welches der Gewichtseinheit entspricht, welches beispielsweise ein Kilogramm wiegt.

Nach allen bisherigen Anführungen hat man nunmehr ausführlicher unter

„Mechanik die Lehre von der Bewegung der Massen und der Massensysteme oder die Lehre von den Wirkungen der Kräfte auf die Massen in dem Raum und in der Zeit zu verstehen“,

und es sollen im Folgenden vier Abschnitte behandelt werden, von denen die ersten zwei zur Vorbereitung dienen, die letzten zwei aber eine Einführung in die Mechanik bieten sollen.

Erster Abschnitt: Die Bewegung eines Punktes ohne Rücksicht auf Kraft und Masse, aber in Bezug auf Raum und Zeit.

Zweiter Abschnitt: Die Bewegung eines Punktes unter Rücksicht auf seine Masse, die auf ihn wirkenden Kräfte und unter Rücksicht auf Raum und Zeit.

Dritter Abschnitt: Die Bewegung eines Körpers.

Vierter Abschnitt: Die Bewegung eines Systemes von Körpern, eines sogenannten Massensystemes.

Erster Abschnitt.

Bewegungslehre eines mathematischen Punktes,
auch Geometrische Bewegungslehre genannt.

THE HISTORY OF THE

REIGN OF CHARLES THE FIRST
BY JOHN BURNET

Die geometrische Bewegungslehre beschäftigt sich ausschliesslich mit der Bewegung eines „mathematischen“ Punktes, vernachlässigt also die „Masse“; sie berücksichtigt bei der Untersuchung von Geschwindigkeit, Beschleunigung und Weg nur „Raum“ und „Zeit“, lässt das die Bewegung Bedingende, die „Kräfte“, ausser Acht und drückt die Beziehungen zwischen Raum und Zeit nur mit den Hilfsmitteln der Geometrie aus.

Vom Standpunkte der letzteren können

I. einfache und

II. zusammengesetzte Bewegungen

unterschieden werden, insofern man unter „einfachen“ Bewegungen alle „denkbaren geradlinigen“ und unter „zusammengesetzten“ diejenigen Bewegungen versteht, „welche sich ergeben, wenn der Punkt gleichzeitig zwei oder mehrere einfache Bewegungen besitzt“.

I.

Einfache Bewegung eines mathematischen Punktes.

Bei der Untersuchung der einfachen Bewegungen kommen — nach der gegebenen Definition — ausschliesslich gerade Bahnen in Frage, welche vom mathematischen Punkte entweder gleichförmig oder ungleichförmig durch-

laufen werden können, und es sind deshalb im Folgenden zu betrachten:

1. gleichförmig geradlinige und
2. ungleichförmig geradlinige Bewegungen eines mathematischen Punktes.

1.

Gleichförmig geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes.

Nach der in der Einleitung gegebenen Definition werden bei „gleichförmiger Bewegung“ vom mathematischen Punkte in gleichen Zeiten gleiche Wege zurückgelegt und bedeutet Geschwindigkeit den in der Zeiteinheit wirklich zurückgelegten Weg.

Bedeutet

s den Weg in t Secunden,

c die constante Geschwindigkeit,

n beliebig grosse, aber gleiche Theile der Geschwindigkeit

und x die Länge eines jeden Theiles, dann ist

$$c = n \cdot x,$$

$$s = n \cdot x \cdot t$$

$$\text{oder } s = c \cdot t.$$

Graphische Darstellung der Gleichung $s = c \cdot t$.

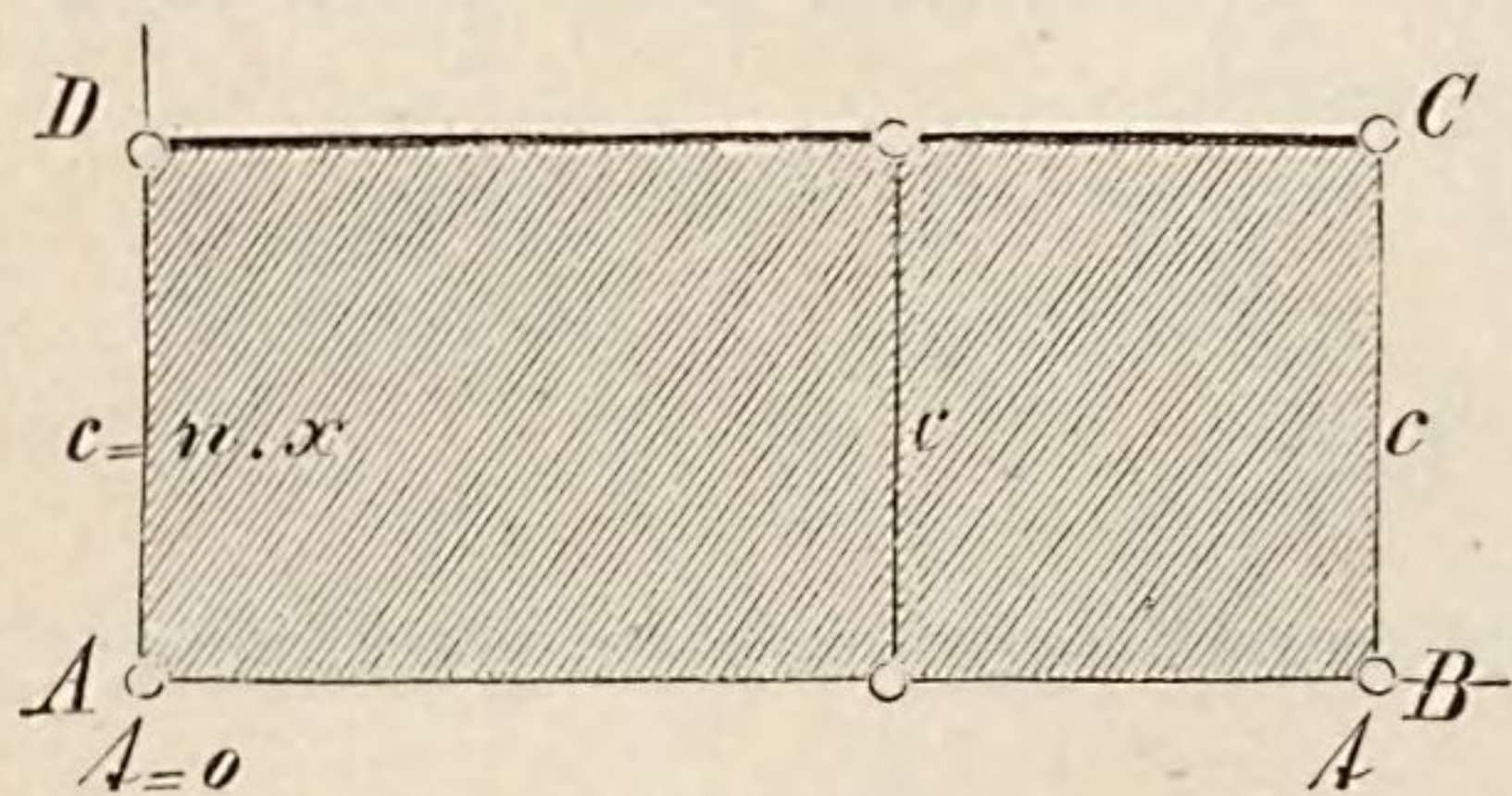


Fig. 1.

Trägt man auf ein rechtwinkliges Achsen-system die Zeiten als Abscissen und die constante Geschwindigkeit als Ordinaten auf, so ergibt sich für die Zeit t ein Rechteck $ABCD$, Fig. 1, vom Flächeninhalt

$$s = c \cdot t,$$

welches den Weg s geometrisch veranschaulicht.

Die Begrenzungslinie CD der Ordinaten c , welche im vorliegenden Falle eine Gerade ist, nennt man allgemein „Geschwindigkeitscurve“.

Aus der Gleichung für den Weg folgt der constante Werth

$$c = \frac{s}{t},$$

und es ist nach der graphischen Darstellung desselben in Fig. 2, in welcher die Zeiten die Abscissen und die denselben entsprechenden Wege die Ordinaten bilden,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

wenn noch

Δt eine beliebige Zunahme der Zeit und Δs die zugehörige Wegzunahme bedeuten.

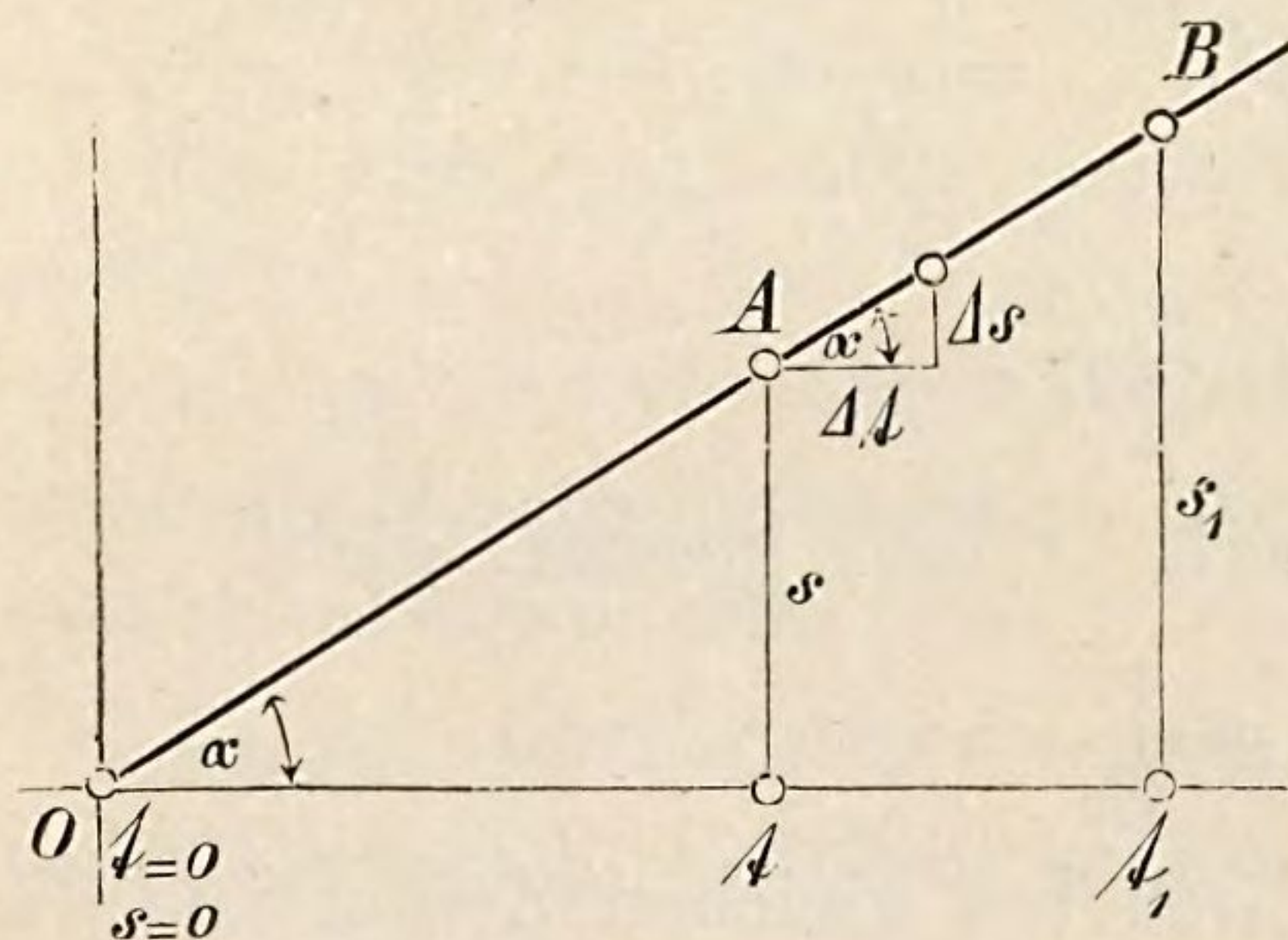


Fig. 2.

Hiernach ist der Winkel α constant, die Geschwindigkeit c demselben proportional, und die Begrenzungslinie OB der Wegordinaten, welche allgemein

„Wegcurve“ genannt wird, eine Gerade.

Ändert sich nach Verlauf einer gewissen Zeit der Winkel α , dann ändert sich entsprechend c und s , und es kann somit aus der Beschaffenheit der Wegcurve auf die Grössen der Geschwindigkeit und des Weges geschlossen werden.

Ein Beispiel hierzu liefert Fig. 3, in welcher mehrere unter sich verschiedene aufeinander folgende gleichförmige Bewegungen dargestellt sind. Nimmt α zu, so wächst c , nimmt α ab, so sinkt c und wird $\alpha = 0$, so wird $c = 0$.

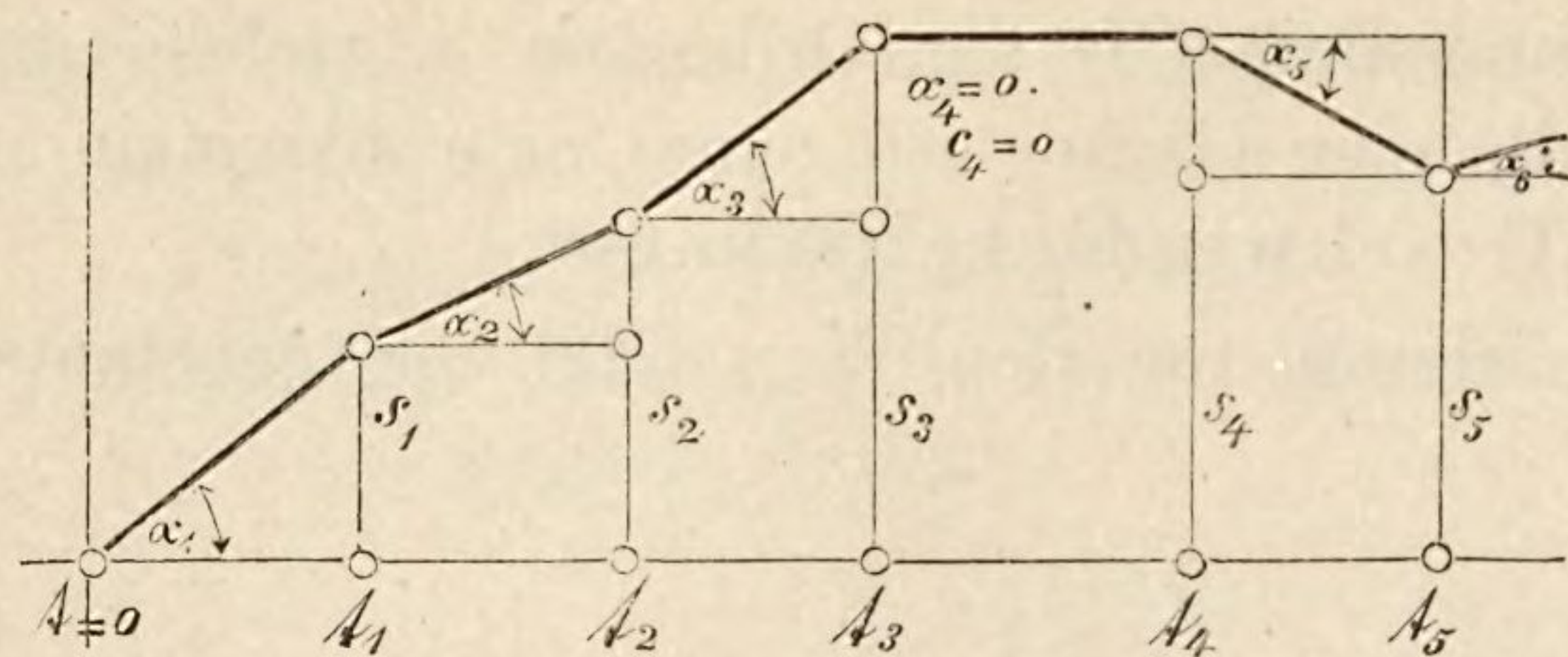


Fig. 3.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{s_1}{t_1}, \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \\ &\vdots \\ \operatorname{tg} \alpha_4 &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha_5 &= \frac{s_5 - s_4}{t_5 - t_4}; \end{aligned}$$

da $s_4 > s_5$ ist, so wird c_5 negativ und die Bewegung rückläufig.

Aus der Gleichung für den Weg folgt ferner für die Zeit

$$t = \frac{s}{c}.$$

Vergleich von zwei verschiedenen gleichförmigen Bewegungen.

Gegeben sind

$$s = c \cdot t \text{ und } s_1 = c_1 \cdot t_1;$$

es folgt durch Division

$$\frac{s}{s_1} = \frac{c \cdot t}{c_1 \cdot t_1}.$$

Erster specieller Fall: $t = t_1$ gesetzt, giebt

$$\frac{s}{s_1} = \frac{c}{c_1},$$

d. h. die Wege verhalten sich bei gleichen Zeiten wie die Geschwindigkeiten.

Zweiter specieller Fall: $c = c_1$ eingeführt, liefert

$$\frac{s}{s_1} = \frac{t}{t_1},$$

d. h. die Wege verhalten sich bei gleichen Geschwindigkeiten wie die Zeiten.

Dritter specieller Fall: $s = s_1$ gesetzt, folgt

$$c \cdot t = c_1 \cdot t_1$$

$$\text{und } \frac{c}{c_1} = \frac{t_1}{t},$$

d. h. die Geschwindigkeiten verhalten sich bei gleichen Wegen umgekehrt wie die Zeiten.

2.

Ungleichförmig geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes.

Bei ungleichförmig geradliniger Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblick; die Änderung ist aber entweder „gleichförmig“ oder „ungleichförmig“ und es sind deshalb zu betrachten:

- a) gleichförmig geänderte geradlinige und
- b) ungleichförmig geänderte geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes.

- a) Gleichförmig geänderte geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes.

Die „gleichförmig geänderte“ Bewegung ist entweder

α) „gleichförmig beschleunigt“,
wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel zunimmt, oder

β) „gleichförmig verzögert“,
wenn die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleich viel abnimmt.

In beiden Fällen nennt man die Grösse der Geschwindigkeitsänderung

„Beschleunigung oder Acceleration“,
und sie ist bei gleichförmig beschleunigter Bewegung positiv, bei gleichförmig verzögerter Bewegung negativ und überhaupt um so grösser, je mehr innerhalb einer bestimmten Zeit die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt.

Gewöhnlich sagt man: Beschleunigung ist diejenige Geschwindigkeitsänderung, welche der Punkt in der Zeiteinheit, wie üblich in 1 Secunde, erleidet, und da in den vor-

liegenden Fällen die Geschwindigkeitsänderung eine stetige ist, so wird die Geschwindigkeitscurve bei gleichförmig beschleunigter Bewegung eine „steigende“, bei gleichförmig verzögerter Bewegung eine „fallende Gerade“ sein.

Allgemein sei

s der in t Secunden zurückgelegte Weg,

c die Anfangs-,

v die Endgeschwindigkeit und

p die Beschleunigung,

dann gelten folgende graphischen Darstellungen:

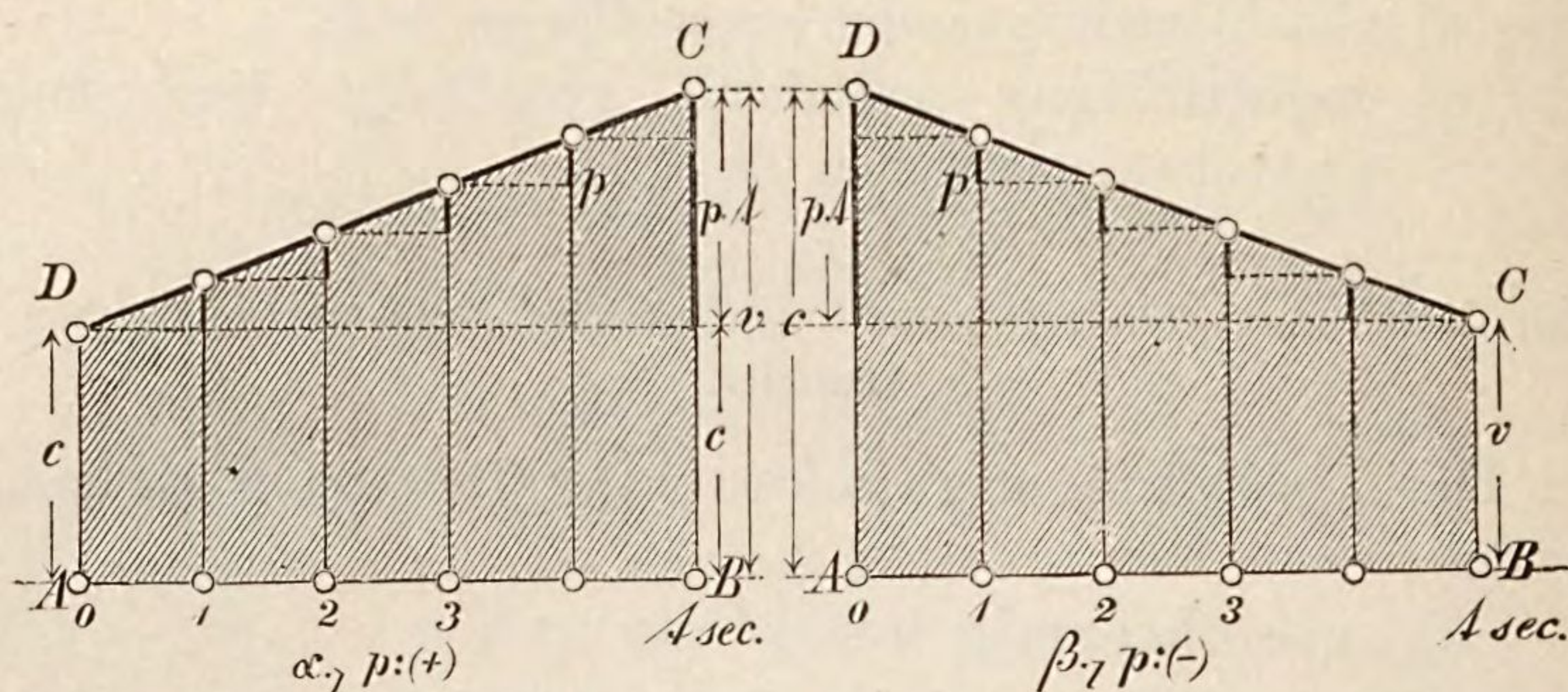


Fig. 4.

Fig. 5.

Die Fig. 4 liefert — analog den Darstellungen bei der gleichförmigen Bewegung — für „gleichförmig beschleunigte“ Bewegung alle Beziehungen zwischen den in Frage kommenden Grössen s , t , c , v und p . CD ist die Geschwindigkeitscurve, $p \cdot t$ die Geschwindigkeitszunahme während t Secunden, und im Uebrigen gelten nach Fig. 4 folgende Gleichungen:

Die Geschwindigkeit nach t Secunden ist

$$v = c + p \cdot t,$$

woraus sich die Zeit

$$t = \frac{v - c}{p}$$

und die Beschleunigung

$$p = \frac{v - c}{t}$$

ergeben.

Denkt man sich die Fläche $ABCD$ in ein Rechteck umgewandelt, so folgt für den Weg

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t$$

und setzt man in diesen Ausdruck den Werth für t ein, so ergibt sich

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot \frac{v - c}{p}$$

$$\text{oder } s = \frac{v^2 - c^2}{2p};$$

führt man hingegen in den ersten Ausdruck für den Weg s den Werth für v ein, so folgt

$$\begin{aligned} s &= \frac{c + v}{2} \cdot t \\ &= \frac{c + (c + p \cdot t)}{2} \cdot t \end{aligned}$$

$$\text{oder } s = c \cdot t + \frac{p \cdot t^2}{2}.$$

Spezieller Fall: Es sei die Anfangsgeschwindigkeit

$$c = 0$$

(Fig. 6), dann folgt aus den letzten Gleichungen

$$v = p \cdot t,$$

$$p = \frac{v}{t},$$

$$s = \frac{v \cdot t}{2},$$

$$s = \frac{v^2}{2p}$$

$$\text{und auch } s = \frac{p \cdot t^2}{2}.$$

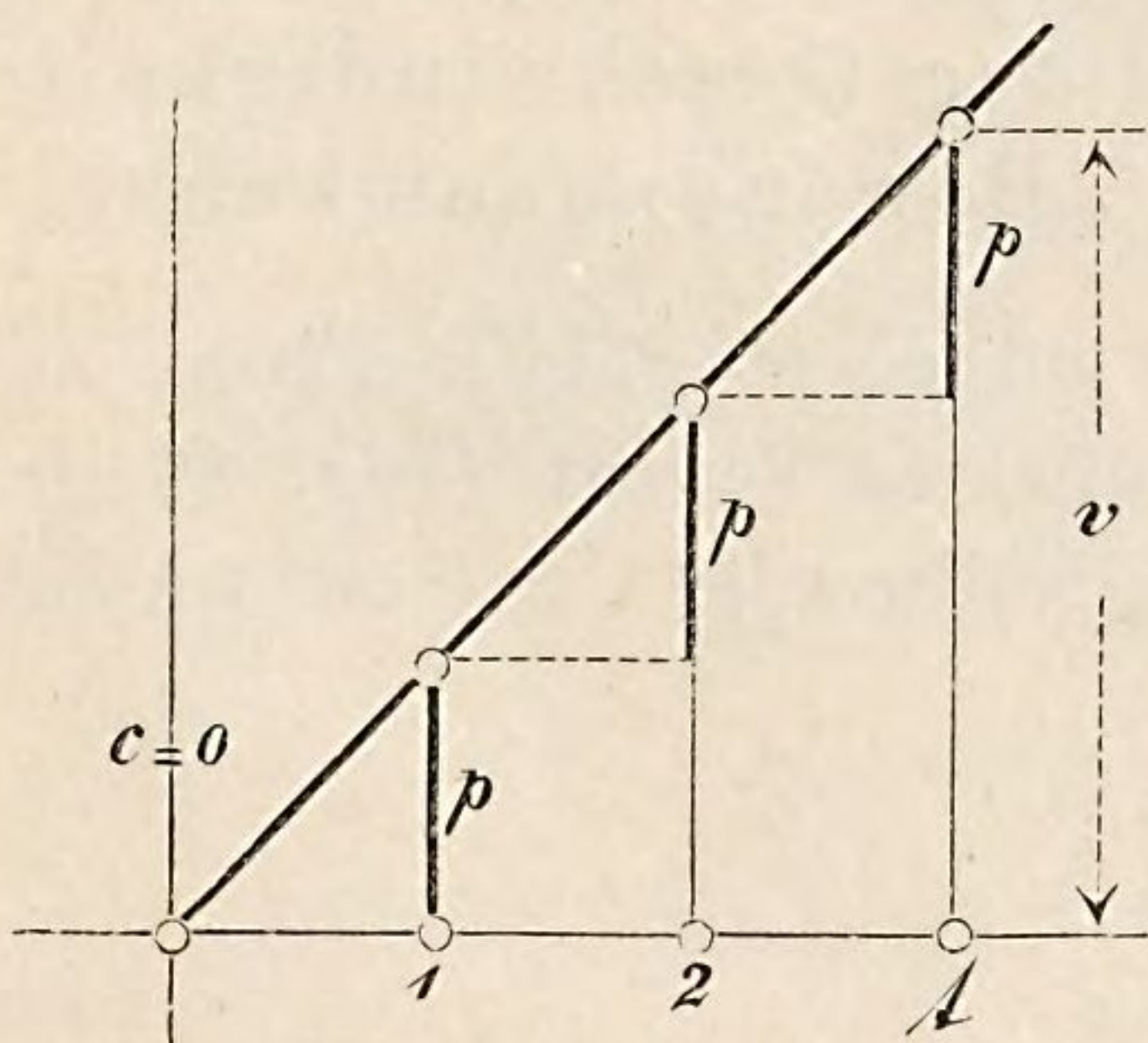


Fig. 6.

Analog ergeben sich nun aus der Fig. 5 für gleichförmig verzögerte Bewegung folgende Werthe:

$$v = c - p \cdot t,$$

$$t = \frac{c - v}{p},$$

$$p = \frac{c - v}{t},$$

$$s = \frac{c + v}{2} \cdot t,$$

$$s = \frac{c^2 + v^2}{2p}$$

$$\text{und } s = c \cdot t - \frac{p \cdot t^2}{2}.$$

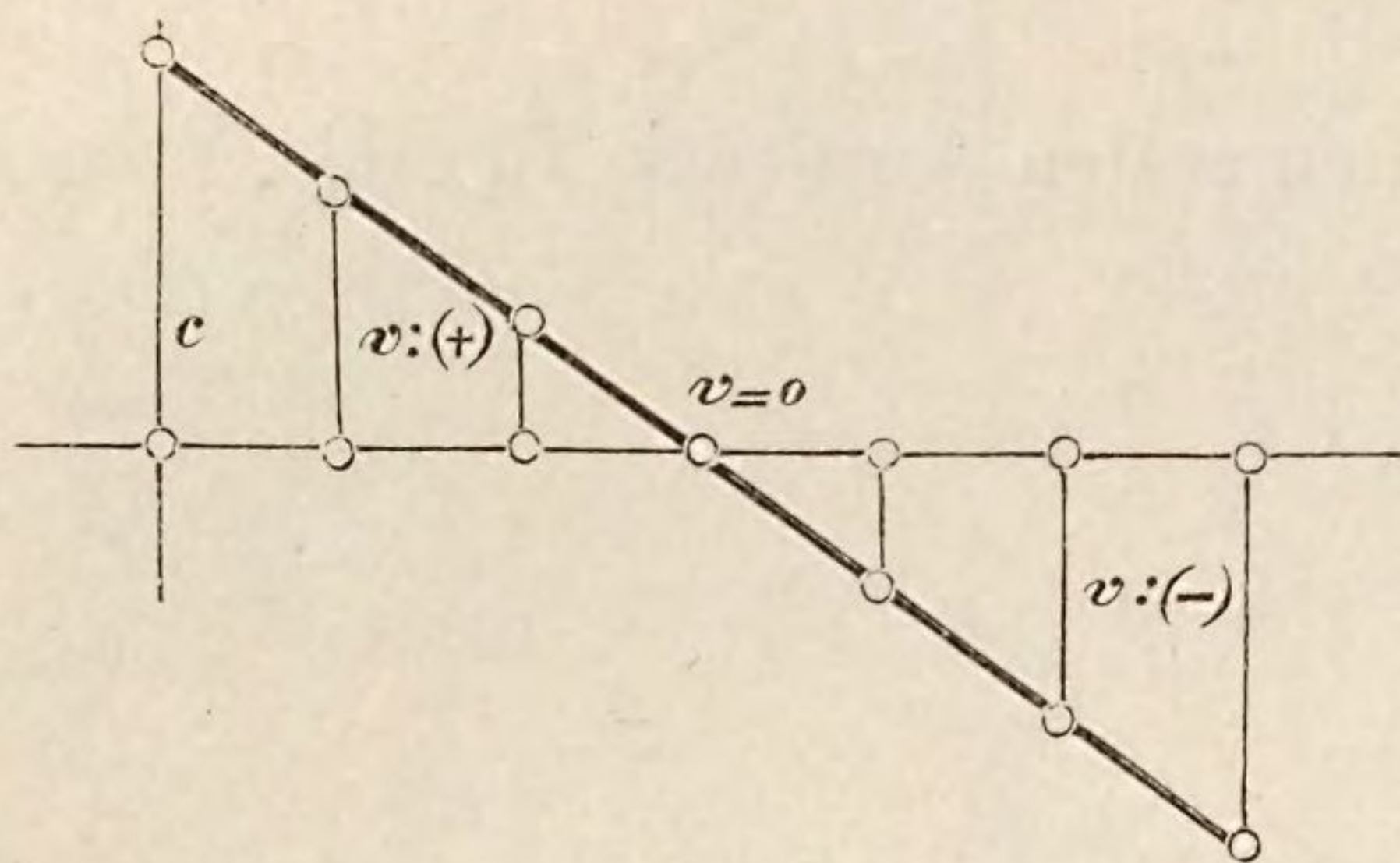


Fig. 7.

Bei „gleichförmig verzögerter“ Bewegung nimmt die Geschwindigkeit stetig ab, bis sie in einem gewissen Zeitpunkte gleich Null und hierauf möglicherweise negativ wird (Fig. 7). Das Negativwerden der Geschwindigkeit zeigt,

dass die Fortsetzung der Bewegung im entgegengesetzten Sinne zur anfänglichen Bewegungsrichtung stattfindet, das „Nullwerden der Geschwindigkeit“ im vorliegenden Falle hingegen „Bewegungsumkehr“.

Wird beispielsweise ein Punkt auf einer schiefen Ebene mit einer Anfangsgeschwindigkeit c aufwärts bewegt (Fig. 8), so findet sich die Zeit t , in welcher das Nullwerden der Geschwindigkeit eintritt, aus der Gleichung

$$v = c - p \cdot t$$

für $v = 0$.

Es resultirt

$$c = p \cdot t$$

und

$$t = \frac{c}{p}.$$

Fig. 10 veranschaulicht die Wegcurve für gleichförmig geänderte Bewegung; die Ordinaten ändern sich bei ihr mit dem Quadrate der Zeit. Während die Wegcurve bei

gleichförmiger Bewegung des Punktes P durch die Gerade PT veranschaulicht wird und deshalb für die constante Geschwindigkeit

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

oder nach der graphischen Darstellung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

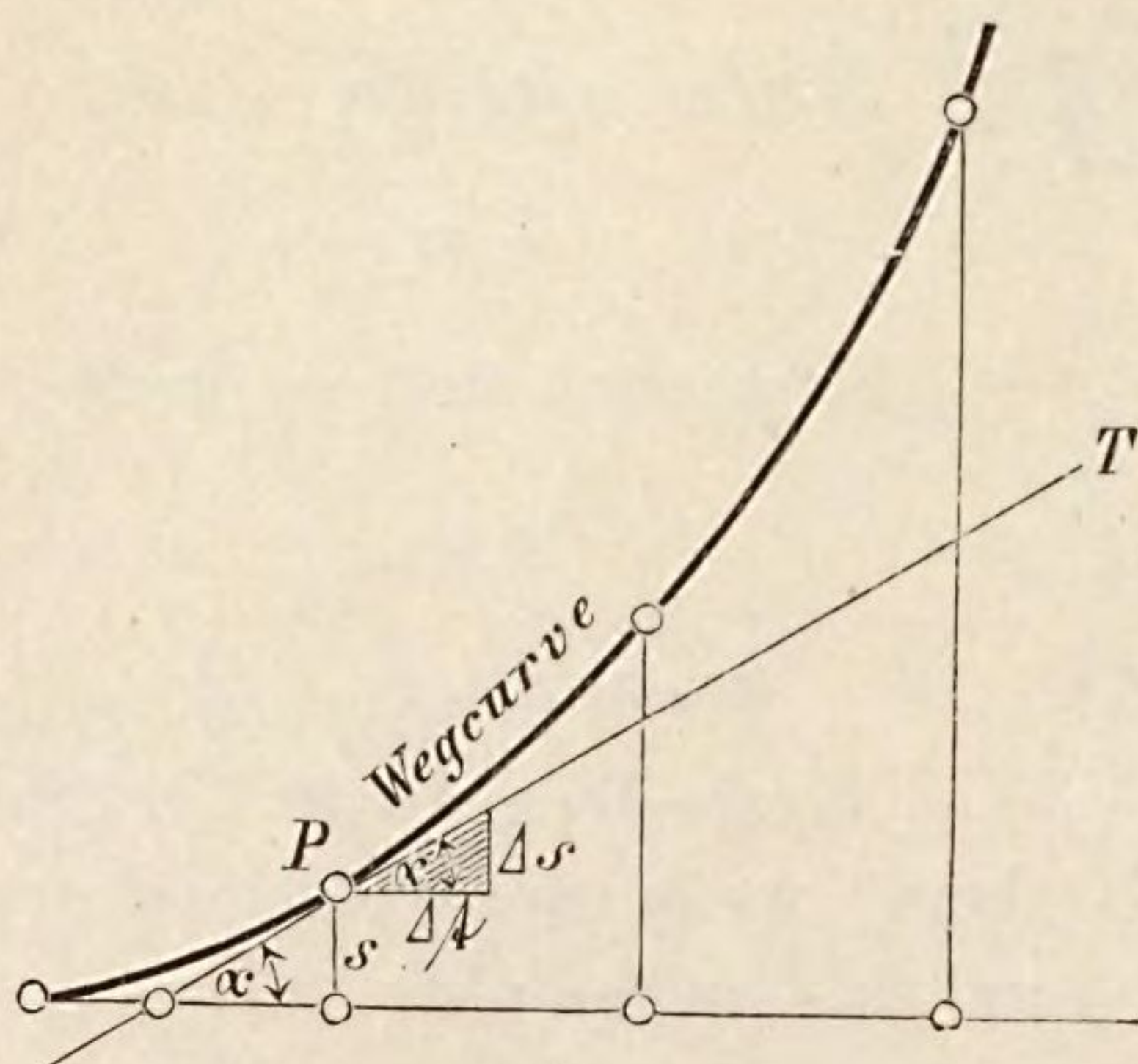


Fig. 10.

geschrieben werden kann, so gilt hier, da die Tan-

gente PT nur über einen unendlich kleinen Theil mit der Curve zusammenfällt, für die stetig veränderliche Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} \text{ und nach der graphischen Darstellung } \operatorname{tg} \alpha = \frac{ds}{dt}.$$

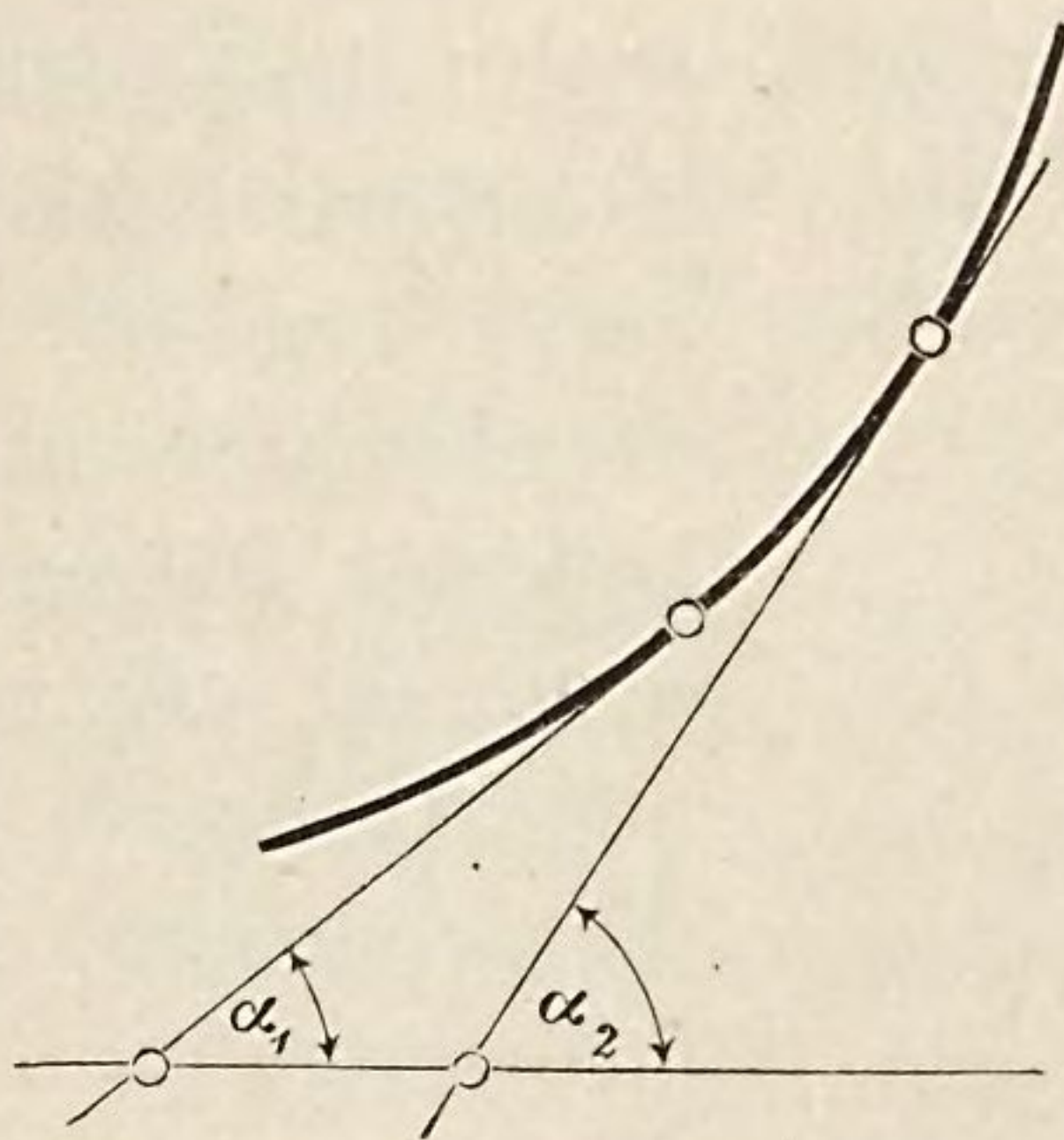


Fig. 11.

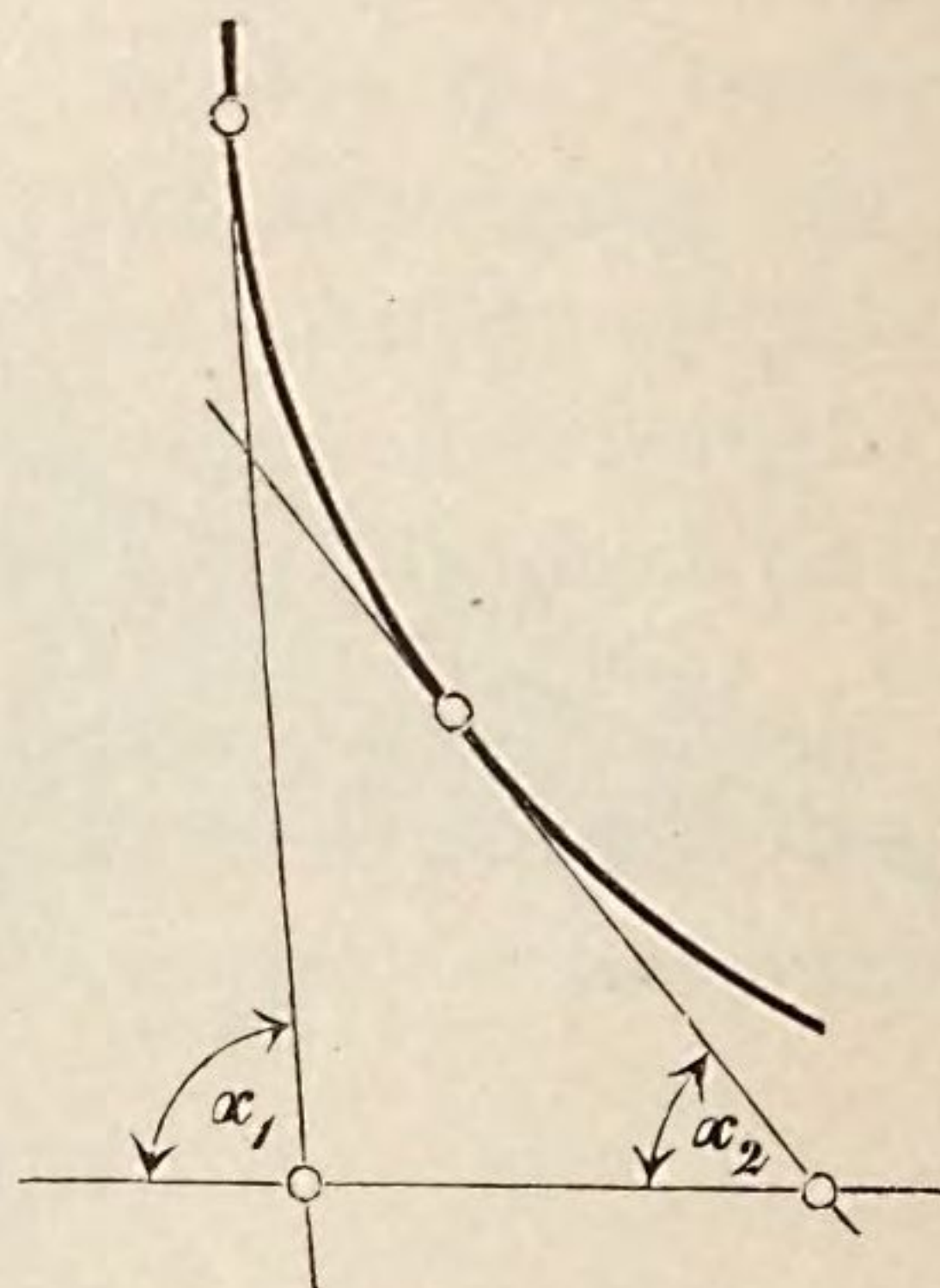


Fig. 12.

Die Geschwindigkeit v ist also dem Winkel α proportional.

Hieraus folgt, dass mit Zunahme von v , also bei gleichförmig beschleunigter Bewegung, α wächst, d. h. „die Curve steigt“ (Fig. 11), und dass bei abnehmender Geschwindigkeit, also bei gleichförmig verzögerter Bewegung, α abnimmt, d. h. „die Curve fällt“ (Fig. 12).

Mit dem Werthe

$$s = f(t) = c \cdot t \pm \frac{p \cdot t^2}{2}$$

ergiebt sich beispielsweise

$$v = \frac{ds}{dt} = c \pm p \cdot t.$$

Freier Fall eines Punktes.

Die Beschleunigung des freien Falles ist mit der Entfernung vom Erdmittelpunkte veränderlich, an der Erdoberfläche aber wenig verschieden. In Paris ist

$$p = g = 9,8088 \text{ Meter,}$$

und man setzt rund

$$g = 9,81 \text{ Meter.}$$

Für den freien Fall gilt daher

$$1) \quad v = c + g \cdot t.$$

$$2) \quad t = \frac{v - c}{g}.$$

$$3) \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t.$$

$$4) \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2g}.$$

$$5) \quad s = c \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Spezieller Fall. $c = 0$:

$$1) \quad v = g \cdot t.$$

$$2) \quad t = \frac{v}{g}.$$

$$3) \quad s = \frac{v \cdot t}{2}.$$

$$4) \quad s = \frac{v^2}{2g}.$$

$$5) \quad s = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Senkrechtcs Emporsteigen eines Punktes.

Beim senkrechten Emporsteigen ist die Bewegung gleichförmig verzögert, also die Beschleunigung g negativ und es folgt:

$$1) \quad v = c - g \cdot t.$$

$$2) \quad t = \frac{c - v}{g}.$$

$$3) \quad s = \frac{c + v}{2} \cdot t.$$

$$4) \quad s = \frac{c^2 + v^2}{2g}.$$

$$5) \quad s = c \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Spezieller Fall. $v = 0$:

$$1) \quad c = g \cdot t.$$

$$2) \quad t = \frac{c}{g}.$$

$$3) \quad s = \frac{c \cdot t}{2}.$$

$$4) \quad s = \frac{c^2}{2g}.$$

$$5) \quad s = c \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2},$$

worin t aus 2) gesetzt, sich

$$s = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} \text{ wie in 4) ergibt.}$$

Senkrechtcs Emporsteigen und Fallen eines Punktes.

Es entstehen die Fragen: Wie hoch steigt der Punkt, welche Zeit ist zum Steigen und Fallen bei gegebener Anfangsgeschwin-

digkeit erforderlich, und wie gross ist die Endgeschwindigkeit beim Eintreffen im Ausgangsort?

Es sei (Fig. 13)

H die Steig- resp. Fallhöhe,
 c die Anfangsgeschwindigkeit } beim Steigen,
 o die Endgeschwindigkeit }
 o die Anfangsgeschwindigkeit } beim Fallen,
 v die Endgeschwindigkeit }
 t_1 die Zeit zum Steigen,
 t_2 die Zeit zum Fallen und
 $T = t_1 + t_2$ die Zeit zum Steigen und Fallen.

Für's Steigen gilt

$$H = \frac{c^2}{2g},$$

für's Fallen hingegen

$$H = \frac{v^2}{2g}$$

und durch Gleichsetzung der beiden Werthe für H

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{oder } v = c,$$

d. h. die Geschwindigkeit v beim Eintreffen im Ausgangspunkte ist gleich der Ausgangsgeschwindigkeit c .

Ferner ist

$$t_1 = \frac{c}{g}$$

$$\text{und } t_2 = \frac{v}{g},$$

also

$$T = t_1 + t_2 = \frac{c + v}{g}$$

oder, da

$$c = v \text{ ist,}$$

$$T = \frac{2c}{g}.$$

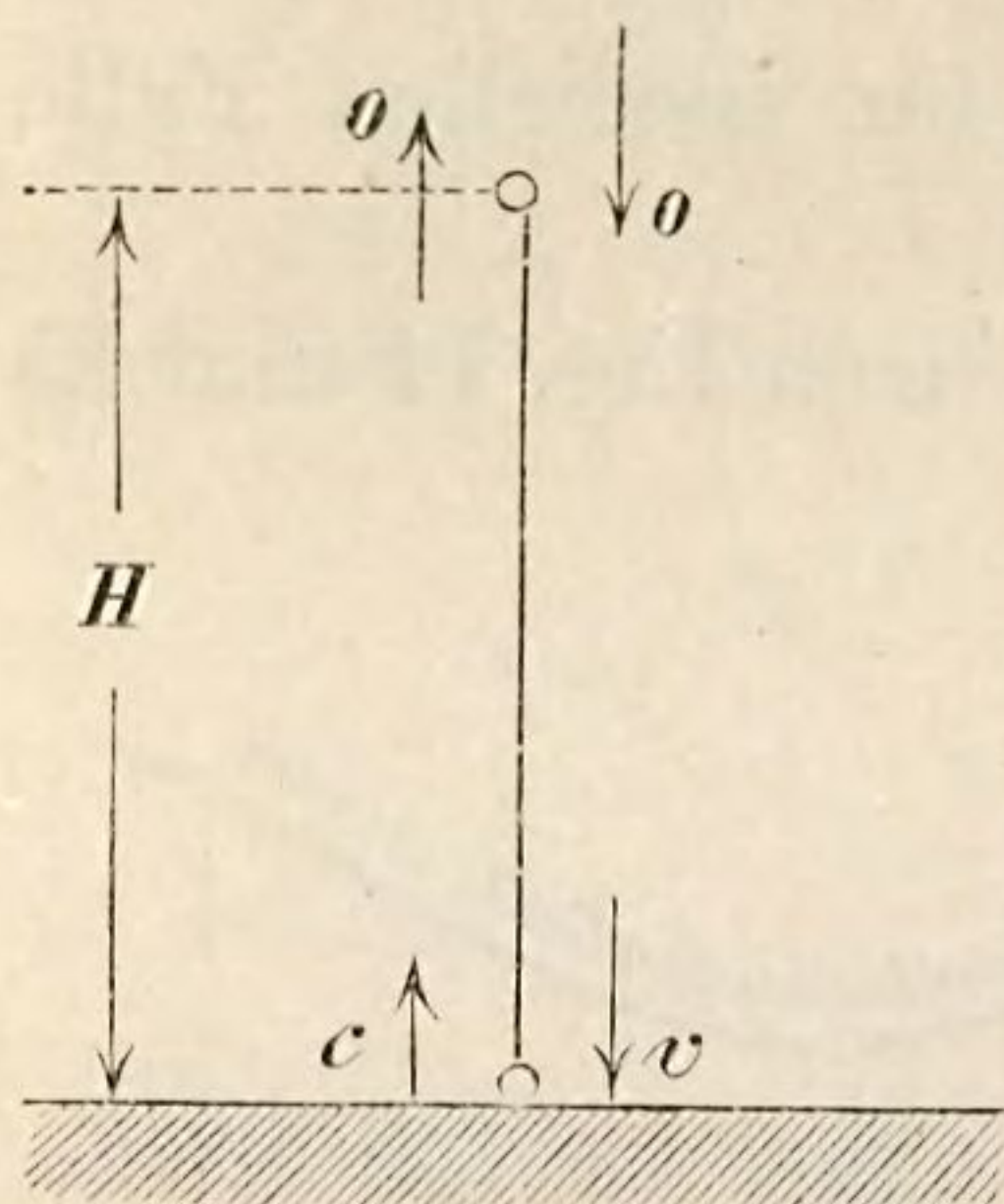


Fig. 13.

b) Ungleichförmig geänderte geradlinige Bewegung eines mathematischen Punktes.

Bei ungleichförmig geänderter Bewegung ist die Geschwindigkeitsänderung beliebig veränderlich und es giebt daher je nach den unendlich vielen verschiedenen Aenderungen auch unendlich viele verschiedene Geschwindigkeits- und Wegcurven.

Allgemein ist nun

$$s = F(t) \text{ und } v = f(t),$$

wodurch sowohl die Beziehungen zwischen s und t , und v und t , als auch die Unterlagen zur Verzeichnung der Geschwindigkeits- und der Wegcurve im speciellen Falle gegeben sind.

Die Letzteren lassen sich allgemein nach Fig. 14 und 15 darstellen.

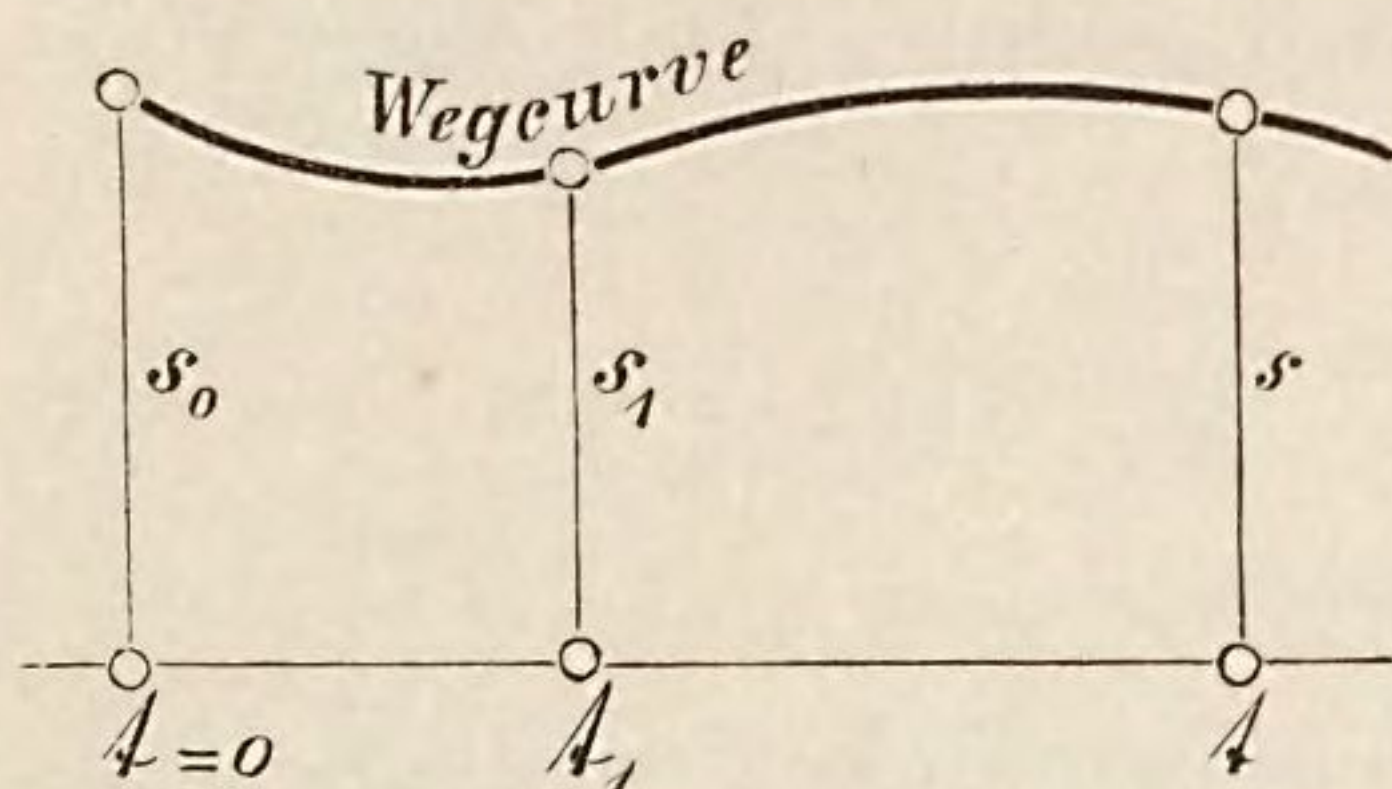


Fig. 14.

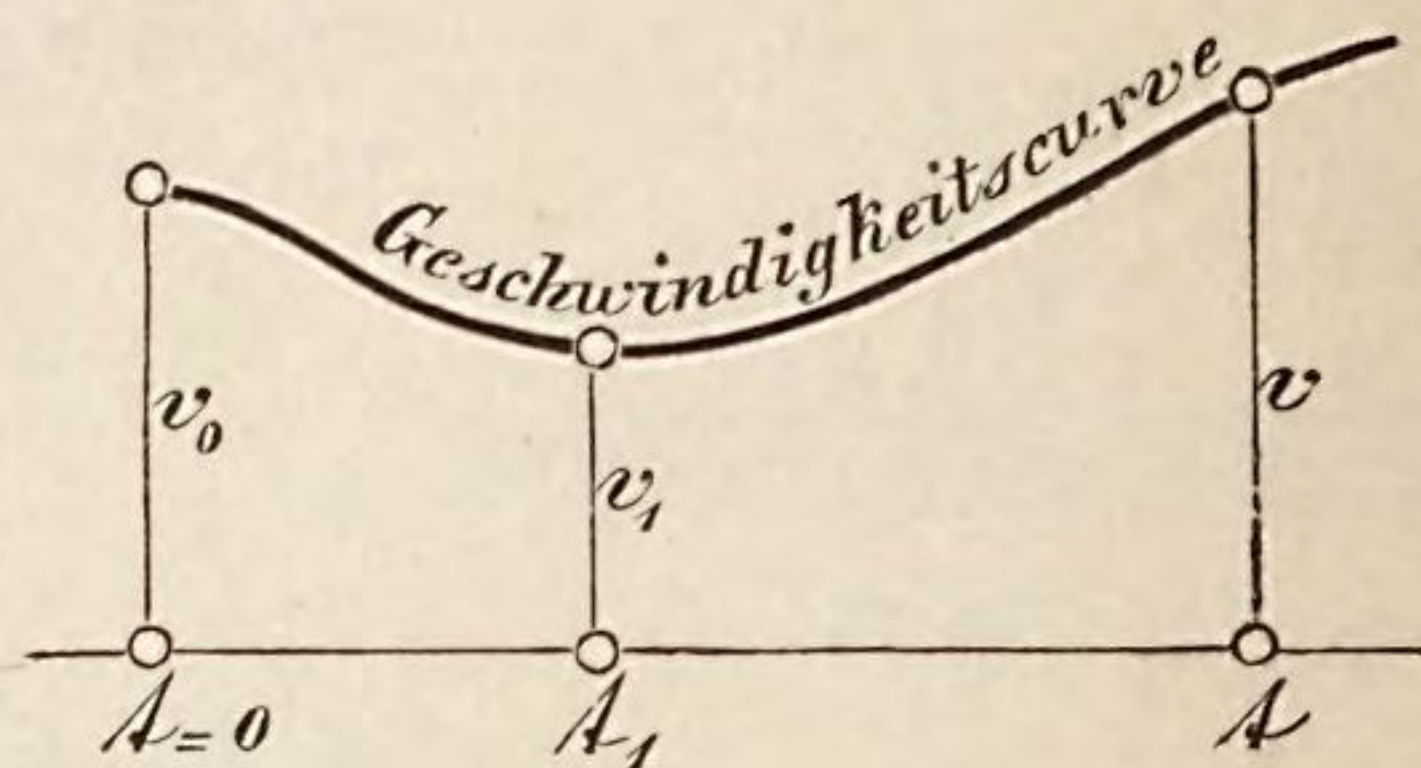


Fig. 15.

Schneidet die Geschwindigkeitscurve die Abscissenachse, wie in Fig. 16, so wird in dieser Stelle die Geschwindigkeit gleich Null, und setzt sich

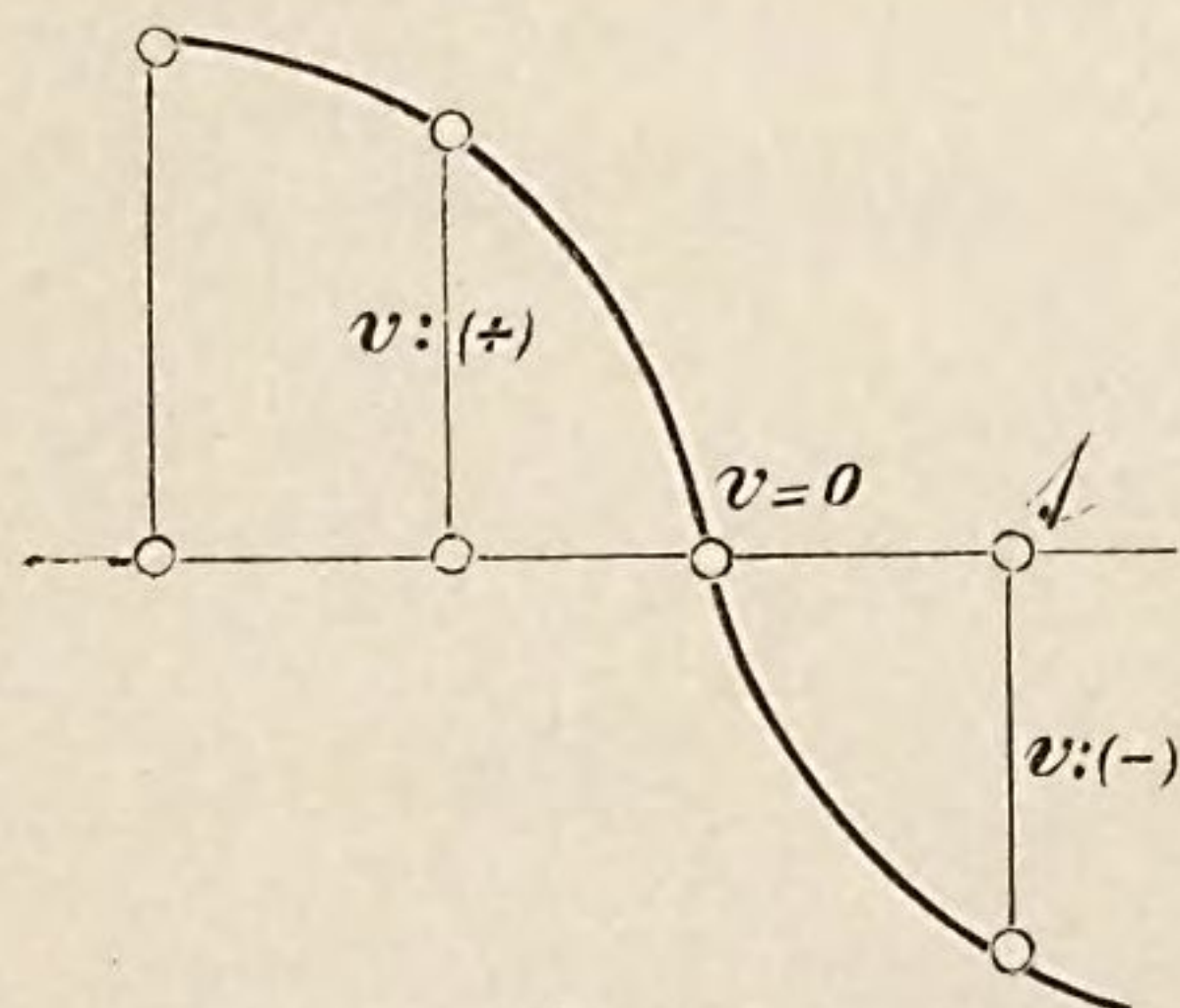


Fig. 16.

hierauf die Curve unter der Abscissenachse weiter fort, so sind die Geschwindigkeits-Ordinaten, also auch die Geschwindigkeiten negativ; in dem Zeitpunkte, in welchem $v = 0$ wird, findet daher Bewegungsumkehr des Punktes statt.

Allgemeine Ableitung der Geschwindigkeitsgleichung mit Hilfe der Wegcurve.

Für gleichförmige Bewegung war

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ und } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

constant; für gleichförmig geänderte Bewegung sowohl, als auch für ungleichförmig geänderte ist aber allgemein, da die Tangente mit der Wegcurve nur über ein unendlich kleines Stück zusammenfällt (Fig. 17),

$$v = \frac{ds}{dt}$$

oder, da

$$ds = df(t),$$

so ist auch

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t).$$

Im Uebrigen ist nun auch ganz allgemein

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ds}{dt},$$

also die Geschwindigkeit v dem Winkel α proportional oder es gilt, dass mit wachsendem α die Geschwindigkeit zu- und mit abnehmendem α dieselbe abnimmt (Fig. 18).

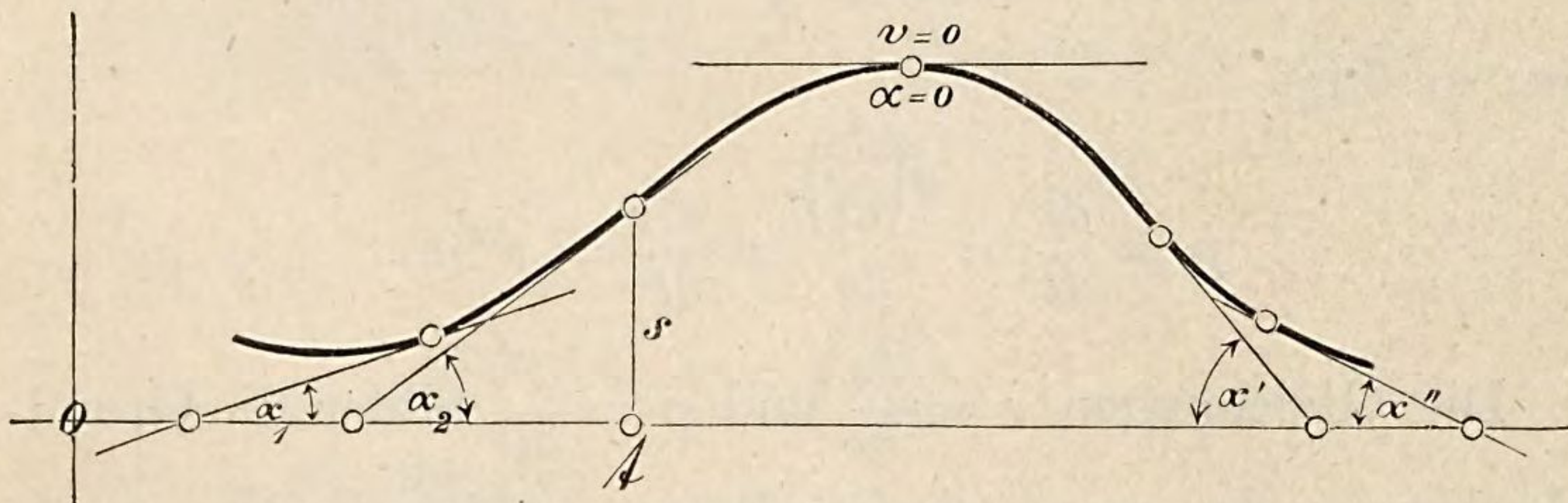


Fig. 18.

aus ihnen hervor, dass die „veränderliche Geschwindigkeit v “ den **ersten** Differentialquotienten des Weges s nach der Zeit t und die „veränderliche Beschleunigung“ den **zweiten** Differentialquotienten des Weges s nach der Zeit t bilden.

Denkt man sich den Weg beispielsweise ausgedrückt durch

$$s = f(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

dann folgt

$$v = f'(t) = \frac{ds}{dt} = B + 2Ct + 3Dt^2$$

und

$$p = f''(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = 2C + 6Dt.$$

Aus den Gleichungen

$$1) \ v = \frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad 2) \ p = \frac{dv}{dt}$$

ergeben sich noch folgende:

Aus 1) folgt

$$ds = v \cdot dt$$

oder der Weg

$$3) \ s = \int v \cdot dt,$$

welche Gleichung sich auch mit Hilfe der Geschwindigkeitscurve ableiten lässt, wie Fig. 20 veranschaulicht; die Fläche $ABCD$ repräsentirt geometrisch den Weg s .

Aus 1) folgt ferner

$$dt = \frac{ds}{v}$$

oder die Zeit

$$4) \ t = \int \frac{ds}{v}.$$

Aus 2) ergibt sich

$$dv = p \cdot dt$$

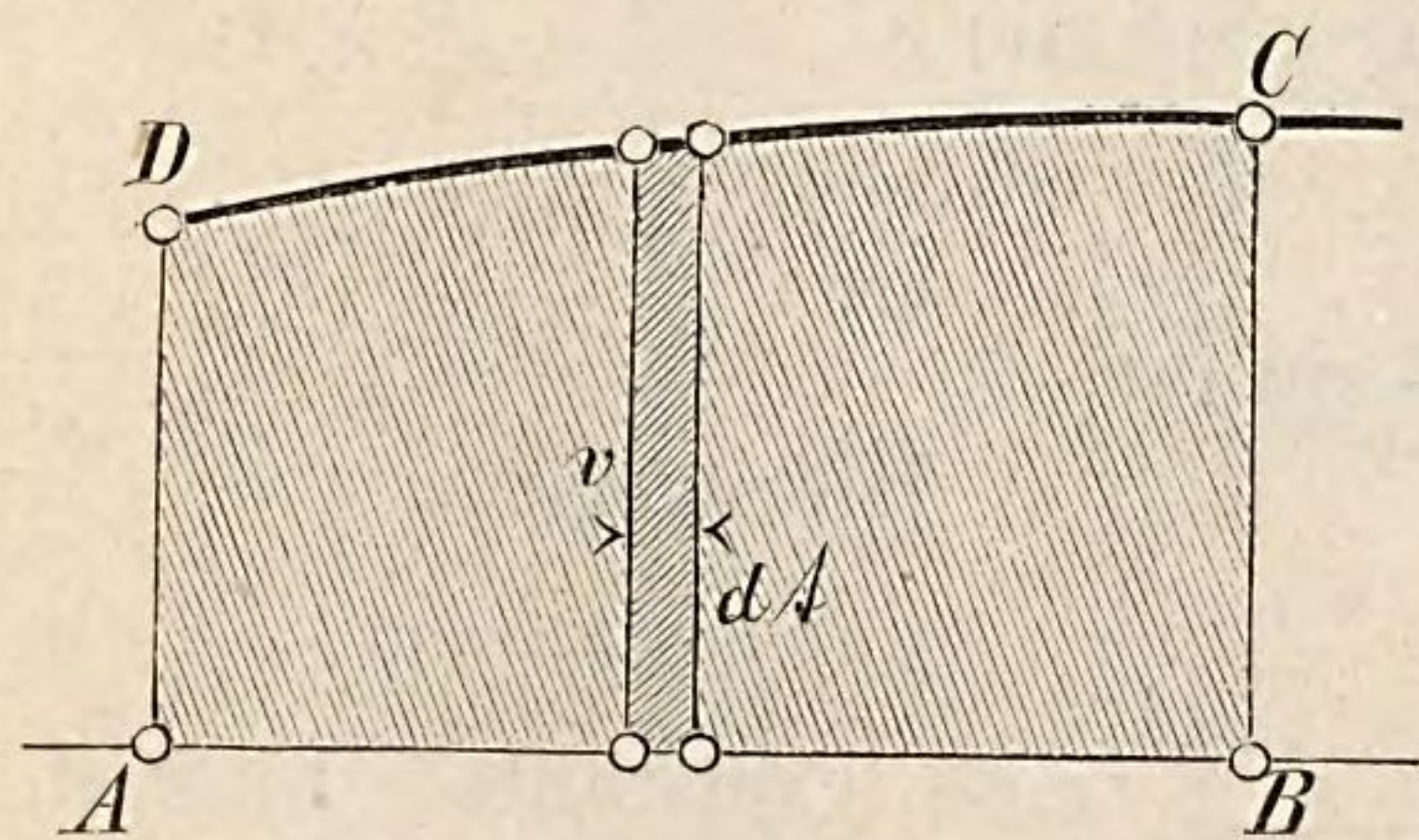


Fig. 20.

oder die Geschwindigkeit

$$5) \quad v = \int p \cdot dt,$$

und

$$dt = \frac{dv}{p}$$

liefert die Zeit

$$6) \quad t = \int \frac{dv}{p}.$$

Schliesslich ergibt sich noch aus den Gleichungen 4) und 6)

$$\frac{ds}{v} = \frac{dv}{p},$$

$$ds = \frac{v \cdot dv}{p},$$

der Weg

$$7) \quad s = \int \frac{v \cdot dv}{p}.$$

Gegeben mögen sein die später zu entwickelnden Gesetze der geradlinig schwingenden Bewegung durch den Weg

$$s = r \cdot \cos \omega t,$$

worin r die Schwingungsweite, ω eine Constante und t die Bewegungsdauer ist.

Mit dem Werth für s folgt die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r \cdot \cos \omega t)}{dt}$$

oder

$$v = - r \cdot \omega \cdot \sin \omega t.$$

Hierin ist

$$r \cdot \omega = c$$

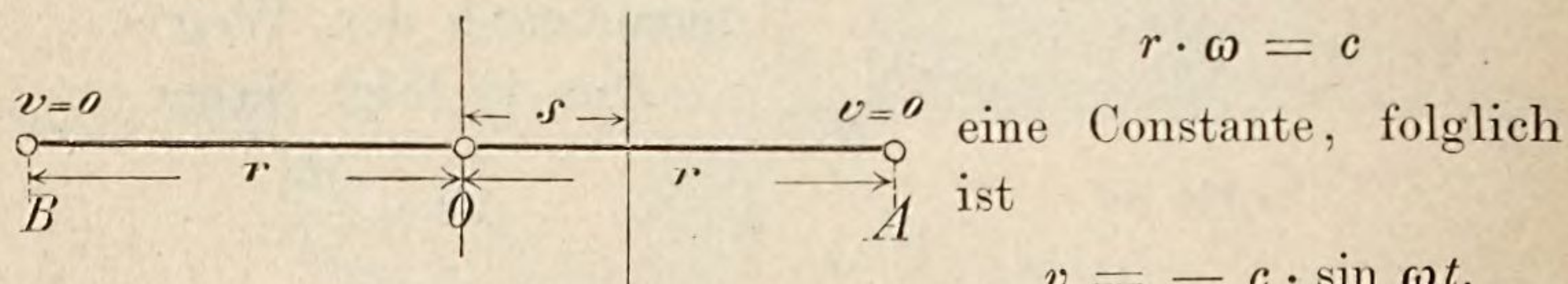


Fig. 21.

$$v = - c \cdot \sin \omega t.$$

Die Gleichungen für s und v dienen zur Verzeichnung der Weg- und der Geschwindigkeitscurve.

Nach Fig. 21 ist O der Ausgangspunkt der Bewegung und

der Weg s stets von diesem Punkte aus zu messen, und nach obigen Gleichungen gilt:

Bogen ωt	Zeit t	Geschwindigkeit v	Weg s
$\omega t = 0$	$t = 0$	$v = 0$	$s = +r$
$\omega t = \frac{\pi}{2}$	$t = \frac{\pi}{2\omega}$	$v = -c$	$s = 0$
$\omega t = \pi$	$t = \frac{\pi}{\omega}$	$v = 0$	$s = -r$
$\omega t = \frac{3}{2}\pi$	$t = \frac{3\pi}{2\omega}$	$v = +c$	$s = 0$
$\omega t = 2\pi$	$t = \frac{2\pi}{\omega}$	$v = 0$	$s = +r$

Somit ergeben sich nachstehende graphischen Darstellungen:

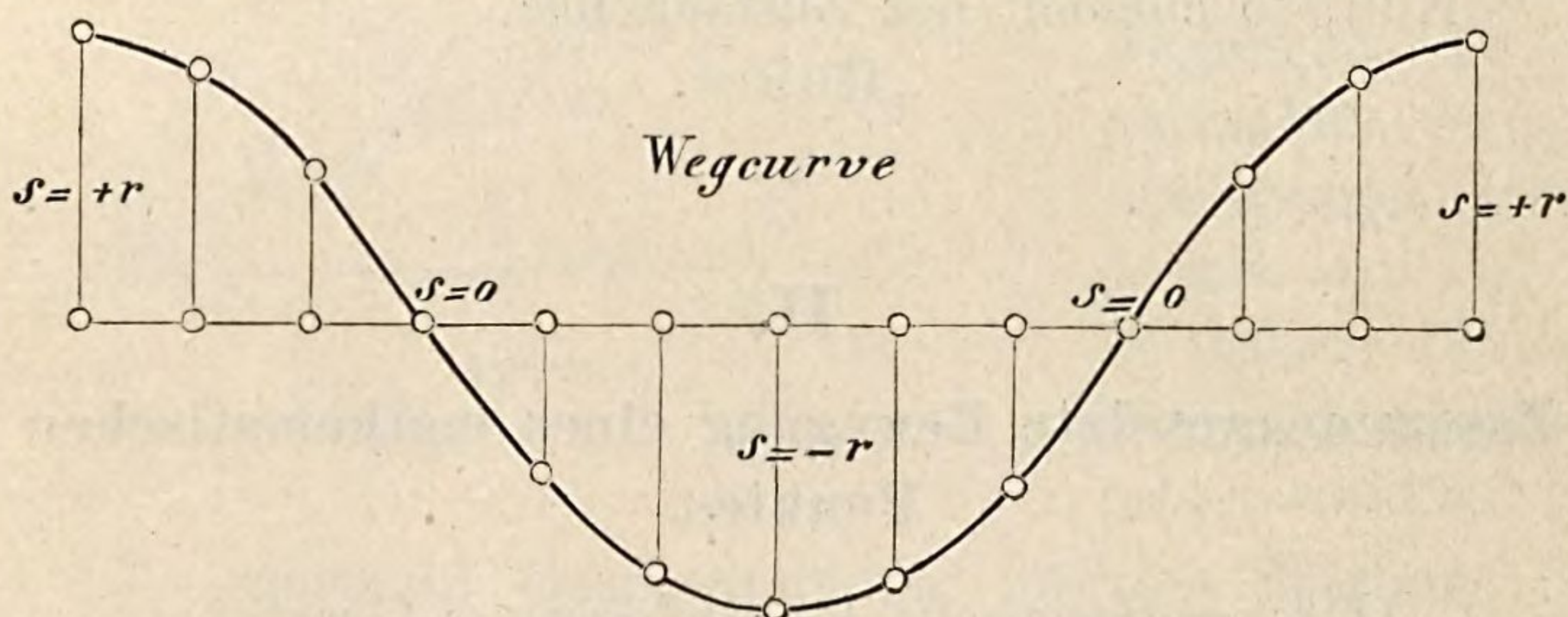


Fig. 22.

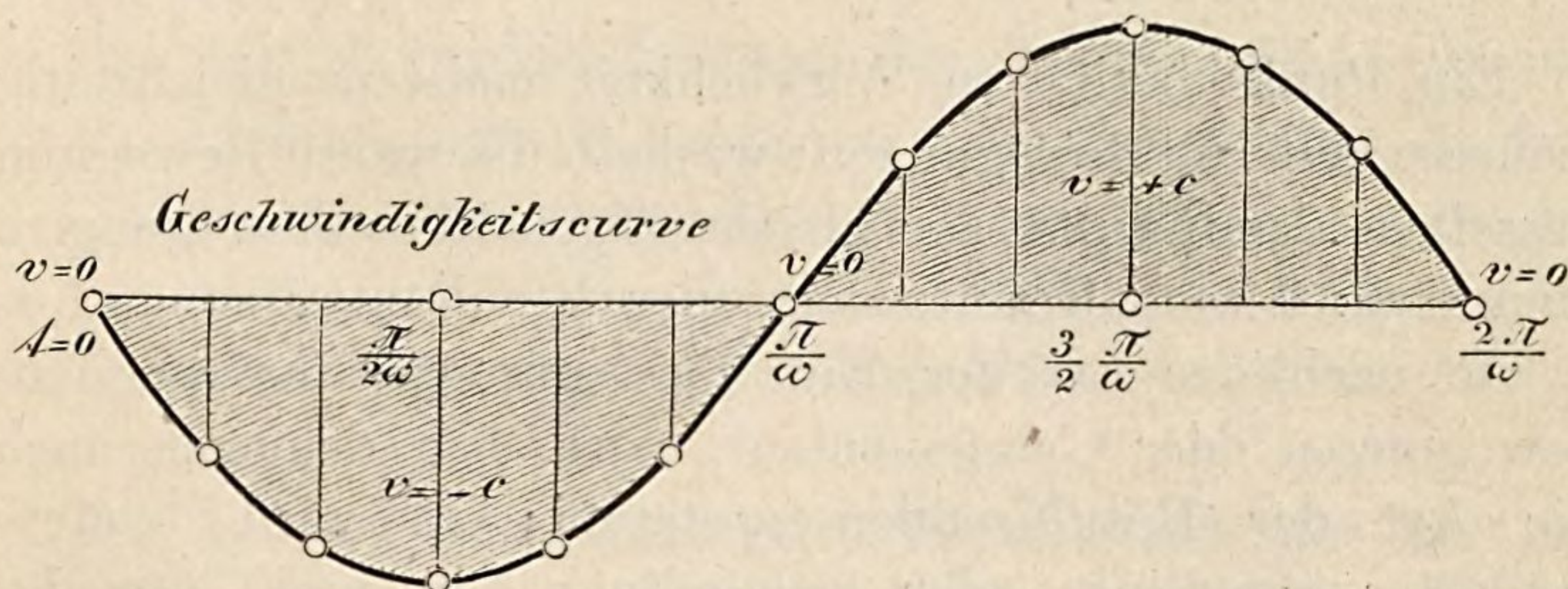


Fig. 23.

Ueberblick über die Resultate der einfachen Bewegung.

- 1) Ist die Beschleunigung eine mit der Zeit durchaus Veränderliche, so wird die Geschwindigkeit entsprechend geändert, und die Bewegung wird eine „ungleichförmig geänderte“.
- 2) Ist die Beschleunigung eine constante Grösse, so ändert sich die Geschwindigkeit stetig, und es entsteht „gleichförmig geänderte Bewegung“, das ist
„gleichförmig beschleunigte“ oder „gleichförmig verzögerte“ Bewegung.
- 3) Wird die Beschleunigung gleich Null, so ändert sich die Geschwindigkeit gar nicht, sie bleibt constant, und die Bewegung ist
„gleichförmig“.
- 4) Erhält im letzten Falle die Geschwindigkeit den Werth Null, so entsteht der Zustand der
„Ruhe“.

II.

Zusammengesetzte Bewegung eines mathematischen Punktes.

(Das geometrische Parallelogramm-Gesetz.)

Ein Punkt besitzt in Wirklichkeit meistens gleichzeitig mehrere einfache Bewegungen; weshalb die wahre Bewegung desselben das Resultat der gleichzeitigen Einzelbewegungen, man sagt: deren „Resultirende oder Resultante“ ist.

Je nach der Art der Einzelbewegungen, der „Seitenbewegungen oder Componenten“, wird sich demnach auch die Art der Resultirenden gestalten; es wird letztere entweder geradlinig oder krummlinig sein und entweder

gleichförmig oder ungleichförmig vom Punkte durchlaufen werden.

1.

Geradlinig gleichförmige resultirende Bewegung.

(Parallelogramm und Parallelepipedon der Bewegungen und der Geschwindigkeiten.)

a) Ein mathematischer Punkt P besitze gleichzeitig zwei geradlinig gleichförmige Bewegungen, eine in der Richtung einer X -Achse (Fig. 24) und eine andere in der Richtung einer unter dem Winkel α zur X -Achse geneigten Y -Achse.

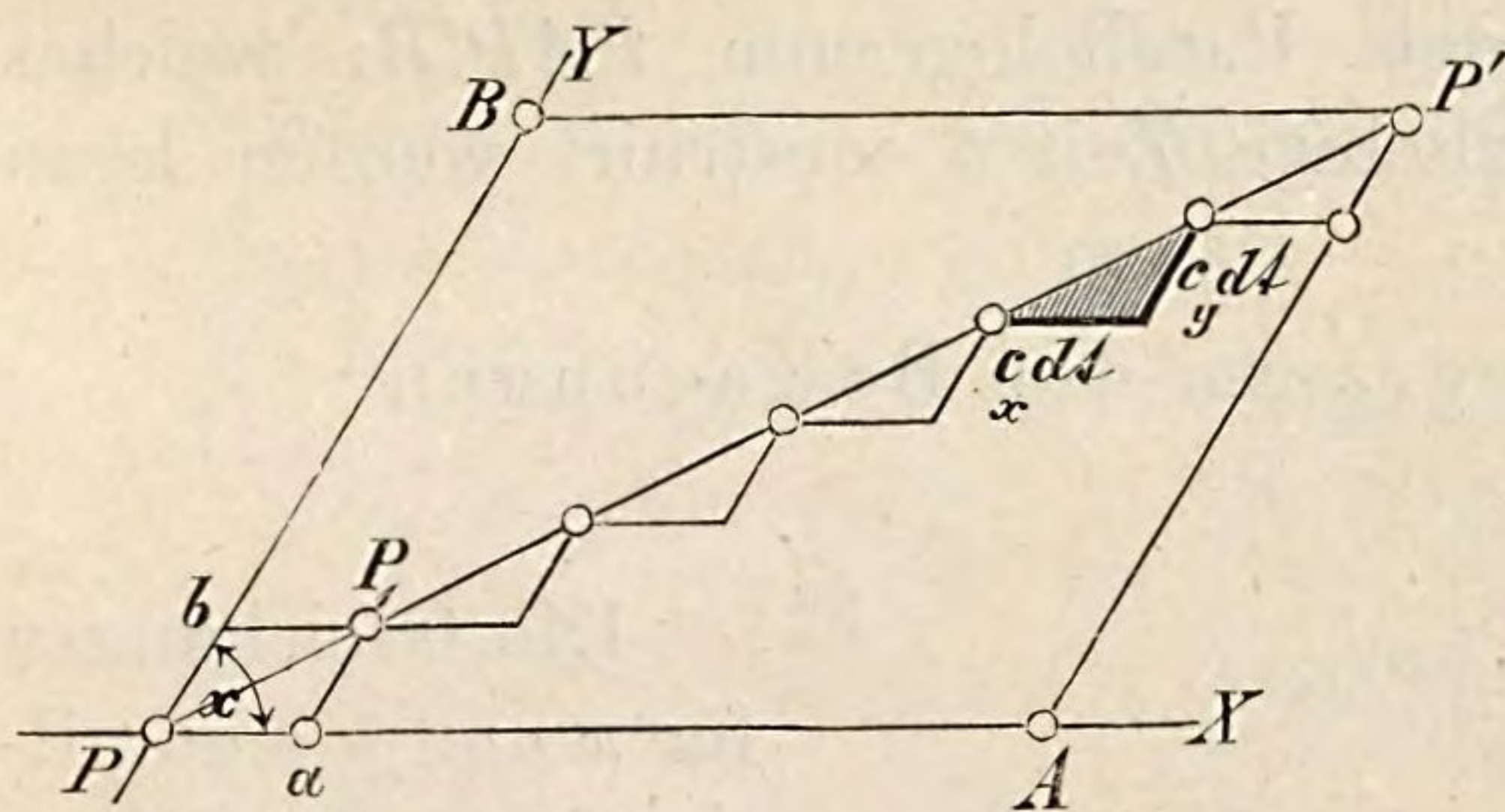


Fig. 24.

Beide Achsen mögen als absolut festliegend angesehen und die in ihnen gegebenen Bewegungen, die sogenannten Seitenbewegungen, sollen — wie man sagt — zu einer Resultirenden „zusammengesetzt“ werden.

Die constante Geschwindigkeit in der Richtung der X -Achse sei c_x , die in der Y -Achse c_y , dann wird der Punkt in der Zeit dt in der Richtung der X -Achse um $c_x \cdot dt$ und in der Richtung der Y -Achse um $c_y \cdot dt$ verschoben, so dass derselbe nach Verlauf der Zeit dt in P_1 ankommt und sich während dieser Zeit über die unendlich kleine Strecke, die Diagonale PP_1 des unendlich kleinen Parallelogramms PaP_1b , bewegt.

Da nun während eines jeden Differentiales der Zeit ein Gleiches geschieht, so wird der Punkt P nach Verlauf der

Zeit t in P' ankommen und während dieser Zeit einen Weg PP' zurücklegen, welcher seiner Form nach genauer zu bestimmen ist.

Es ist die Seitenbewegung in der Richtung der X -Achse

$$x = c_x \cdot t$$

und diejenige in der Richtung der Y -Achse

$$y = c_y \cdot t,$$

woraus durch Division

$$\frac{x}{y} = \frac{c_x}{c_y},$$

die Gleichung einer Geraden und die Form der resultirenden Bewegung $PP' = s$ folgt. Diese Gerade bildet die Diagonale PP' in dem Parallelogramm $PAP'B$, welches letztere für jede beliebige Zeit t construiert werden kann und das

„Parallelogramm der Bewegungen“

genannt wird.

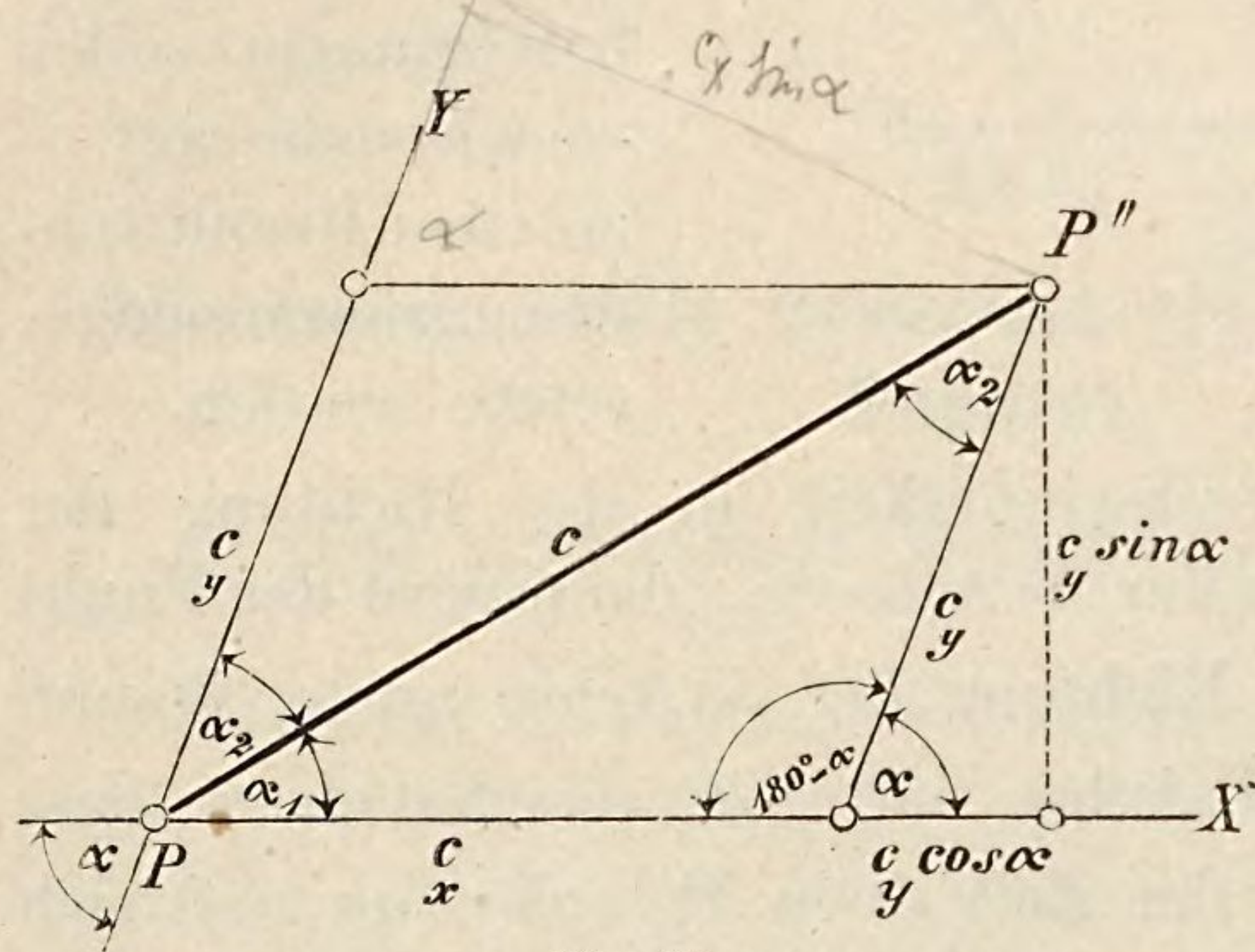


Fig. 25.

Die Gleichungen für x und y sind gültig für jede Zeit t , also auch für $t = 1$ Secunde, wofür dann gilt

$$x = c_x,$$

$$y = c_y$$

und
$$\frac{x}{y} = \frac{c_x}{c_y}.$$

Das Parallelogramm der Bewegungen liefert daher eine Diagonale $PP'' = c$ als Resultirende in einer Secunde, welche (Fig. 25) der Grösse nach durch

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + 2c_x \cdot c_y \cdot \cos \alpha}$$

und der Richtung nach durch

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_y \cdot \sin \alpha}{c}$$

oder

$$\sin \alpha_2 = \frac{c_x \cdot \sin \alpha}{c}$$

oder auch durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c_y \cdot \sin \alpha}{c_x + c_y \cdot \cos \alpha}$$

zu bestimmen ist.

Für die Bewegungsart des Punktes auf der Resultirenden s gilt (Fig. 26)

$$\frac{s}{c} = \frac{x}{c_x},$$

$$s = \frac{c}{c_x} \cdot x = \frac{c}{c_x} \cdot c_x \cdot t$$

oder

$$s = c \cdot t,$$

woraus sich ergibt, dass c die constante Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung und dass die letztere eine gleichförmige ist.

Das Parallelogramm, welches zur Construction der Geschwindigkeit c dient, nennt man das

„Parallelogramm der Geschwindigkeiten“,

und, da die Richtung der Bewegung mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfällt, so geben die Gleichungen für α_1 und α_2 zugleich auch die Richtung der geradlinigen resultirenden Bewegung an.

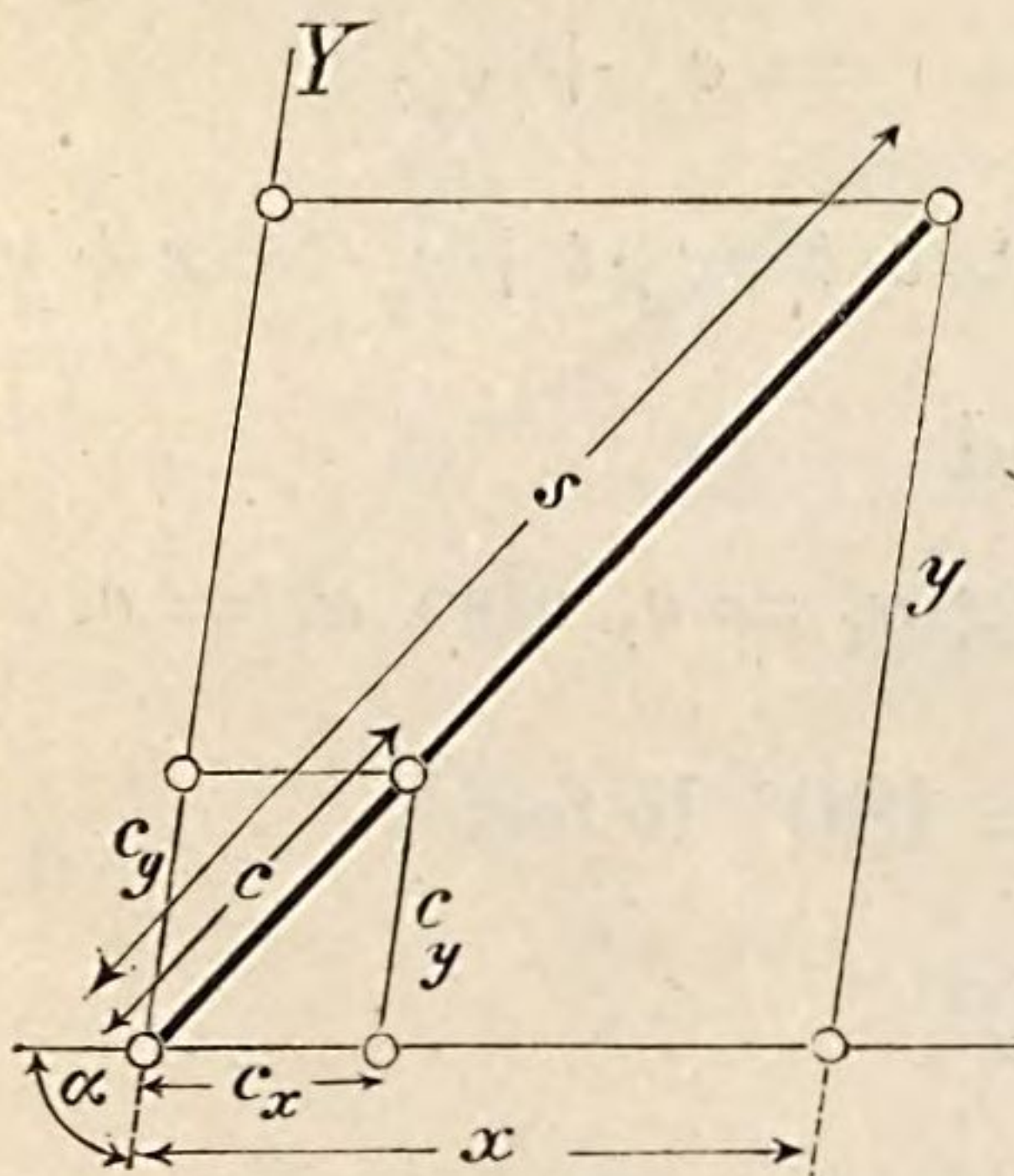


Fig. 26.

Erster specieller Fall: $\alpha = 90^\circ$ giebt (Fig. 27)

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2},$$

$$s = c \cdot t = \sqrt{(c_x \cdot t)^2 + (c_y \cdot t)^2}$$

oder

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{c_y}{c_x}.$$

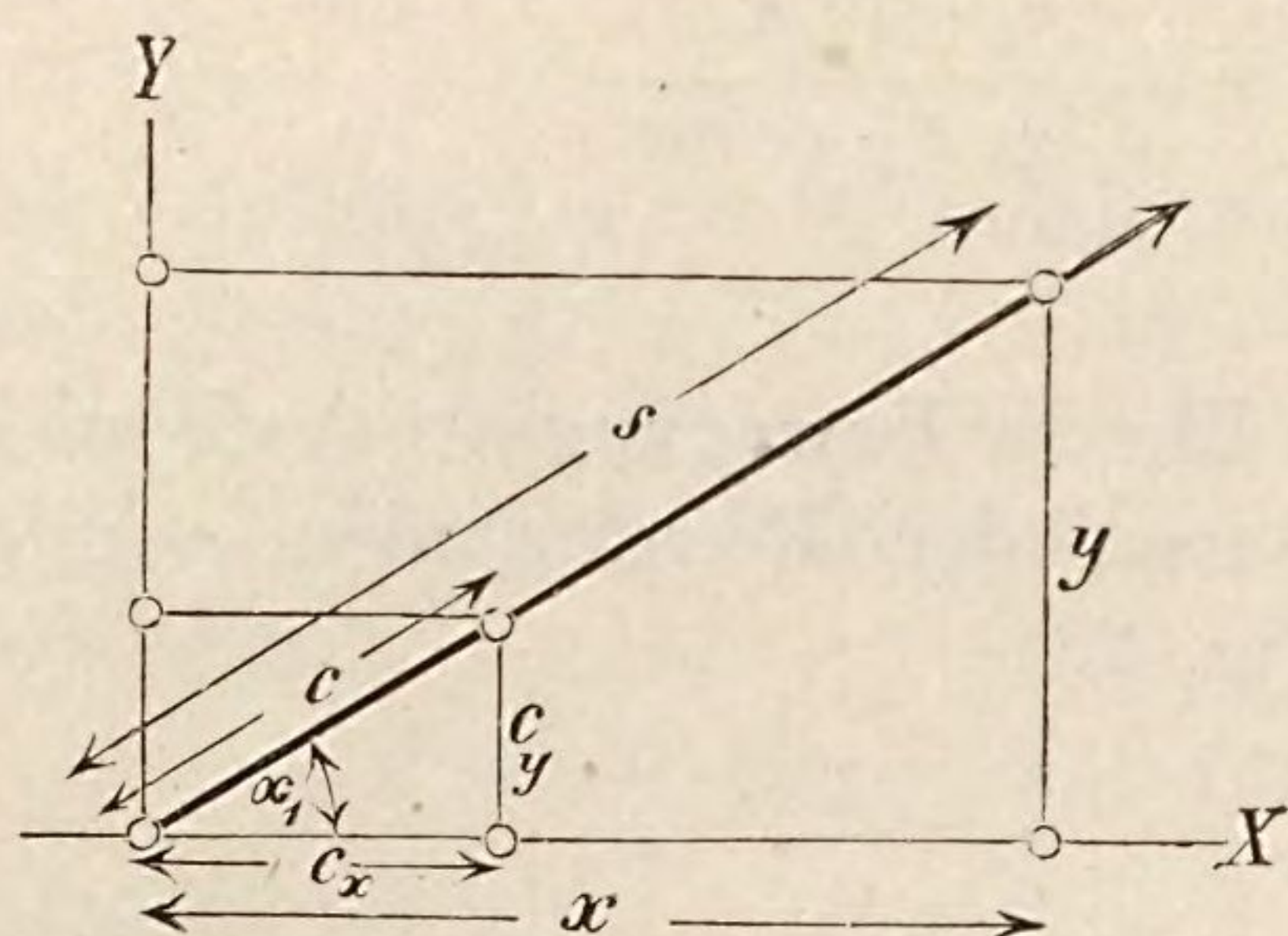


Fig. 27.

Zweiter specieller Fall: $\alpha = 0$ giebt

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(c_x + c_y)^2} \\ &= c_x + c_y, \end{aligned}$$

$$s = c \cdot t = c_x \cdot t + c_y \cdot t = x + y$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0, \text{ also } \alpha_1 = 0.$$

Dritter specieller Fall: $\alpha = 180^\circ$ liefert

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(c_x - c_y)^2} \\ &= c_x - c_y, \end{aligned}$$

also

$$s = c \cdot t = c_x \cdot t - c_y \cdot t = x - y$$

und ferner

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 0, \text{ also } \alpha_1 = 0.$$

Ist hierbei $c_x = c_y$, so ist

$$c = 0$$

und

$$s = 0,$$

also Ruhezustand.

b) Ein mathematischer Punkt besitze in drei unter beliebigen Winkeln sich schneidenden geraden Achsen X, Y, Z gleichzeitig gleichförmige Bewegungen

$$x = c_x \cdot t,$$

$$y = c_y \cdot t,$$

$$z = c_z \cdot t,$$

mit welchen die resultierende Geschwindigkeit c und der resultierende Weg s nach t Secunden bestimmt werden sollen.

Die Grössen c und s werden (Fig. 28) durch wiederholte Anwendung des Parallelogramms der Geschwindig-

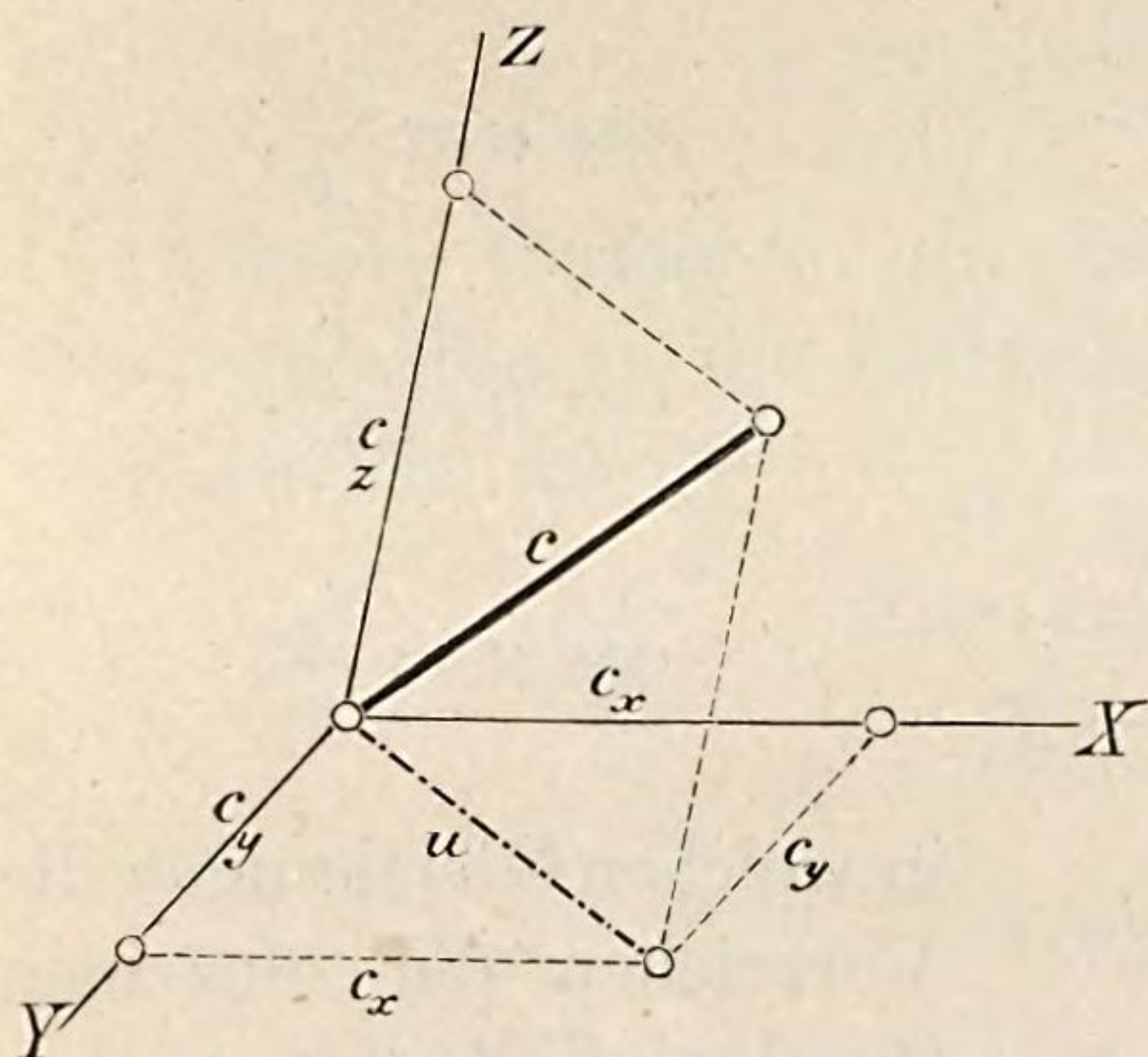


Fig. 28.

keiten resp. der Bewegungen gefunden. Man bildet beispielsweise in der XY -Ebene aus c_x und c_y die Resultierende u und hierauf aus u und c_z , also aus c_x , c_y und c_z , die Resultierende c . Beginnt man hierauf die Lösung in der XZ - und dann in der YZ -Ebene, so entsteht durch Construction das sogenannte

„Parallelepipedon der Geschwindigkeiten“
und für t Secunden, also zur Bestimmung des Weges s ,
„das Parallelepipedon der Bewegungen“,
in welchen c und s durch die Diagonalen dargestellt werden.

Spezieller Fall: Die Achsen X, Y, Z mögen sich unter 90° schneiden (Fig. 29), dann folgt

$$u^2 = c_x^2 + c_y^2,$$

$$c = \sqrt{u^2 + c_z^2}$$

oder

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$$

als constante resultirende Geschwindigkeit, und

$$s = c \cdot t$$

ist der resultirende gleichförmig geradlinige Weg.

Heissen im vorliegenden Fall die Richtungswinkel der Resultirenden zu den Achsen X , Y , Z : α , β , γ , dann gilt zur Bestimmung der Richtung der Geschwindigkeit, also auch der Richtung der Bewegung

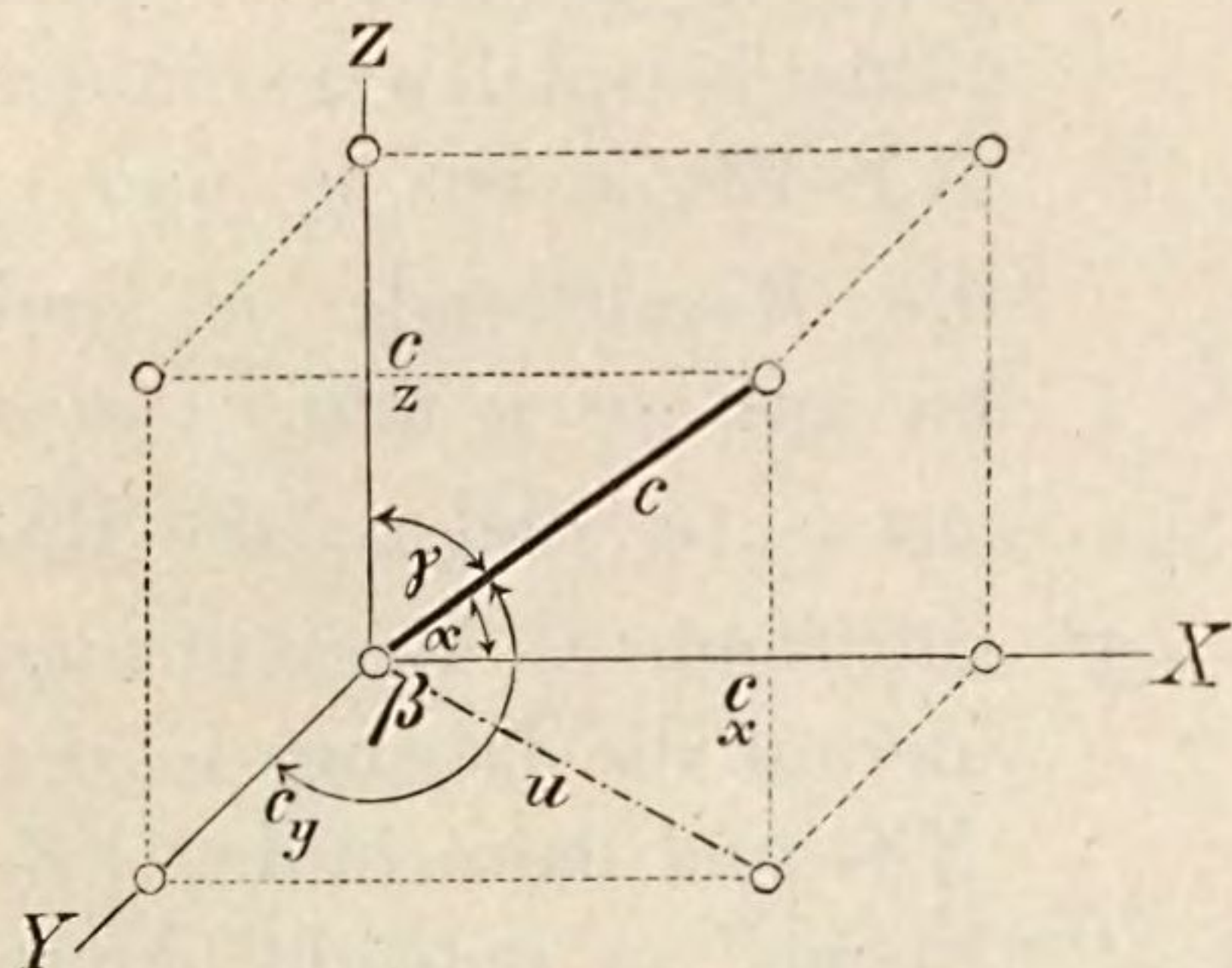


Fig. 29.

$$\cos \alpha = \frac{c_x}{c},$$

$$\cos \beta = \frac{c_y}{c},$$

$$\cos \gamma = \frac{c_z}{c},$$

in welchen Gleichungen die Vorzeichen der einzelnen Geschwindigkeiten zu berücksichtigen sind.

c) Gegeben seien nunmehr eine einzige geradlinig gleichförmige Bewegung s resp. deren Geschwindigkeit c und zwei durch den Anfangspunkt der Bewegung laufende unter den Winkeln α_1 und α_2 zu s in derselben Ebene mit der Bewegung liegende Achsen X und Y , und es soll die Grösse der Seitenbewegungen resp. deren Geschwindigkeiten in jenen Achsen angegeben werden. Man sagt: die gegebene Bewegung s und die Geschwindigkeit c sollen in die Achsen X und Y „zerlegt“ werden.

Nach Fig. 25, also nach dem Parallelogrammgesetz, gilt

$$c_x = \frac{c \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha},$$

$$c_y = \frac{c \cdot \sin \alpha_1}{\sin \alpha}$$

und

$$x = c_x \cdot t,$$

$$y = c_y \cdot t.$$

Spezieller Fall: $\alpha = 90^\circ$, Fig. 27,

$$c_x = c \cdot \sin \alpha_2,$$

$$c_y = c \cdot \sin \alpha_1.$$

Dasselbe Verfahren gilt für die Zerlegung einer Geschwindigkeit c in die Richtungen von drei Achsen.

Nach Fig. 29 ist

$$c_x = c \cdot \cos \alpha,$$

$$c_y = c \cdot \cos \beta,$$

$$c_z = c \cdot \cos \gamma,$$

$$x = c_x \cdot t,$$

$$y = c_y \cdot t$$

$$\text{und } z = c_z \cdot t.$$

d) Mit Hilfe der Resultate aus den drei Fällen a , b , c lassen sich nunmehr auch beliebig viele Bewegungen resp. Geschwindigkeiten eines Punktes zerlegen oder zu einer Resultirenden vereinigen.

Gegeben mögen sein beliebig viele Geschwindigkeiten eines mathematischen Punktes nach ihrer Grösse und nach ihren Richtungen zu den drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen X , Y , Z durch

$$\begin{aligned}
&v_1, v_2 \cdot \cdot \cdot \cdot v_n, \\
&\alpha_1, \alpha_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \alpha_n, \\
&\beta_1, \beta_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \beta_n \\
&\text{und } \gamma_1, \gamma_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \gamma_n.
\end{aligned}$$

Die zu suchende Resultirende heisse v , und ihre Richtung zu den drei Achsen werde durch die Winkel α, β, γ bestimmt.

Das Verfahren ist hier folgendes:

Man zerlegt die Einzelgeschwindigkeiten der Reihe nach in die drei Achsenrichtungen X, Y, Z , bildet hierauf durch algebraische Summierung die resultierenden Achsengeschwindigkeiten

$$v_x, v_y, v_z$$

und setzt diese drei rechtwinkelig aufeinander stehenden Geschwindigkeiten schliesslich durch das Parallelepipedon zu einer Resultirenden v zusammen.

Hiernach ergibt sich folgendes Schema:

X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
$v_1 \cdot \cos \alpha_1$	$v_1 \cdot \cos \beta_1$	$v_1 \cdot \cos \gamma_1$
$v_2 \cdot \cos \alpha_2$	$v_2 \cdot \cos \beta_2$	$v_2 \cdot \cos \gamma_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_n \cdot \cos \alpha_n$	$v_n \cdot \cos \beta_n$	$v_n \cdot \cos \gamma_n$
$v_x = \Sigma(v \cdot \cos \alpha) \quad \quad v_y = \Sigma(v \cdot \cos \beta) \quad \quad v_z = \Sigma(v \cdot \cos \gamma),$		

folglich ist die Grösse der resultirenden Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

und die Richtung der letzteren wird bestimmt durch

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v},$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v}$$

und $\cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$

Spezieller Fall: Liegen sämtliche Geschwindigkeiten in ein und derselben Ebene, so ergeben sich bei der Zer-

legung der ersten nur Komponenten nach den Richtungen von „zwei“ senkrecht aufeinander stehenden Achsen; die dritte Achse (Fig. 30) kommt daher hier nicht in Betracht und es gilt einfacher, wenn die Richtungswinkel der

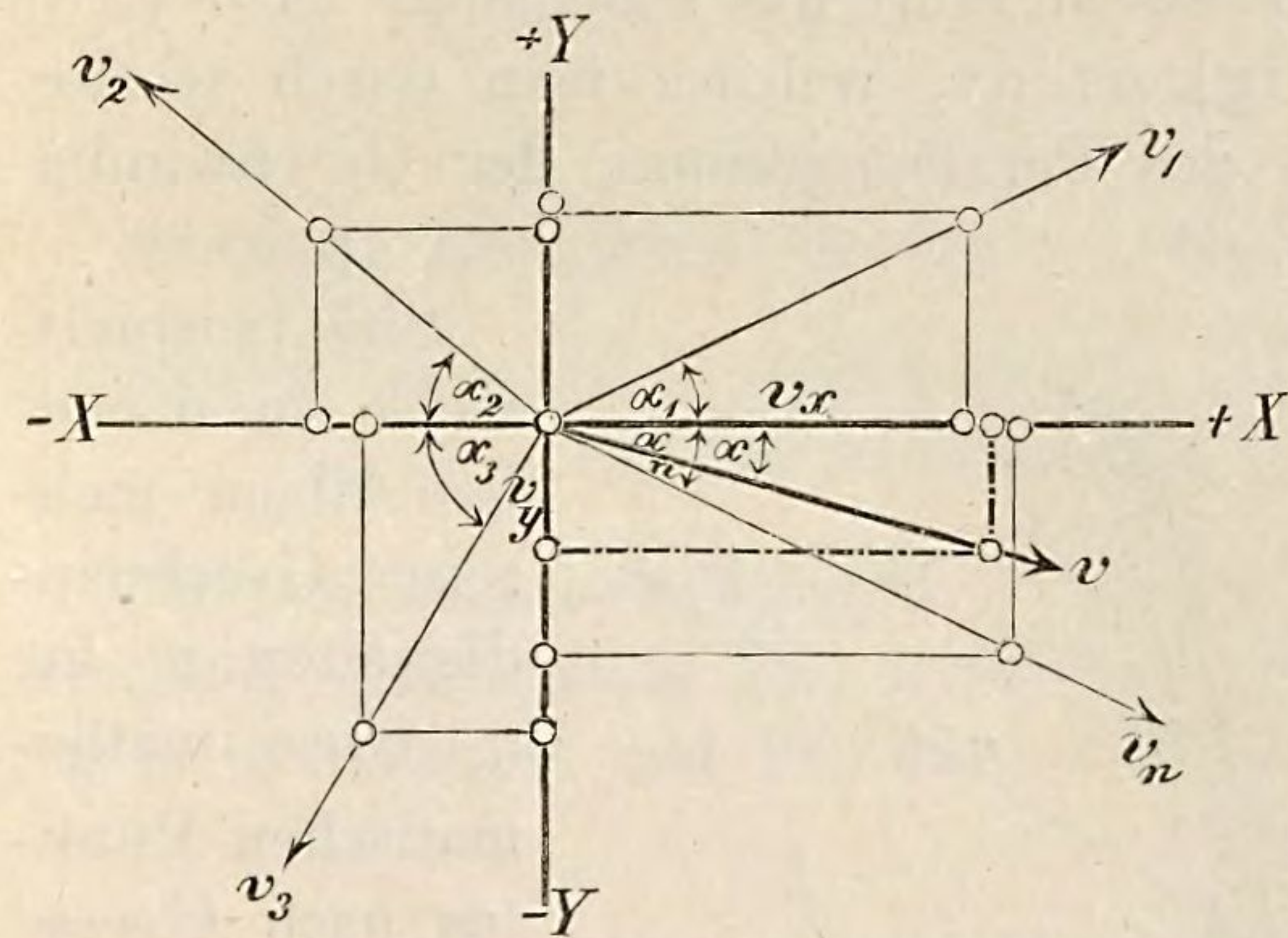


Fig. 30.

Geschwindigkeiten v_1 bis v_n zur X -Achse mit α_1 bis α_n bezeichnet werden:

X-Achse	Y-Achse
$v_1 \cdot \cos \alpha_1$	$v_1 \cdot \sin \alpha_1$
$v_2 \cdot \cos \alpha_2$	$v_2 \cdot \sin \alpha_2$
$\vdots$	$\vdots$
$v_n \cdot \cos \alpha_n$	$v_n \cdot \sin \alpha_n$
$v_x = \Sigma(v \cdot \cos \alpha)$	$v_y = \Sigma(v \cdot \sin \alpha),$

also folgt die Grösse der resultirenden Geschwindigkeit aus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und ihr Richtungswinkel α zur X-Achse aus

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$$

$$\text{oder aus } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$

Zu demselben Resultat führt das sogenannte „Polygon der Geschwindigkeiten“, welches man durch wiederholte Anwendung des Parallelogramms der Geschwindigkeiten erhält (Fig. 31).

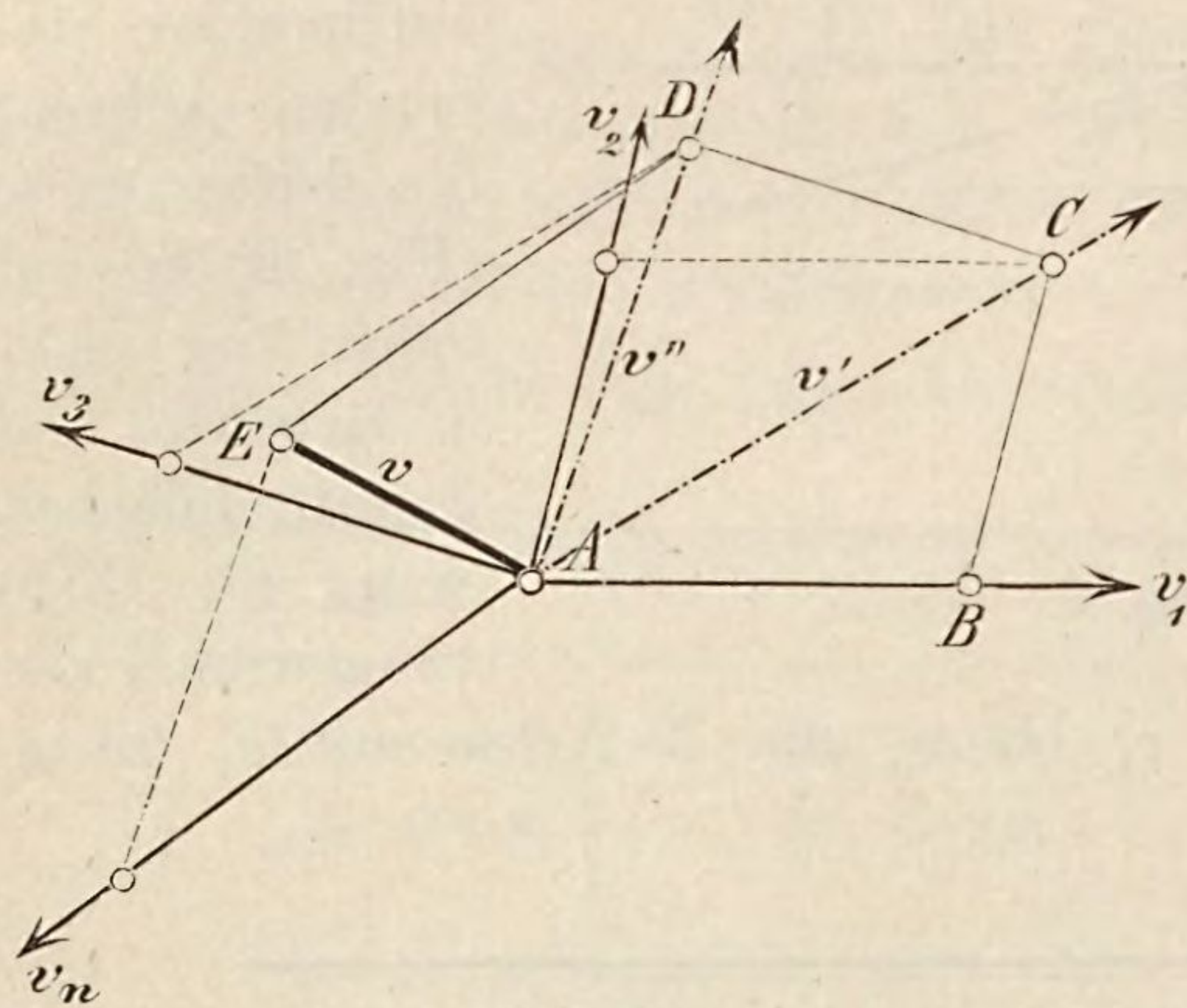


Fig. 31.

Sind beispielsweise in derselben Ebene mehrere Geschwindigkeiten v_1 bis v_n eines mathematischen Punktes nach Grösse und Richtung gegeben, so vereinigt man zunächst durch das Parallelogramm die Geschwindigkeiten v_1 und v_2

zu einer Resultirenden v' , hierauf v' und v_3 zu v'' und endlich v'' und v_n zur Resultirenden v . Schneller jedoch findet man v durch das Polygon $ABCDE$, in welchem AB die erste Geschwindigkeit v_1 , $BC \parallel v_2$, $CD \parallel v_3$, $DE \parallel v_n$ und AE die resultirende Geschwindigkeit v ist.

Das einfachste Polygon, das Geschwindigkeitsdreieck,

erhält man daher für die Zusammensetzung von zwei Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (Fig. 32).

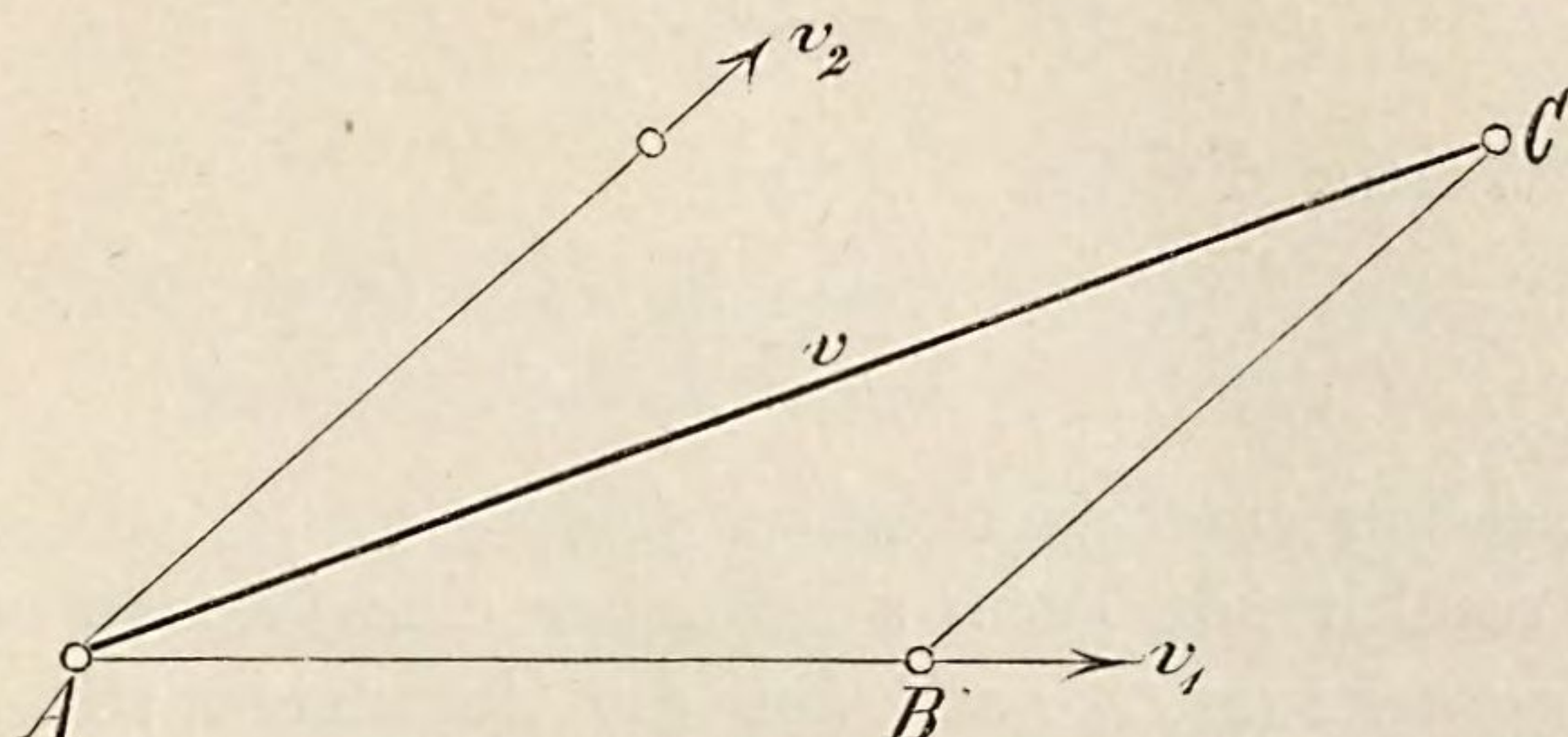


Fig. 32.

2.

Geradlinig gleichförmig geänderte resultirende Bewegung.

(Parallelogramm und Parallelepipedon der Bewegungen und der Beschleunigungen.)

Ein mathematischer Punkt P besitze gleichzeitig zwei geradlinig gleichförmig geänderte (beschleunigte) Bewegungen je in einer X - und Y -Achse, welche unter einem Winkel α zu einander ge-

neigt sind (Fig. 33).

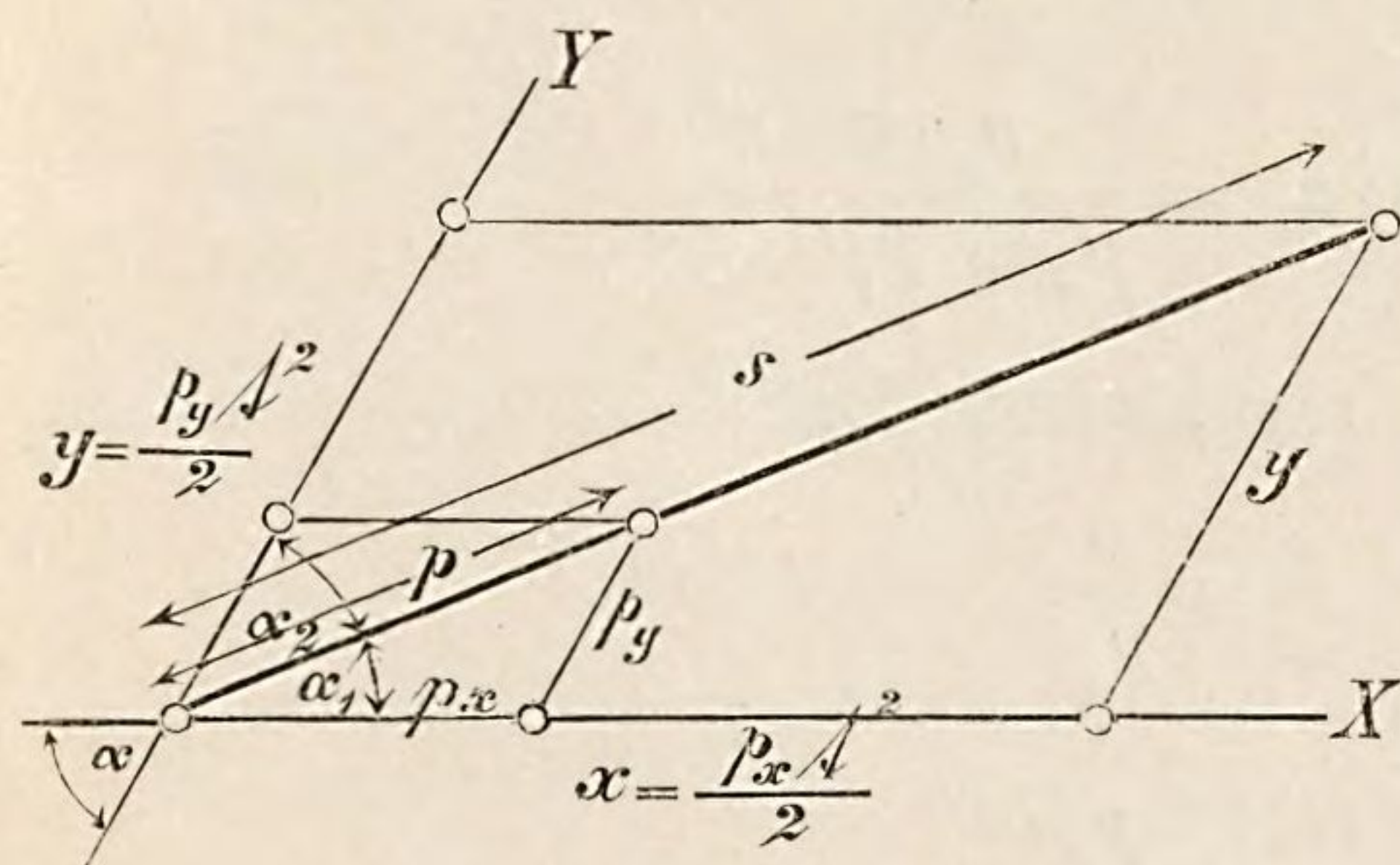


Fig. 33.

Es entstehen die Fragen nach der Form, der Natur und der Richtung der resultirenden Bewegung resp. nach der Grösse und Richtung der resultirenden Beschleunigung.

Die Seitenbewegung in der Richtung der X -Achse ist

$$x = \frac{p_x \cdot t^2}{2}$$

und in der Richtung der Y -Achse

$$y = \frac{p_y \cdot t^2}{2},$$

welche Werthe dividirt

$$\frac{x}{y} = \frac{p_x}{p_y},$$

die Gleichung einer Geraden, ergeben.

Die resultirende Bahn s ist daher eine Gerade und das Parallelogrammgesetz auch auf die Zusammensetzung von gleichförmig geänderten Bewegungen resp. von Beschleunigungen anwendbar.

Nach letzterem ist die Grösse der resultirenden Beschleunigung p zu bestimmen durch die Formel

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + 2p_x \cdot p_y \cdot \cos \alpha}$$

und ihre Richtung aus

$$\sin \alpha_1 = \frac{p_y \cdot \sin \alpha}{p}$$

und

$$\sin \alpha_2 = \frac{p_x \cdot \sin \alpha}{p}$$

oder durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p_y \cdot \sin \alpha}{p_x + p_y \cdot \cos \alpha}.$$

Ferner gilt für die resultirende Bahn

$$\frac{s}{x} = \frac{p}{p_x};$$

und da

$$x = \frac{p_x \cdot t^2}{2}$$

ist, auch

$$s = \frac{p \cdot t^2}{2},$$

woraus sich ergibt, dass die Resultirende eine gleichförmig

geänderte (beschleunigte) Bewegung mit der constanten Beschleunigung p ist.

3.

Krummlinig gleichförmig geänderte und krummlinig ungleichförmig geänderte resultirende Bewegung.

Allgemeine Untersuchung der Tangentialgeschwindigkeit v , der Tangentialbeschleunigung p_t , der Normalbeschleunigung p_n , der resultirenden Beschleunigung p und des Weges s zur Zeit t .

Bei krummlinig geänderter resultirender Bewegung ändert sich in jedem Augenblicke der Bewegung nicht nur die Grösse der Geschwindigkeit, sondern auch deren Richtung resp. die Richtung der Bewegung, welche letztere durch die Richtung der Tangente in dem beobachteten Punkte der resultirenden Bahn angegeben wird.

Constructiv findet man die Form der krummlinigen Bahn mit Hilfe des Parallelogrammgesetzes. Sind z. B. die unter einem Winkel α geneigten Achsen X und Y und in denselben die ungleichförmigen Bewegungen durch die Gleichungen

$$x = F(t)$$

$$\text{und } y = f(t)$$

gegeben, so berechnet man mit denselben für verschiedene Zeiten t die Wege x und y und bestimmt mit letzteren unter Anwendung des Parallelogrammgesetzes — wie in Fig. 34 — diejenigen Orte $P_1, P_2 \dots$, welche der sich bewegendende

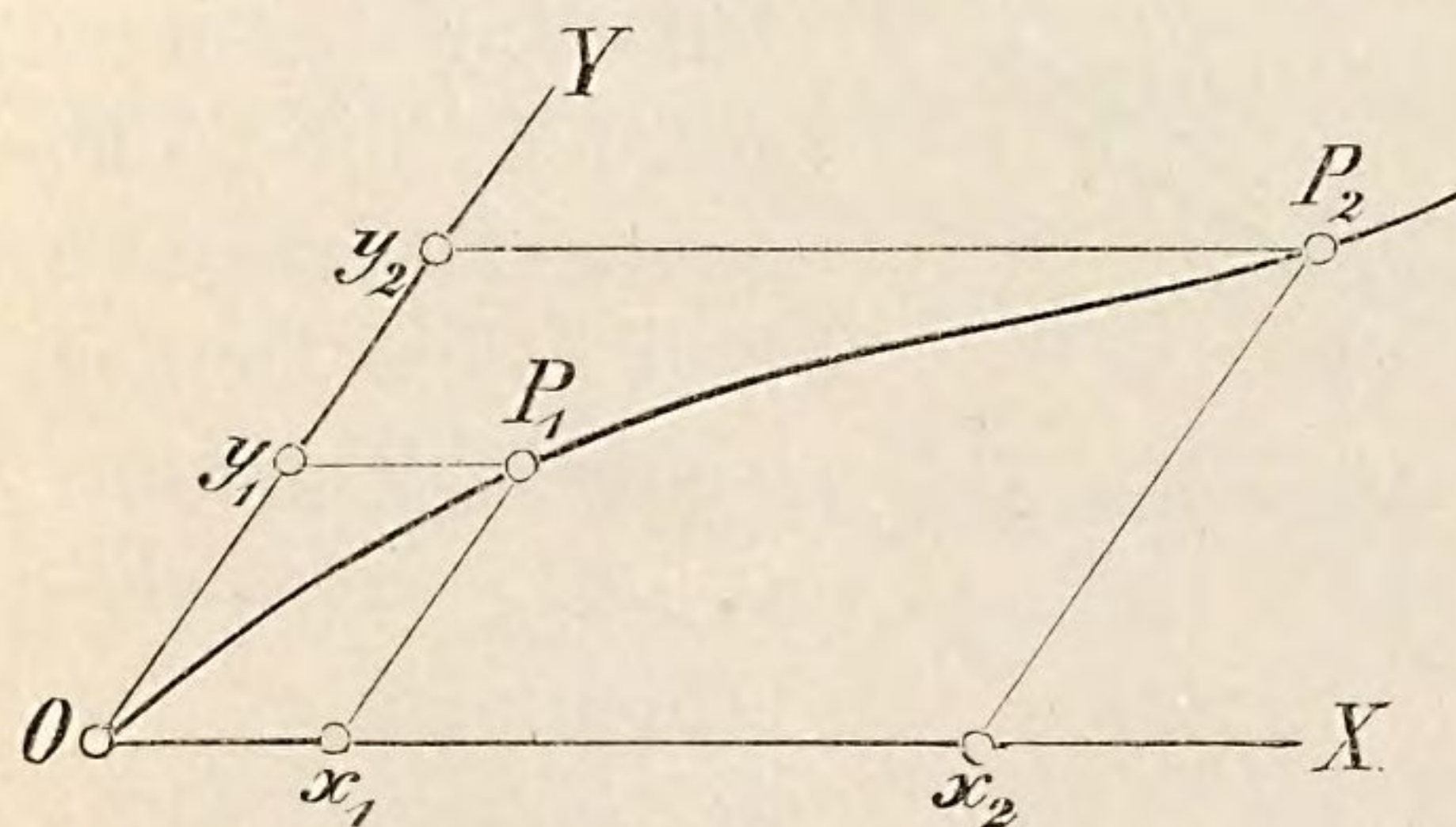


Fig. 34.

Punkt zu jenen Zeiten einnimmt. Die stetige Verbindung jener Orte bildet dann die resultierende Bahn s .

Zur analytischen Untersuchung der letzteren darf man ein unendlich kleines Stück derselben als geradlinig ansehen und auf das unendlich kleine Bahnstück ds somit alle diejenigen Regeln anwenden, welche für Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bisher für geradlinige Bahnen gefunden wurden.

a) Ein mathematischer Punkt besitze in zwei aufeinander senkrecht stehenden Achsen X und Y je eine geänderte Bewegung, ausgedrückt durch die Gleichungen

$$x = F(t)$$

$$\text{und } y = f(t)$$

mit den veränderlichen Geschwindigkeiten v_x und v_y , während die Tangentialgeschwindigkeit des Punktes P zur Zeit t gleich v sein mag (Fig. 35).

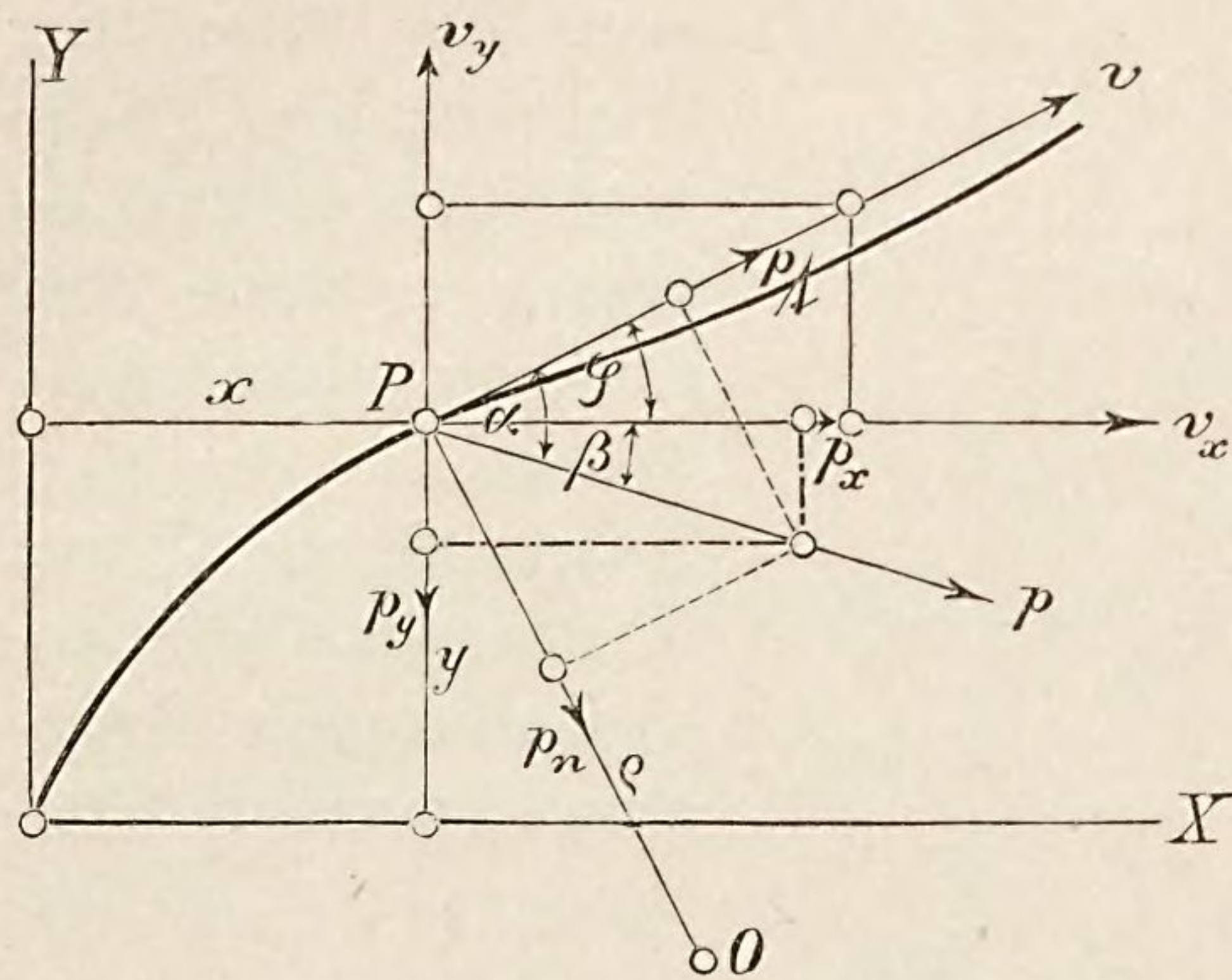


Fig. 35.

Analytisch sollen dann bestimmt werden die Tangentialgeschwindigkeit v , die Tangentialbeschleunigung p_t , die Normalbeschleunigung p_n , die resultierende Beschleunigung p und der Weg s , welcher letztere im vorliegenden Falle eine ebene Curve bildet.

1) Die Tangentialgeschwindigkeit v in dem Punkte P findet sich mit Hilfe des Parallelogrammgesetzes, sie ist als die Resultierende aus den Achsengeschwindigkeiten v_x

und v_y anzusehen, und folglich nach dem früher gefundenen Ausdrücke

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

zu berechnen.

Nun kann aber geschrieben werden

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{und } v_y = \frac{dy}{dt},$$

folglich ergibt sich unter Einsetzung der erhaltenen Werthe

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

und hiermit

2) die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = \frac{dv}{dt}.$$

Die veränderliche Richtung der Tangential-Geschwindigkeit und Beschleunigung findet sich durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x},$$

wenn φ den Winkel zwischen der X -Achse und der Tangente im Punkte P bedeutet.

3) Normalbeschleunigung p_n . Läuft ein Punkt P in der unendlich kleinen Zeit dt über die krumme Bahn $PP_1 = ds$ (Fig. 36) ungleichförmig, so kann man sich diese Bewegung entstanden denken aus einer in P tangentialen gleichförmigen Bewegung $v \cdot dt$, vermöge deren der Punkt in der Zeit dt nach P' gelangt, und aus der beschleunigten Bewegung $\frac{p \cdot (dt)^2}{2}$, welche den Punkt in derselben Zeit über $P'P_1$ führt und mit der Tangentialbewegung $v \cdot dt$ den Winkel α einschliesst.

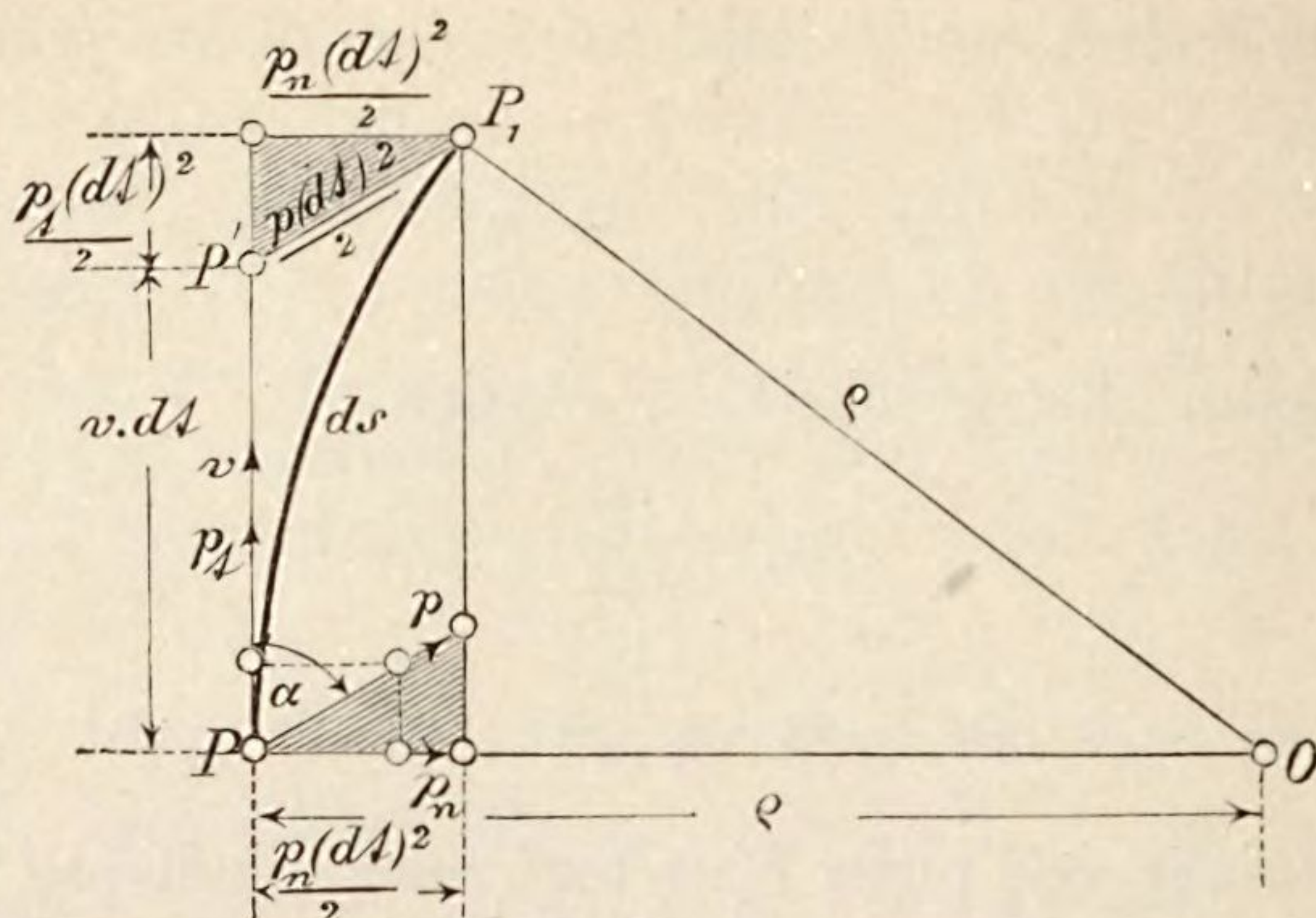


Fig. 36.

Zerlegt man die Bewegung $\frac{p \cdot (dt)^2}{2}$ tangential und normal, so ergeben sich die Componenten

$$\frac{p \cdot \cos \alpha \cdot (dt)^2}{2} = \frac{p_t \cdot (dt)^2}{2}$$

und

$$\frac{p \cdot \sin \alpha \cdot (dt)^2}{2} = \frac{p_n \cdot (dt)^2}{2},$$

in welchen Werthen

p_t die Tangentialbeschleunigung

$$= \frac{dv}{dt}$$

und p_n eine Normalbeschleunigung

vorstellen. Hieraus folgt aber, dass p_t die Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente ändert, während p_n die Bewegungsrichtungsänderung des Punktes hervorruft (Fig. 37).

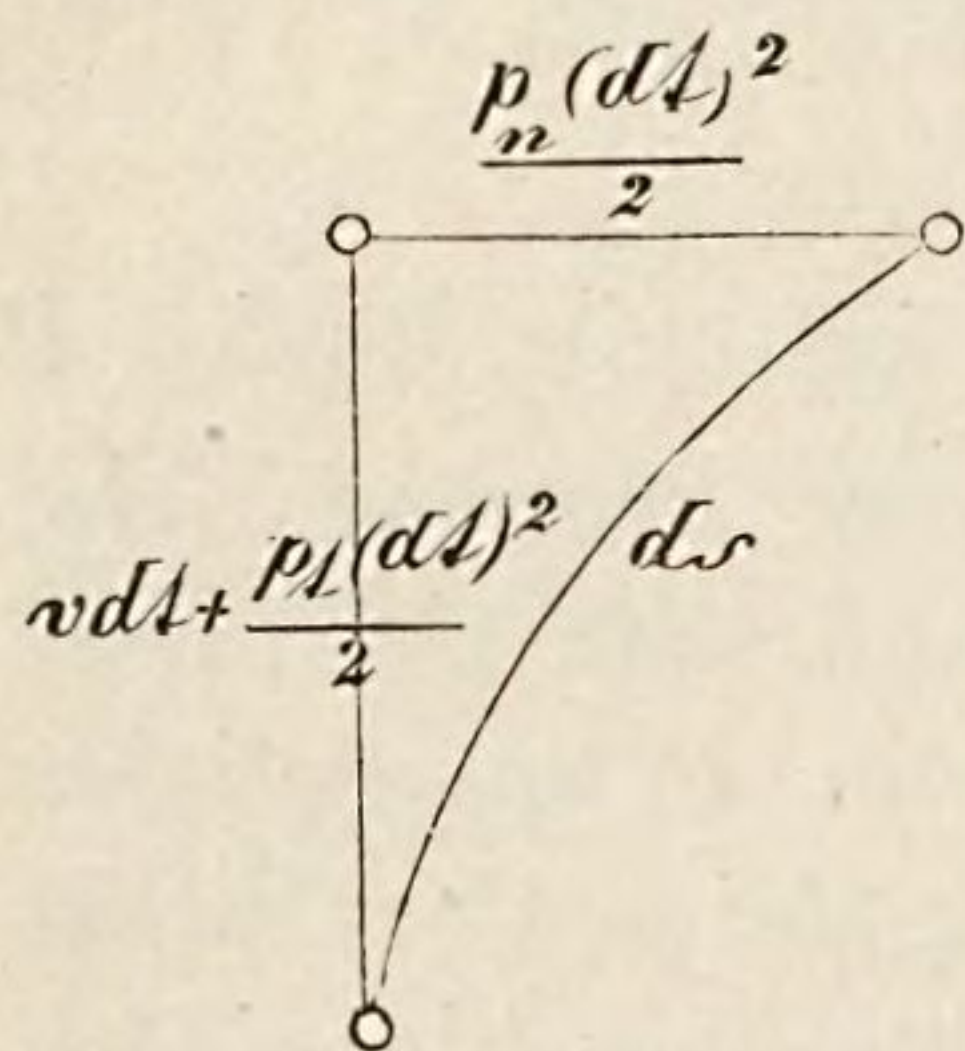


Fig. 37.

Zur Bestimmung von p_n betrachte man nun das Curvenstück ds (Fig. 37) als einen Kreisbogen vom Krümmungs-

halbmesser ϱ und vertausche dann den Bogen ds mit der zugehörigen Sehne, wodurch sich mit Bezug auf Fig. 38 ergibt

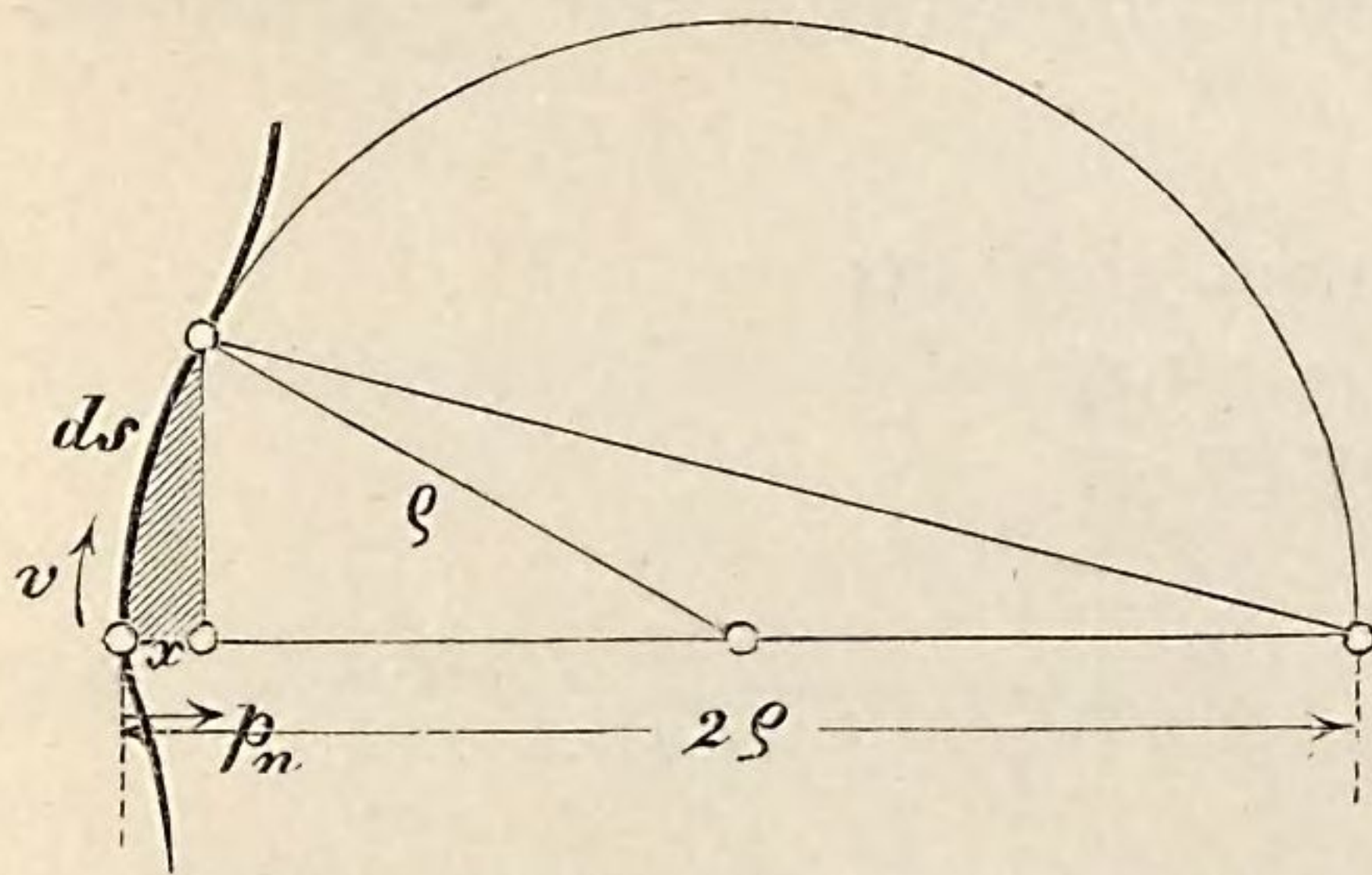


Fig. 38.

$$2\varrho : ds = ds : x,$$

$$(ds)^2 = 2\varrho \cdot \frac{p_n (dt)^2}{2},$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \varrho \cdot p_n,$$

$$v^2 = \varrho \cdot p_n$$

oder die Normalbeschleunigung

$$p_n = \frac{v^2}{\varrho}.$$

4) Zur Bestimmung der resultierenden Beschleunigung p dient nun:

$$p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2}$$

zur Ermittlung der Grösse

$$\text{und} \quad \text{tg } \alpha = \frac{p_n}{p_t}$$

zur Bestimmung der Richtung.

Die resultierende Beschleunigung ergibt sich aber auch aus der Zusammensetzung der Achsenbeschleunigungen p_x und p_y (Fig. 35) und zwar der Grösse nach durch

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

oder, da

$$p_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{und} \quad p_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ist, durch

$$p = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2};$$

während sich die Richtung durch

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p_y}{p_x}$$

bestimmt, wenn β den Richtungswinkel zur X -Achse bedeutet.

5) Der Weg s berechnet sich aus

$$v = \frac{ds}{dt}$$

oder durch

$$s = \int v \cdot dt = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Wäre eingangs nicht $x = F(t)$ und $y = f(t)$, sondern direct der Weg s durch die Gleichung

$$s = \psi(t)$$

gegeben, so wäre die Tangentialgeschwindigkeit zur Zeit t

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2};$$

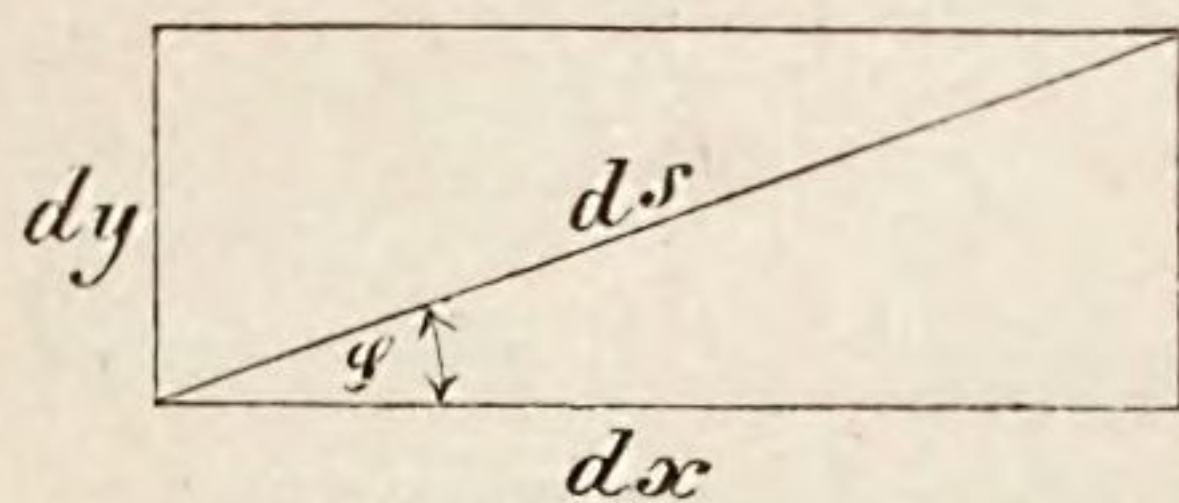


Fig. 39.

ferner wären die Achsengeschwindigkeiten nach den Fig. 35 und 39 (φ ist im speciellen Falle als gegeben zu betrachten)

$$v_x = v \cdot \cos \varphi = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \varphi = \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = v \cdot \sin \varphi = \frac{ds}{dt} \cdot \sin \varphi = \frac{dy}{dt}$$

und die Gleichungen für die Achsenbewegungen

$$x = \int v_x \cdot dt,$$

$$y = \int v_y \cdot dt.$$

Weiter ergeben sich die Achsenbeschleunigungen durch

$$p_x = \frac{dv_x}{dt}$$

und

$$p_y = \frac{dv_y}{dt},$$

die resultirende Beschleunigung aber nach ihrer Grösse durch

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

und nach ihrer Richtung durch

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p_y}{p_x}.$$

Nun ist nach Fig. 35

$$\alpha = \beta + \varphi$$

der Richtungswinkel zwischen p und der Tangente, folglich ist auch

$$p_t = p \cdot \cos \alpha$$

und

$$p_n = p \cdot \sin \alpha.$$

Gleichförmige Kreisbewegung.

Ein Punkt P bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit c , also mit der Tangentialbeschleunigung $p_t = 0$ in einem Kreise vom Mittelpunkt O und dem Halbmesser r , und es soll diese Bewegung (Drehbewegung) in zwei senkrecht aufeinander stehende beliebig in die Kreisebene gelegte Achsen zerlegt und jede der entstehenden Seitenbewegungen in Bezug auf die Geschwindigkeit, Beschleunigung und den Weg untersucht werden.

Während in der Entfernung r vom Drehpunkte O in einer Secunde der Weg c (Fig. 40) zurückgelegt wird, beschreibt ein Punkt in der Entfernung Eins vom Drehpunkt das Bogenstück ω , welches — wie schon in der Einleitung erklärt — die Winkelgeschwindigkeit genannt wird, und es gilt:

$$c : r = \omega : 1$$

also

$$c = r \cdot \omega$$

oder

$$\omega = \frac{c}{r}.$$

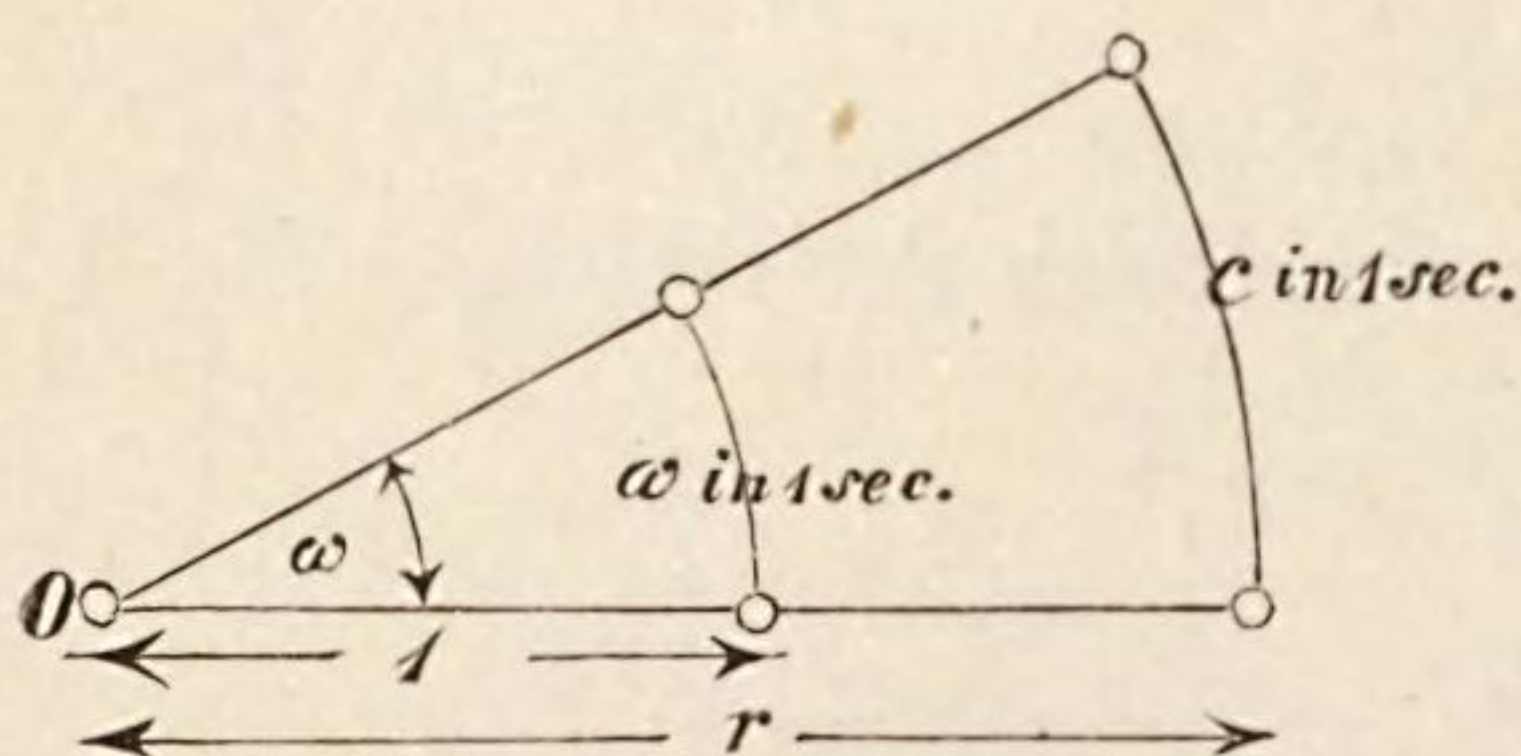


Fig. 40.

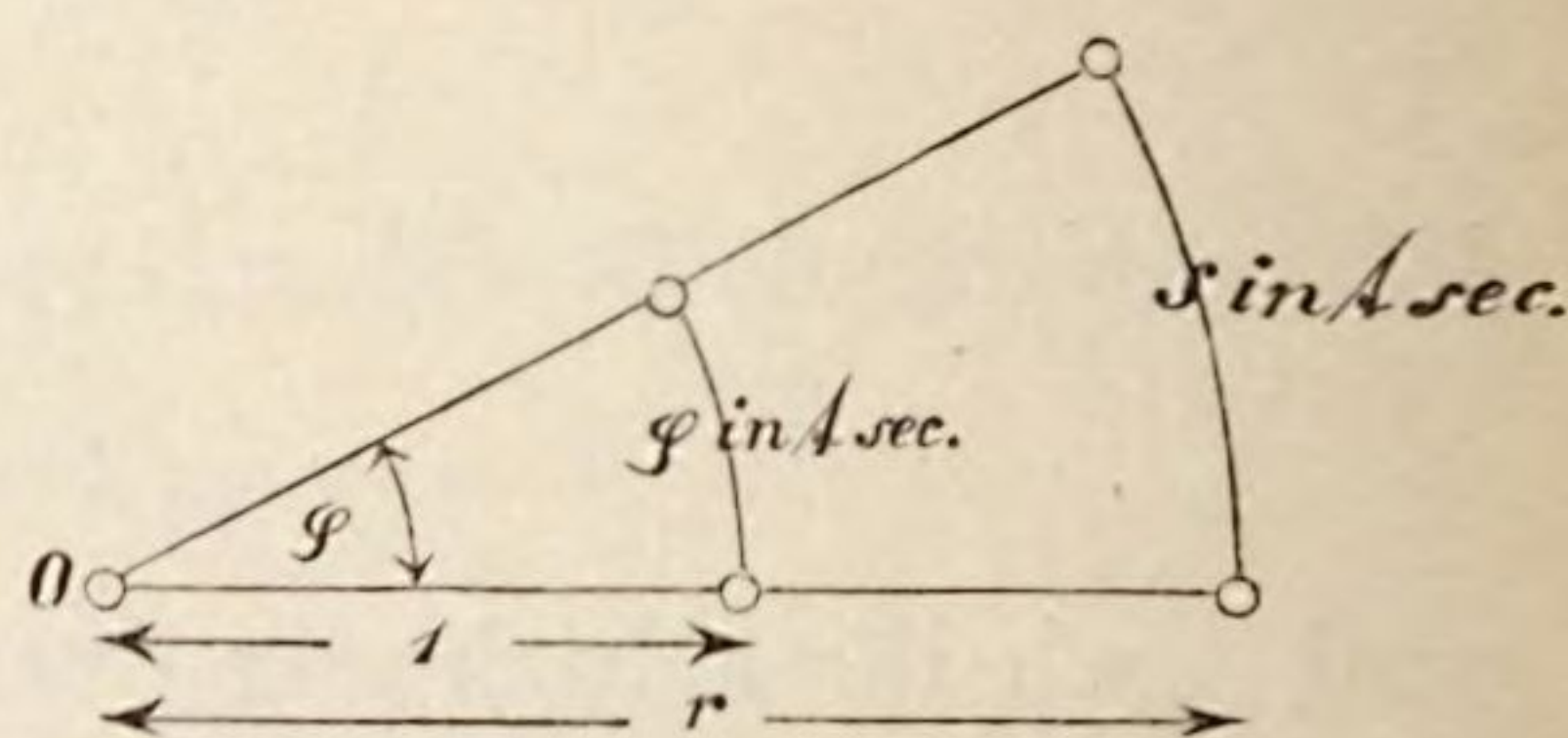


Fig. 41.

Nach Verlauf von t Secunden hat hingegen der Punkt in der Kreisbahn, also in der Entfernung r von O (Fig. 41), den Weg s und ein Punkt in der Entfernung Eins von O den Bogen φ zurückgelegt, deshalb kann nach den allgemeinen Bewegungsgleichungen geschrieben werden

$$c = \frac{ds}{dt}$$

constant,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

constant, wobei

$$\varphi = f(t) = \omega \cdot t$$

ist.

Aus beiden Werthen für ω folgt

$$c = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Nach Fig. 42 sind nun die Coordinaten des Punktes P

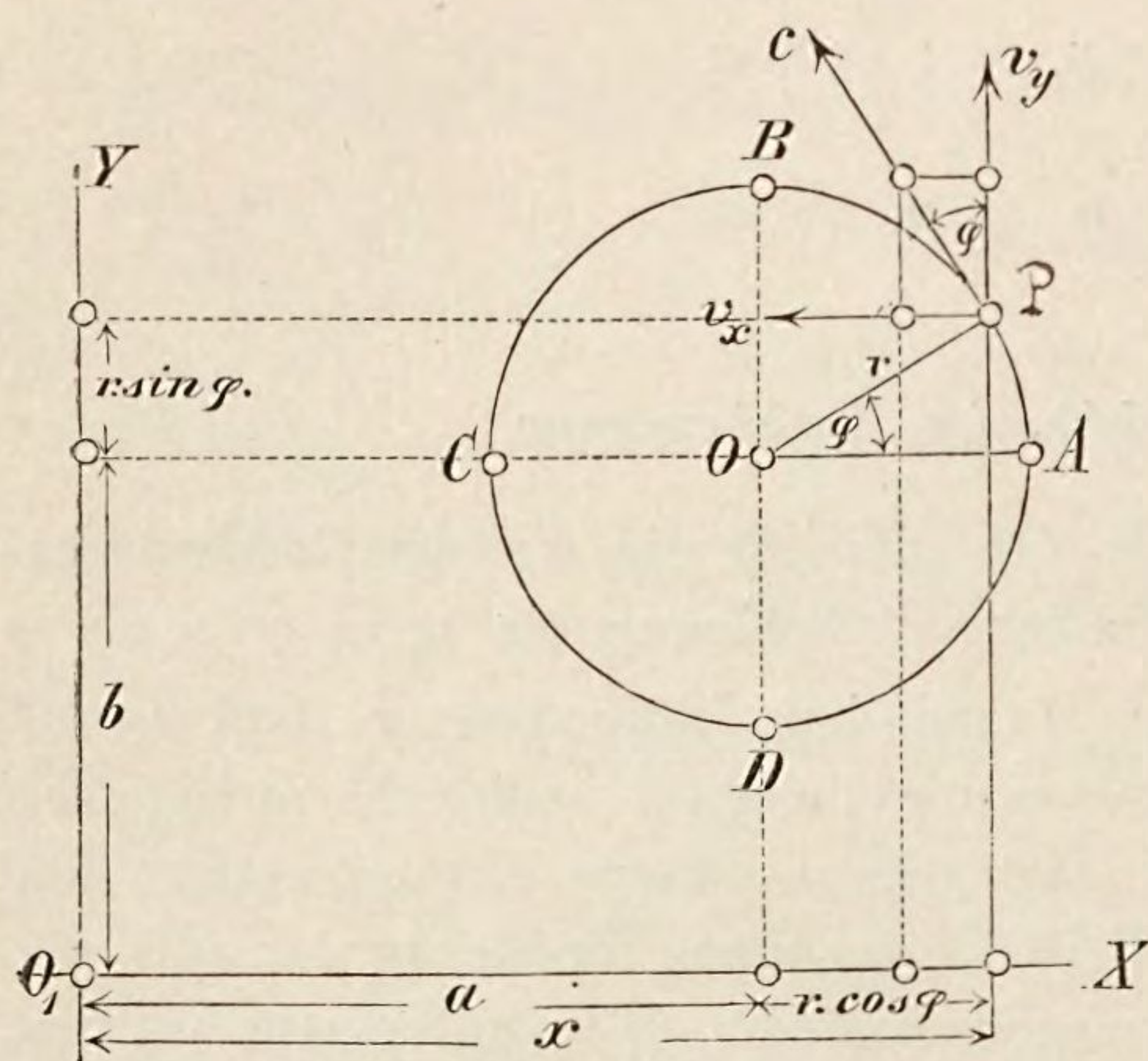


Fig. 42.

$$x = a + r \cdot \cos \varphi,$$

$$y = b + r \cdot \sin \varphi,$$

folglich gilt

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(a + r \cdot \cos \varphi)}{dt} = - r \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(b + r \cdot \sin \varphi)}{dt} = + r \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$v_x = - c \cdot \sin \varphi,$$

$$v_y = + c \cdot \cos \varphi,$$

welche Werthe sich schon aus dem Parallelogramm der Geschwindigkeit ergeben.

Bestimmung der Beschleunigungen p_x und p_y in den Achsenrichtungen.

Es ist

$$p_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(-c \cdot \sin \varphi)}{dt} = - c \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

und

$$p_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(c \cdot \cos \varphi)}{dt} = - c \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$p_x = - \frac{c^2}{r} \cdot \cos \varphi,$$

$$p_y = - \frac{c^2}{r} \cdot \sin \varphi.$$

Setzt man die beliebig grossen Werthe $a = b = 0$, d. h. legt man die X- und Y-Achse durch den Kreismittelpunkt, dann ist einfacher

$$x = + r \cdot \cos \varphi,$$

$$y = + r \cdot \sin \varphi$$

und hiernach ergeben sich für verschiedene Werthe von φ folgende Werthe für

$$x, p_x, v_x$$

$$\text{und } y, p_y, v_y,$$

welche auf die Natur der beiden Bewegungen in der X- und Y-Achse schliessen lassen:

Winkel	Bogen	X-Achse			Y-Achse		
φ°	φ	x	p_x	v_x	y	p_y	v_y
0°	0	$+r$	$-\frac{c^2}{r}$	0	0	0	$+c$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$-c$	$+r$	$-\frac{c^2}{r}$	0
180°	π	$-r$	$+\frac{c^2}{r}$	0	0	0	$-c$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	0	0	$+c$	$-r$	$+\frac{c^2}{r}$	0
360°	2π	$+r$	$-\frac{c^2}{r}$	0	0	0	$+c$

Die Fig. 43 und 44 veranschaulichen diese Bewegungen, welche man als „geradlinig schwingende“ zu bezeichnen hat; O ist ihr Schwingungsmittelpunkt und r die grösste Schwingungsweite. In dieser grössten Entfernung ist die Geschwindigkeit des Punktes gleich Null, während dieselbe beim Passiren des Schwingungsmittelpunktes am grössten und zwar gleich der Tangentialgeschwindigkeit c im Kreise wird.

X-Achse.

$$x = 0$$

$$x = -r$$

$$v_x = -c$$

$$p_x = -\frac{c^2}{r}$$

$$v_x = 0$$

$$p_x = 0$$

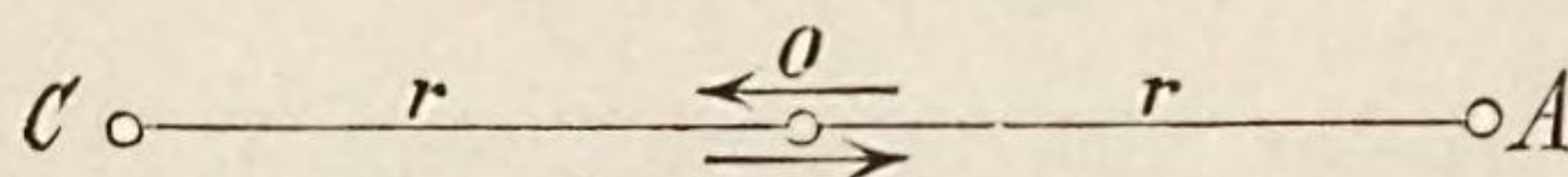


Fig. 43.

$$p_x = +\frac{c^2}{r}$$

$$x = 0$$

$$x = +r$$

$$v_x = +c$$

$$v_x = 0$$

$$p_x = 0$$

Y-Achse.

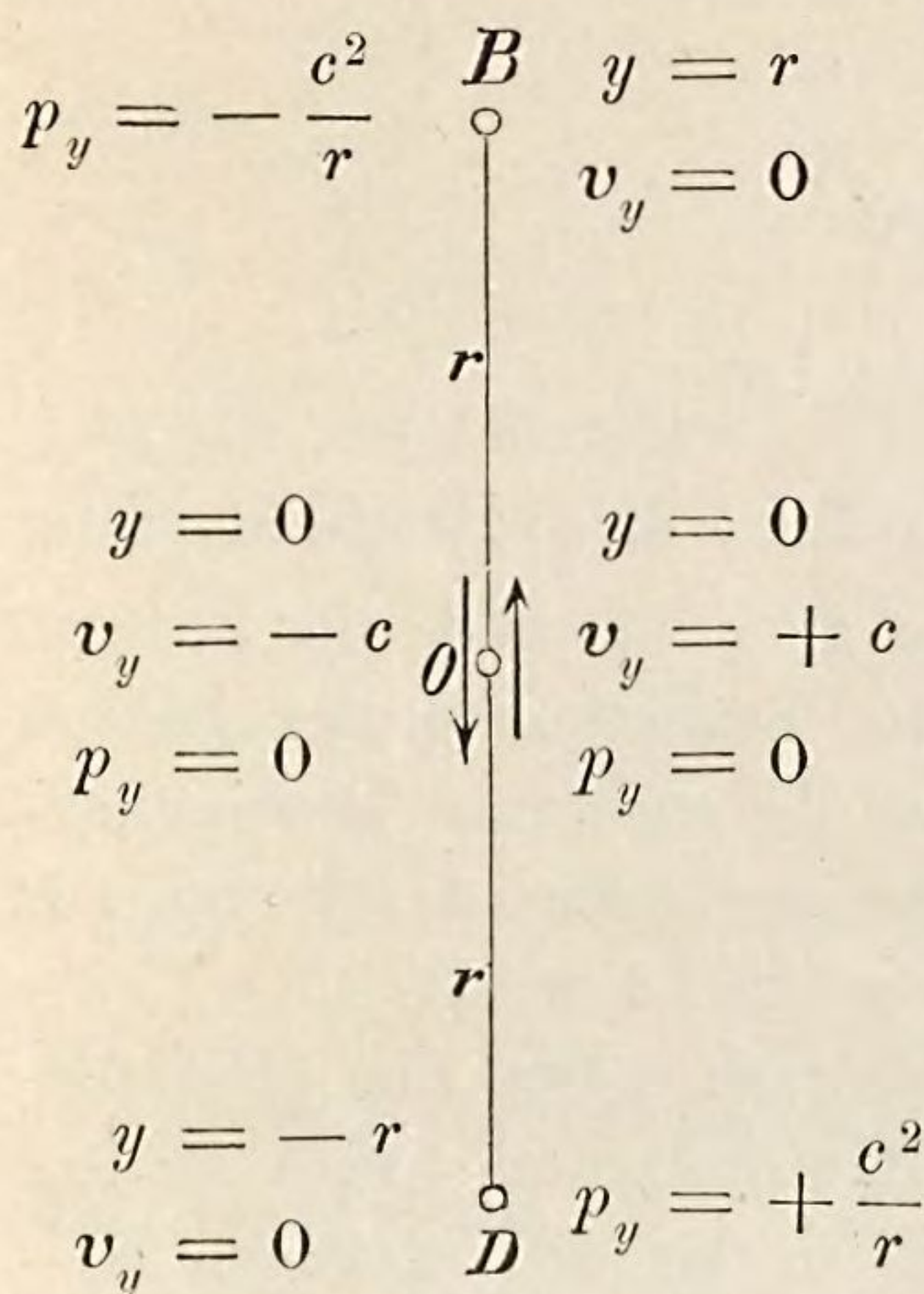


Fig. 44.

Aus der vorliegenden Untersuchung geht hervor, dass die gleichförmige Kreisbewegung angesehen werden kann als das Resultat der Zusammensetzung von zwei gleichen senkrecht aufeinander stehenden geradlinigen Schwingungen, deren Schwingungsmittelpunkte mit dem Kreismittelpunkte zusammenfallen, und bei deren einer der Beginn der Bewegung in A , bei der anderen aber im Schwingungsmittelpunkte O stattfindet.

Setzt man die beiden Achsenbeschleunigungen p_x und p_y im Punkte P der Kreisbahn zu einer Resultirenden p zusammen, so folgt (Fig. 45)

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

und nach Einsetzung der Werthe von p_x und p_y

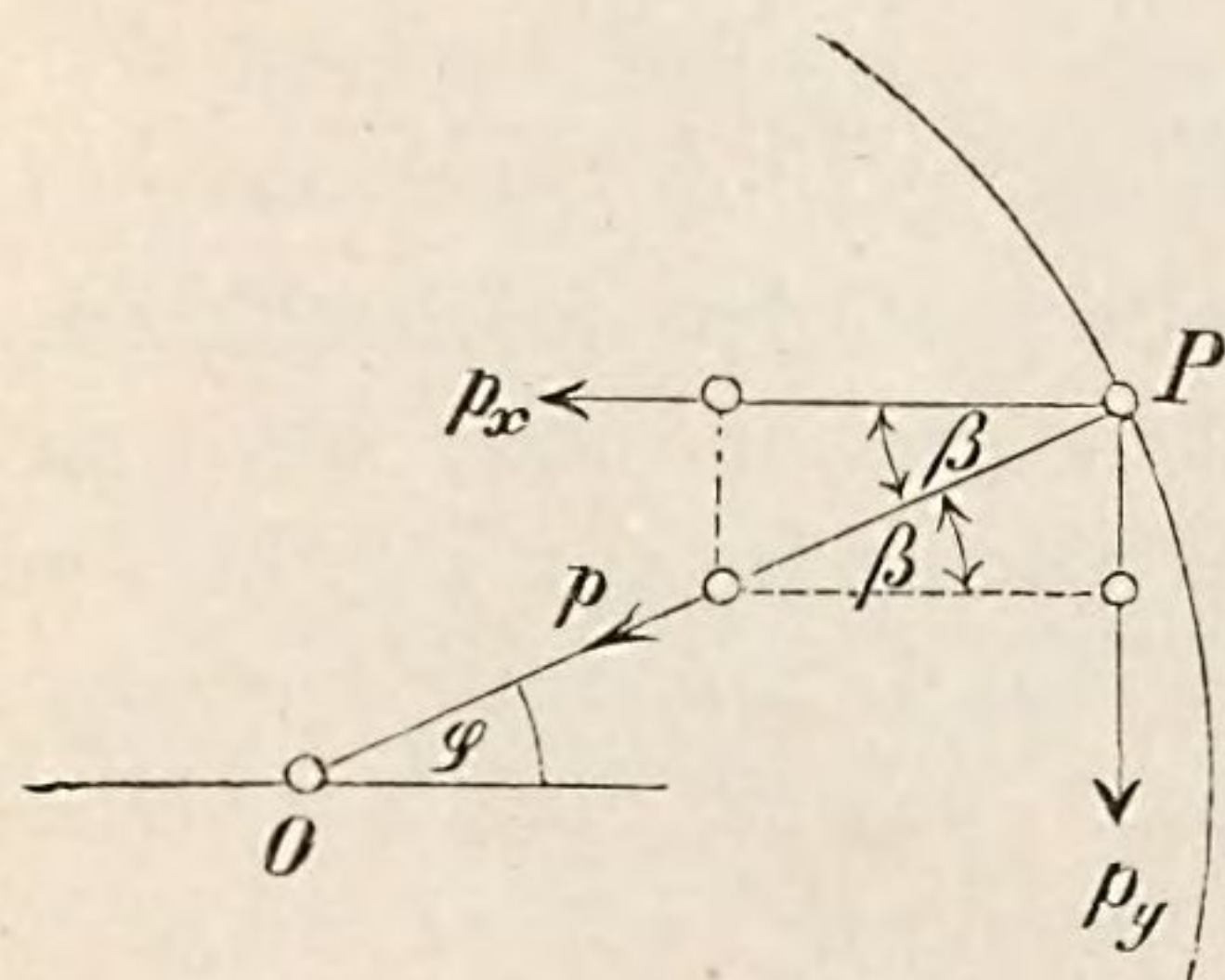


Fig. 45.

$$p = \sqrt{\frac{c^4}{r^2}(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}$$

oder

$$p = \frac{c^2}{r};$$

auch wird

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p \cdot \sin \varphi}{p \cdot \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Wie aus der letzten Gleichung hervorgeht, ist $\beta = \varphi$, die resultirende Beschleunigung p stets nach dem Kreismittelpunkte gerichtet, also im vorliegenden Falle zugleich Normalbeschleunigung, was, da $p_t = 0$ ist, durch die Gleichung

$$p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2} = p_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{c^2}{r}$$

bestätigt wird.

Da hier

$$v = c \text{ constant}$$

und auch

$$\varrho = r \text{ constant ist,}$$

so ist auch $p = p_n$ eine constante Grösse; diese Beschleunigung wird auch Centripetalbeschleunigung genannt und sie bedingt diejenige gleichförmig beschleunigte Radialbewegung, durch welche die constante Bewegungsrichtungsänderung des Punktes P hervorgebracht wird.

Hiernach kann die gleichförmige Kreisbewegung auch als das Ergebniss der gleichzeitigen Existenz der constanten Tangentialgeschwindigkeit c und der constanten Normalbeschleunigung

$$p = \frac{c^2}{r}$$

betrachtet werden (Fig. 46).

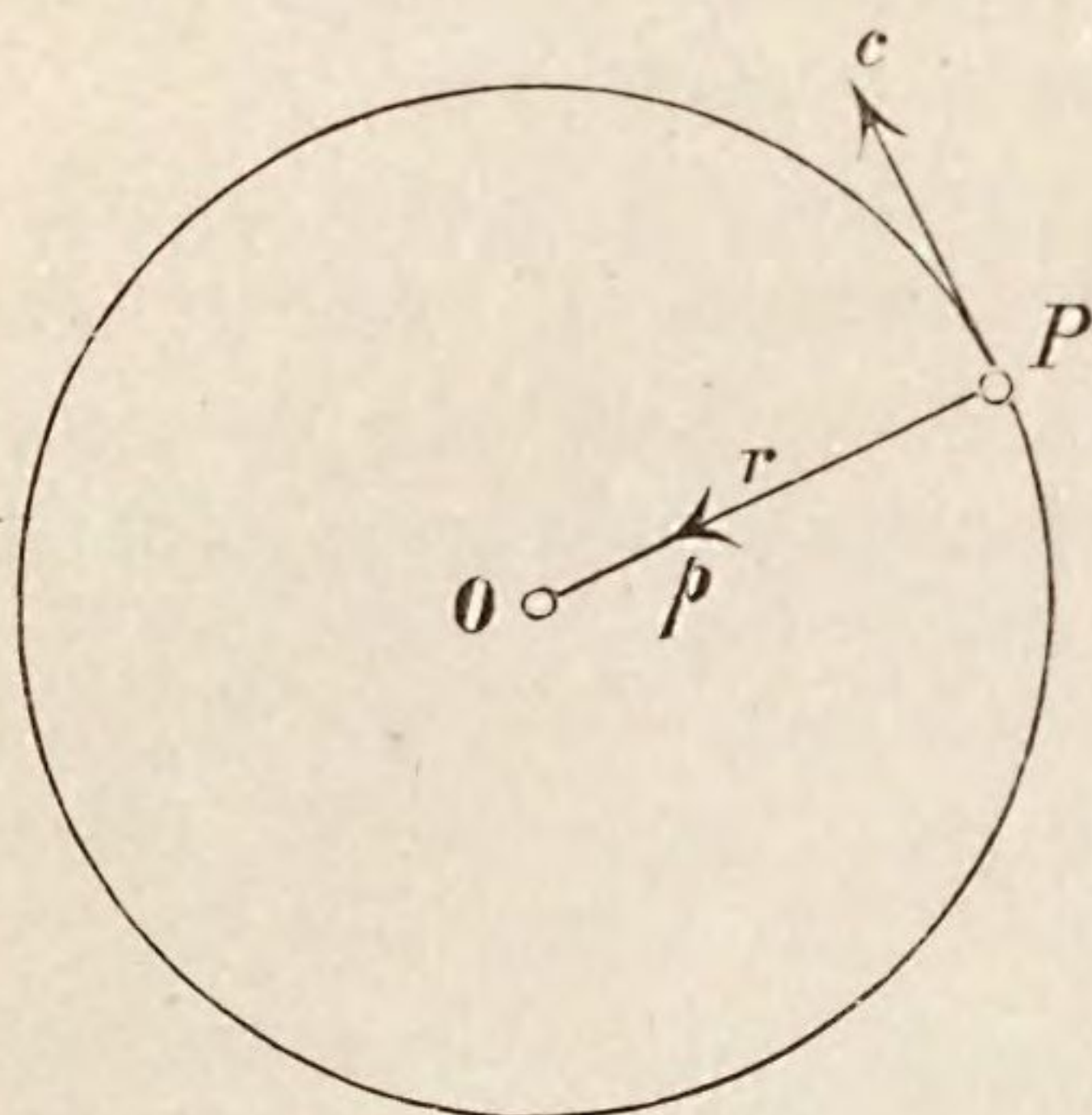


Fig. 46.

Ungleichförmige Kreisbewegung.

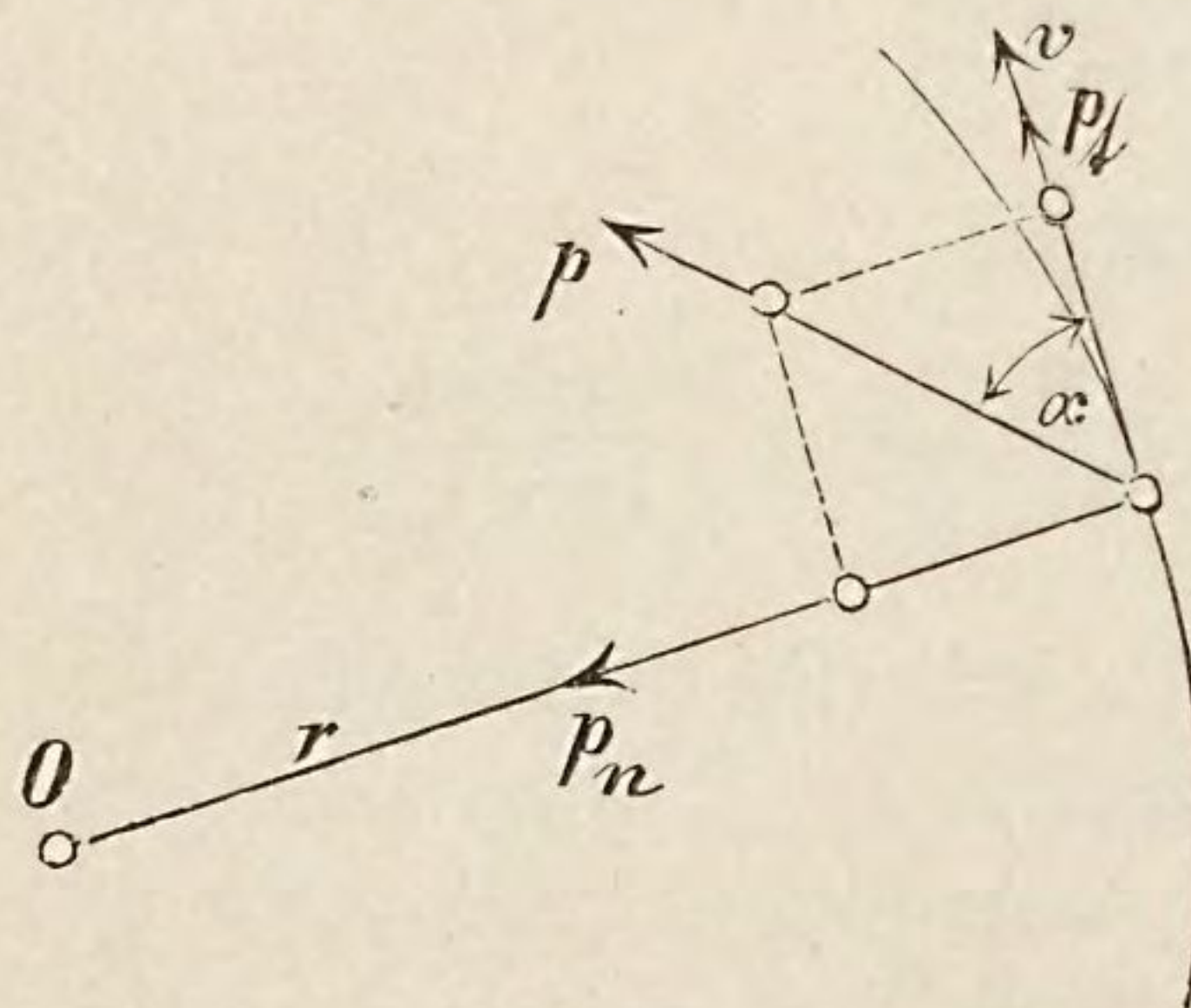


Fig. 47.

Soll sich der mathematische Punkt ungleichförmig, also mit veränderlicher Geschwindigkeit im Kreise vom Halbmesser r bewegen, so muss ausser der Normalbeschleunigung p_n , welche die Richtung der Bewegung ändert, auch nothwendigerweise eine Tangentialbeschleunigung p_t zur Aenderung der Geschwindigkeit v vorhanden sein (Fig. 47).

Erstere ist hier

$$p_n = \frac{v^2}{r},$$

letztere

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

und die resultirende Beschleunigung nach der Grösse

$$p = \sqrt{p_n^2 + p_t^2}$$

und der Richtung nach

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_n}{p_t}.$$

b) Ein Punkt besitze in drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen X , Y , Z je eine geänderte Bewegung ausgedrückt durch die Gleichungen

$$x = F(t),$$

$$y = f(t)$$

$$\text{und } z = \varphi(t).$$

Die diesen Bewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten sind v_x , v_y , v_z und ihre Beschleunigungen p_x , p_y , p_z . Die Geschwindigkeit des Punktes P zur Zeit t auf der doppelt gekrümmten resultirenden Bahn s sei v , die Tangentialbeschleunigung p_t und die resultirende Beschleunigung p .

Gesucht wird die Tangentialgeschwindigkeit v , die Tangentialbeschleunigung p_t , die resultirende Beschleunigung p und die Gleichung für den Weg s .

Constructiv findet sich die resultirende Bahn s mit Hilfe des Parallelepipedons der Bewegungen aus x , y und z für verschiedene Zeiten t . Die stetige Verbindung der sich auf solche Weise ergebenden Curvenpunkte P liefert die gesuchte Linie.

Für die Tangentialgeschwindigkeit zur Zeit t gilt nach Früherem

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

in welcher Gleichung die Summanden unter dem Wurzelzeichen zu bestimmen sind.

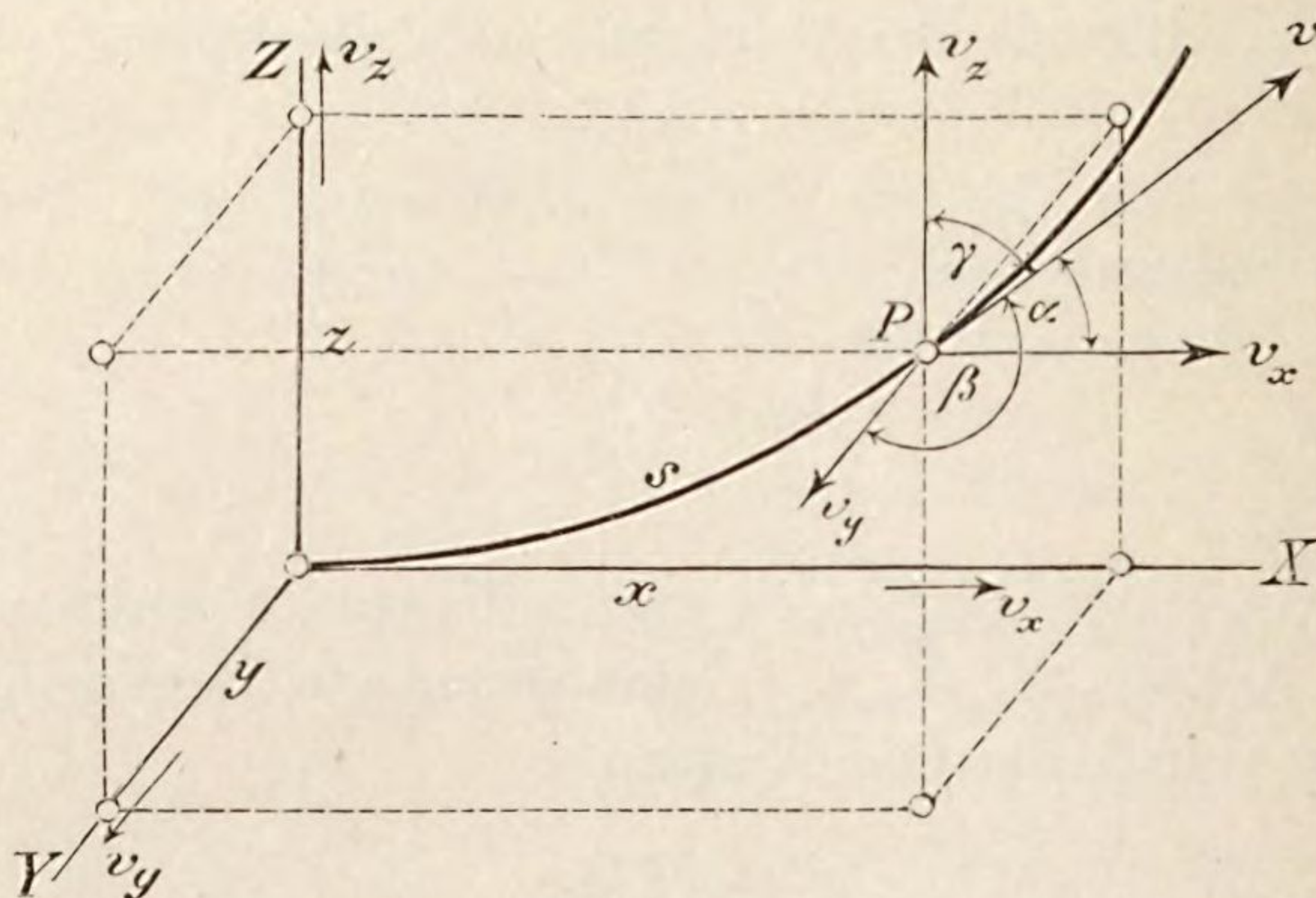


Fig. 48.

Es ist

$$v_x = \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = \frac{dz}{dt},$$

also die Tangentialgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

und die Tangentialbeschleunigung

$$p_t = \frac{dv}{dt};$$

für die Bewegungsrichtung zur Zeit t mit Bezug auf Fig. 48 gilt

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{v},$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{v},$$

$$\cos \gamma = \frac{v_z}{v}.$$

Die resultirende Beschleunigung ist

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}, \end{aligned}$$

und die Richtung derselben ist durch

$$\cos \alpha' = \frac{p_x}{p},$$

$$\cos \beta' = \frac{p_y}{p},$$

$$\cos \gamma' = \frac{p_z}{p}$$

zu berechnen, wenn α' , β' , γ' die Winkel zwischen der resultirenden Beschleunigung und den Achsen X , Y und Z bedeuten.

Für den Weg s nach der Zeit t ist schliesslich zu schreiben

$$s = \int v \cdot dt = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Wäre anfangs gegeben

$$s = \psi(t),$$

so würde direct folgen

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2};$$

ferner würde sein

$$v_x = v \cdot \cos \alpha = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \alpha = \frac{dx}{dt},$$

$$v_y = v \cdot \cos \beta = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \beta = \frac{dy}{dt},$$

$$v_z = v \cdot \cos \gamma = \frac{ds}{dt} \cdot \cos \gamma = \frac{dz}{dt},$$

$$x = \int v_x \cdot dt,$$

$$y = \int v_y \cdot dt,$$

$$z = \int v_z \cdot dt,$$

$$p_x = \frac{dv_x}{dt},$$

$$p_y = \frac{dv_y}{dt},$$

$$p_z = \frac{dv_z}{dt},$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2},$$

$$\cos \alpha' = \frac{p_x}{p},$$

$$\cos \beta' = \frac{p_y}{p},$$

$$\cos \gamma' = \frac{p_z}{p}.$$

Nun war $p_t = \frac{dv}{dt},$

folglich ist auch $\cos(p, p_t) = \frac{p_t}{p}$ und $p_n = p \cdot \sin(p, p_t),$
wenn (p, p_t) den Winkel zwischen der resultirenden und
der tangentialen Beschleunigung bedeutet.

c) Gegeben sind in den Achsen X, Y, Z mehrere Bewegungen x, y und z des Punktes P als Functionen der Zeit t und es sollen die resultirende Geschwindigkeit v , die Tangentialbeschleunigung p_t , die resultirende Beschleunigung p und eine Gleichung für die Bahn s bestimmt werden.

Es gilt in der Richtung der X -Achse

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + \dots = \Sigma(x), \\ v_x &= \frac{dx}{dt}, \\ p_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \end{aligned}$$

in der Richtung der Y -Achse ist

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 + \dots = \Sigma(y), \\ v_y &= \frac{dy}{dt}, \\ p_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned}$$

und in der Richtung der Z -Achse ist

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 + \dots = \Sigma(z), \\ v_z &= \frac{dz}{dt}, \\ p_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Im Uebrigen gelten die Resultate des vorigen Falles.

d) Weiter kann man sich vorstellen, dass ein mathematischer Punkt gleichzeitig mehrere veränderliche Bewegungen resp. Geschwindigkeiten nach verschiedenen und beliebigen Richtungen besitzt, welche ersteren sowohl die resultirende Bewegung, als auch deren Geschwindigkeit und Beschleunigung bedingen.

Zur Bestimmung der letzteren verfährt man dann einfach folgendermassen:

Man legt durch den Anfangspunkt der Bewegung ein rechtwinkliges Dreiachsensystem X, Y, Z , misst die Winkel der Einzelgeschwindigkeiten zu diesen Achsen und projicirt die Einzelgeschwindigkeiten in die letzteren.

Versteht man nun unter v_x, v_y, v_z die Achsengeschwindigkeiten herrührend von $v_1, v_2, \dots$ im Raume, dann bleibt die weitere Rechnung dieselbe wie im vorigen Falle.

Man bildet $v_x = \Sigma(v_x), v_y = \Sigma(v_y), v_z = \Sigma(v_z)$ und aus

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

die resultirende Geschwindigkeit u. s. w.

e) Theorie des augenblicklichen Drehpunktes.

Betrachtet man eine ganz beliebige Bewegung nur während eines Augenblickes, so darf man dieselbe während des unendlich kleinen Zeitraumes mit einer Drehbewegung vertauschen, durch welche Annahme

die „Theorie des augenblicklichen Drehpunktes“ entsteht.

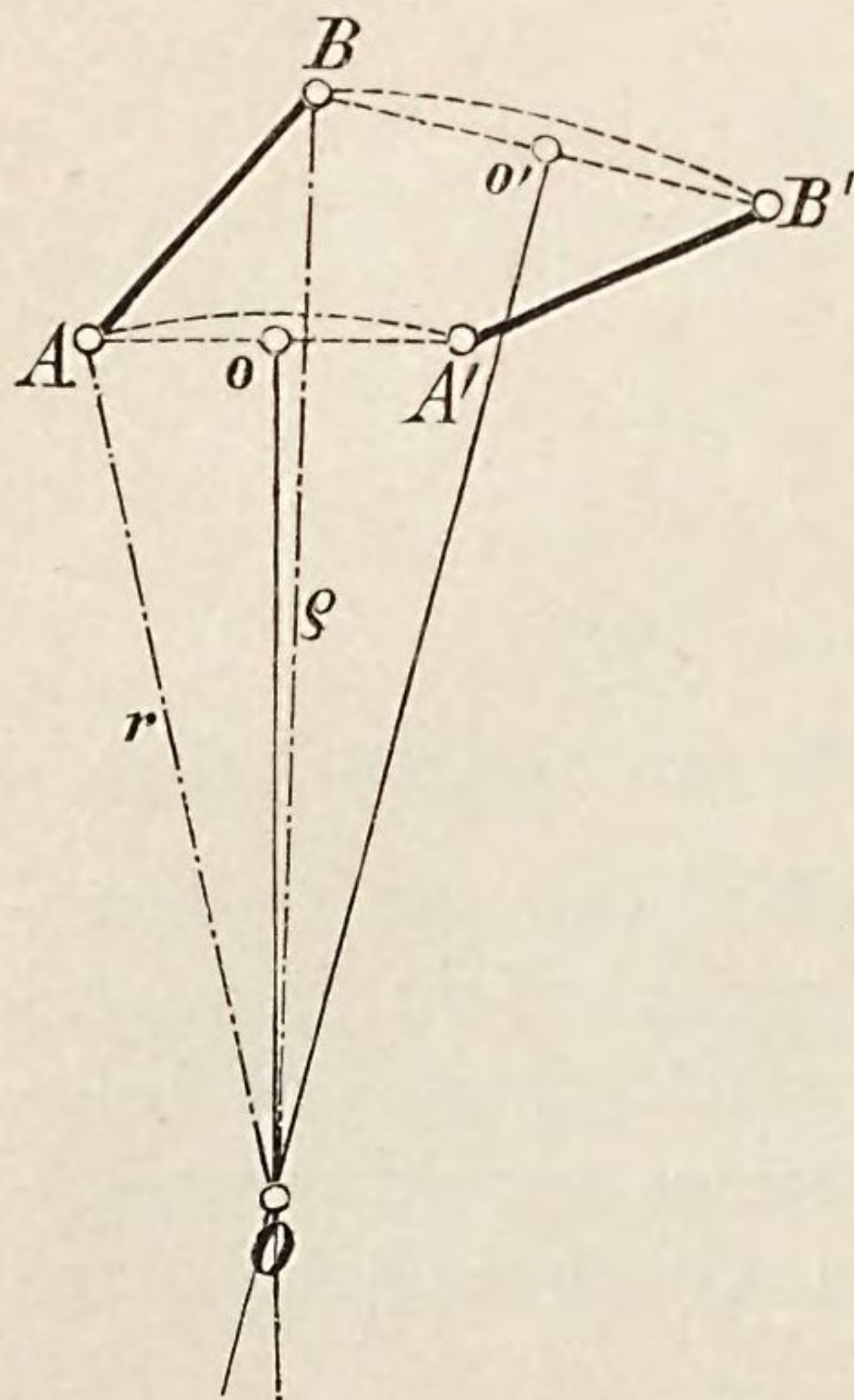


Fig. 49.

Eine Gerade AB (Fig. 49) gelange in der Bildebene aus ihrer Anfangslage AB auf einem ganz beliebigen Wege in die Endlage $A'B'$. Ein anderesmal erfolge dieselbe Lagenveränderung durch eine Verdrehung um einen in der Bildebene gelegenen Drehpunkt, welcher gefunden wird, indem man die Geraden AA' und BB' zieht, die Halbierungspunkte o und o' derselben bestimmt und in diesen Punkten die Geraden $Oo \perp AA'$ und $Oo' \perp BB'$ zieht. Der Durchschnitt O dieser Linien bildet den Drehpunkt und r beispielsweise den Drehungshalbmesser für den Punkt A , ρ den Halbmesser für B .

Macht man nun die ganze Bewegung unendlich klein, so fällt die wahre Bewegung mit der Drehbewegung zusammen, ferner A und A' mit o und B und B' mit o' , weshalb in diesem Falle die Linien $Oo = r$ und $Oo' = \varrho$ werden; oA' senkrecht zu r aber wird die augenblickliche Bewegungsrichtung für A und $o'B'$ senkrecht zu ϱ die augenblickliche Bewegungs- resp. Drehrichtung für B . O nennt man in diesem Falle den augenblicklichen Drehpunkt.

Sind nun die augenblicklichen Bewegungsrichtungen v und w (Fig. 50) der beiden Punkte A und B gegeben, so findet man den augenblicklichen Drehpunkt durch den Durchschnitt der in A und B zu v und w errichteten Senkrechten.

Bedeuteten zugleich (Fig. 50) v und w die Geschwindigkeiten der Punkte A und B nach Grösse und Richtung, r und ϱ die respectiven augenblicklichen Drehungshalbmesser und ω die Winkelgeschwindigkeit, dann ist

$$w = \varrho \cdot \omega,$$

$$v = r \cdot \omega$$

und

$$\frac{w}{v} = \frac{\varrho}{r}.$$

Da nun ein jeder Punkt P der Linie AB an der augenblicklichen Drehung Theil nimmt, so kann, wenn allgemein die Geschwindigkeit c und der zugehörige Halbmesser ϱ_1 genannt wird, geschrieben werden:

$$\frac{c}{v} = \frac{\varrho_1}{r}$$

oder

$$c = v \cdot \frac{\varrho_1}{r}.$$

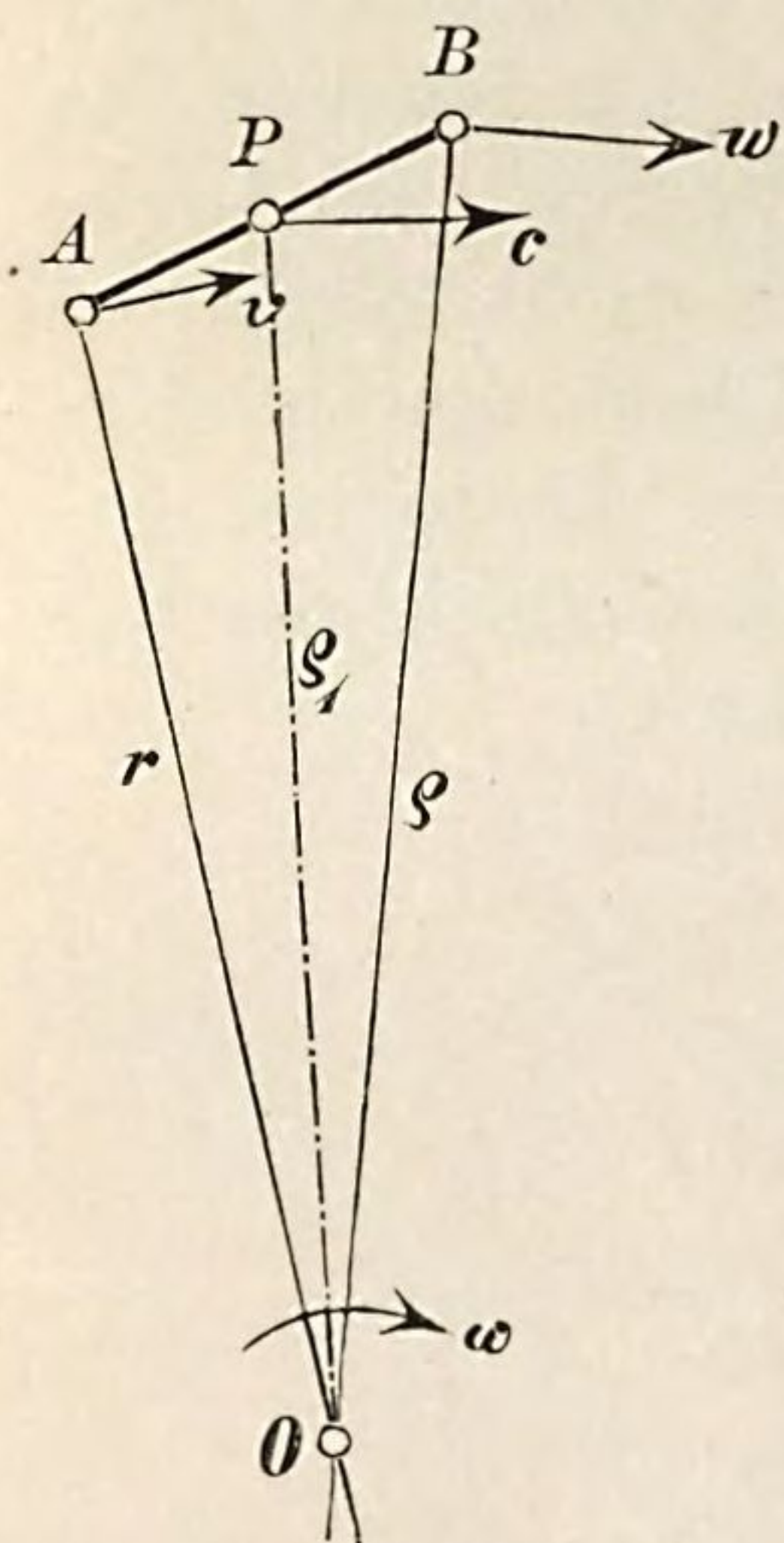


Fig. 50.

Es ergibt sich demnach der Satz: „die Geschwindigkeiten von zwei beliebigen Punkten der Geraden verhalten sich wie ihre zugehörigen augenblicklichen Drehungshalbmesser“.

Sind die augenblicklichen Bewegungsrichtungen zweier Eckpunkte eines Dreiecks in der Dreiecksebene gegeben, so ist nach Vorigem auch der in der letzteren liegende augenblickliche Drehpunkt bekannt, und es lassen sich dann nicht nur die augenblicklichen Bewegungsrichtungen des dritten Eckpunktes und eines jeden Punktes vom Dreiecksumfange bestimmen, sondern auch die eines jeden Punktes der Dreiecksfläche und der Erweiterung derselben.

Sind ferner drei nicht in einer Geraden liegende Punkte einer einem Körper angehörenden Ebene gegeben und die in dieser Ebene liegenden Bewegungsrichtungen von mindestens zweien jener Punkte, so lässt sich nach Obigem für den Punkt und zugleich für die ganze Ebene die auf derselben senkrecht stehende augenblickliche Drehachse bestimmen und mit Hilfe deren auch die augenblickliche Bewegungsrichtung eines jeden Körperpunktes.

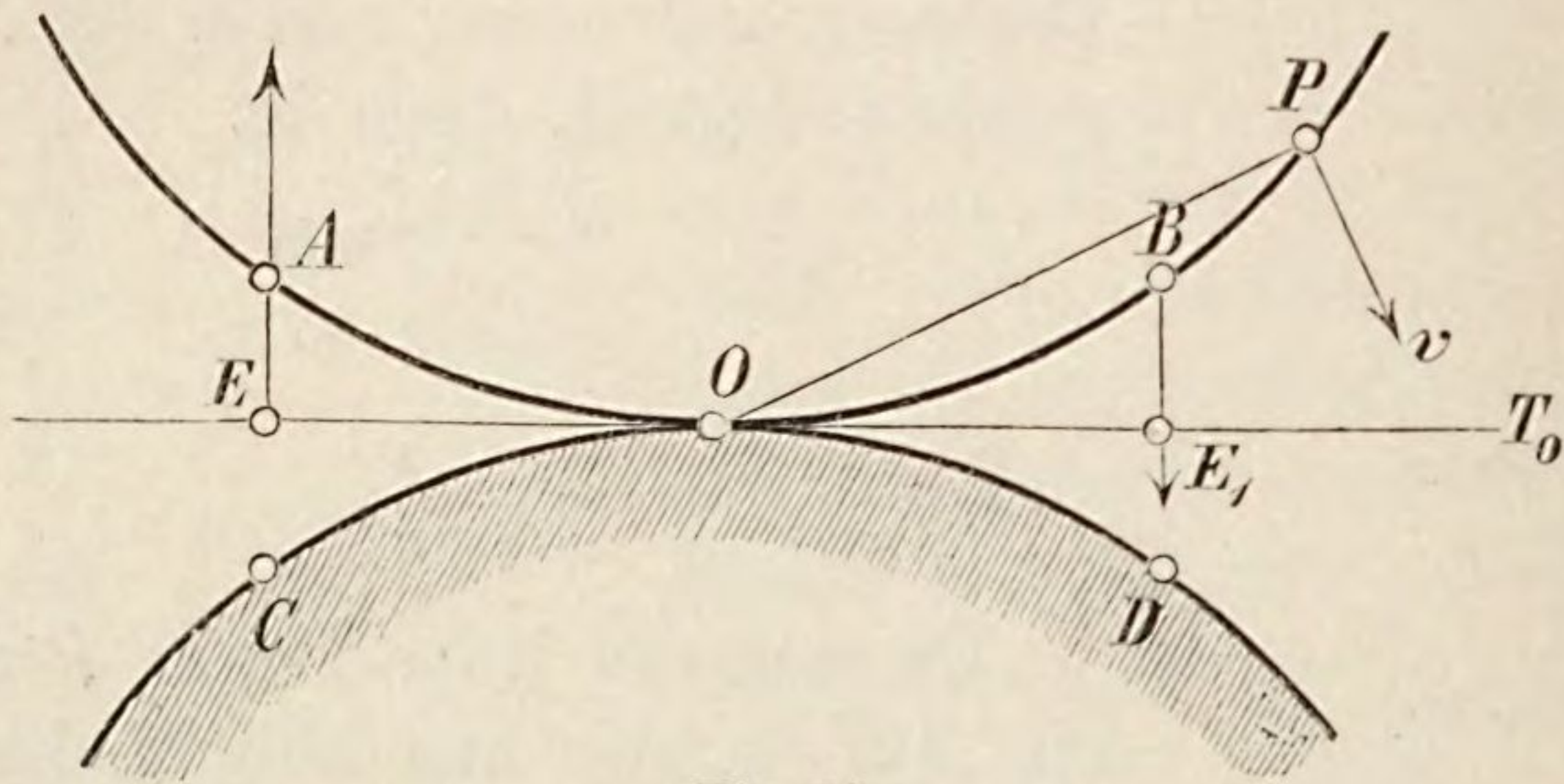


Fig. 51.

Rollen zwei ebene Curven in der Bildebene aufeinander, d. h. haben dieselben stets einen gemeinsamen Berührungspunkt, und legt dieser auf beiden Curven gleiche Wege zurück, so ist die Lage des augenblicklichen Drehpunktes ebenfalls leicht zu ermitteln; wie sich zeigen wird, ist der augenblickliche Berührungspunkt der Curven zugleich auch der augenblickliche Drehpunkt.

Wegen des Rollens ist $\widehat{AO} = \widehat{CO}$ und $\widehat{BO} = \widehat{DO}$ (Fig. 51). Macht man diese Bögen unendlich klein, dann fallen dieselben mit der Tangente T_o in O zusammen, und die augenblicklichen Drehrichtungen EA und BE_1 der Punkte A und B werden dann Senkrechte zur Tangente T_o . In diesem Falle bilden aber $EO = AO$ und $E_1O = BO$ die Drehungshalbmesser, als deren Durchschnitt O anzusehen ist. Demnach ist O , der jeweilige Berührungspunkt, stets augenblicklicher Drehpunkt und beispielsweise OP der augenblickliche Drehungshalbmesser und v , rechtwinklig zu OP , die augenblickliche Bewegungsrichtung des Punktes P .

Eine mathematische Gerade AB (Fig. 52) werde im Sinne der eingezeichneten Pfeile mit ihren Endpunkten A und B an

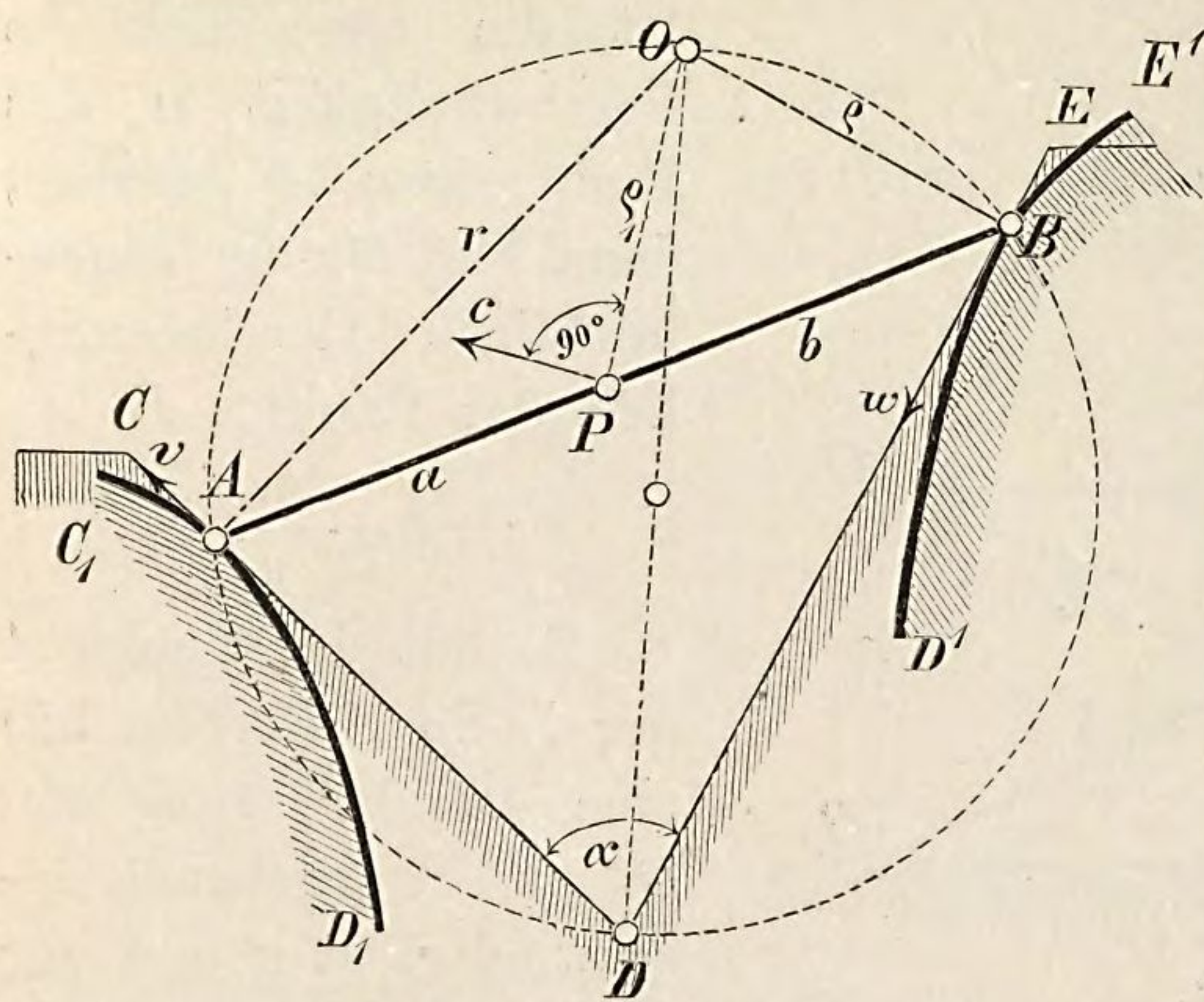


Fig. 52.

den in der Bildebene liegenden Geraden CD und ED oder an den Curven C_1D_1 und $E'D'$ bewegt, wodurch die Bewegungsrichtungen v und w dieser Punkte gegeben sind.

Errichtet man nun in A und B die Senkrechten AO und BO zu den Linien CD und ED , so ist

ihr Durchschnitt O der augenblickliche Drehpunkt der Geraden AB , folglich auch OP der augenblickliche Drehungshalbmesser des beliebigen Punktes P und $c \perp OP$ die Richtung der augenblicklichen Bewegung desselben.

Hiernach dient aber die Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auch zur Construction der Tangenten an diejenige

Curve, welche ein beliebiger Punkt P der Linie AB beschreibt, resp. zur Bestimmung jener Curve selbst.

Ist $\alpha = 90^\circ$, dann gilt nach Fig. 53

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} = \frac{y}{b}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

d. h. der Punkt P beschreibt eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sind (Fig. 54). O wird augen-

blicklicher Drehpunkt der Geraden, c die wahre Richtung der Bewegung des Punktes P , also auch zugleich die Tangente in P .

Ist die augenblickliche Geschwindigkeit v des Endpunktes A gegeben, dann gilt für die augenblickliche Geschwindigkeit des Punktes P

$$c = v \cdot \frac{\rho_1}{r}.$$

Besitzt der Punkt A der Linie AB (Fig. 55) eine Drehbewegung um O_1 mit der gegebenen Geschwindigkeit v und der Punkt B eine geradlinig

fortschreitende mit der unbekannten Geschwindigkeit w , so gilt zur Bestimmung derselben

$$w = v \cdot \frac{\rho}{r}$$

und zur Berechnung der Geschwindigkeit c eines beliebigen Punktes P

$$c = v \cdot \frac{\rho_1}{r}.$$

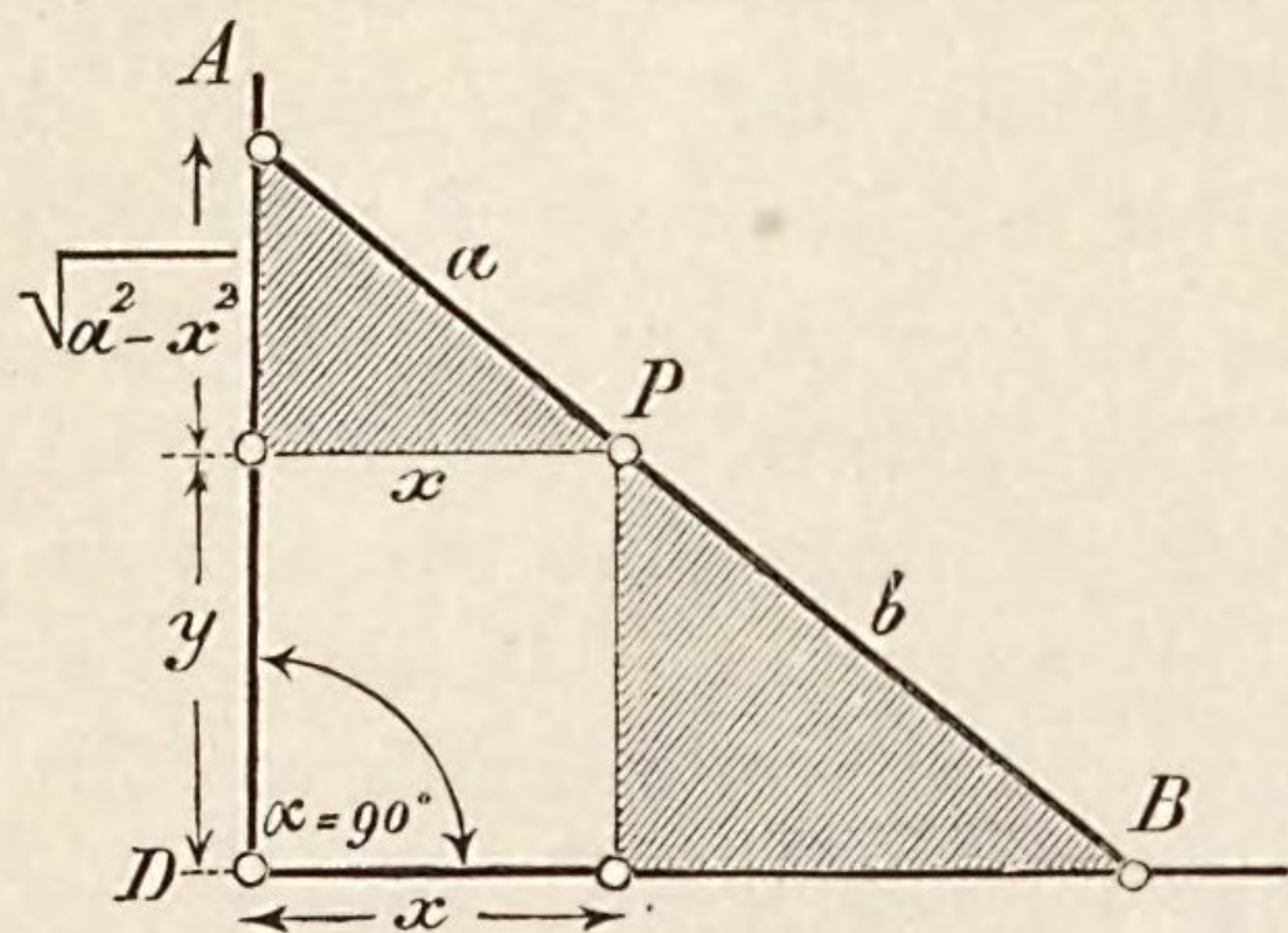


Fig. 53.

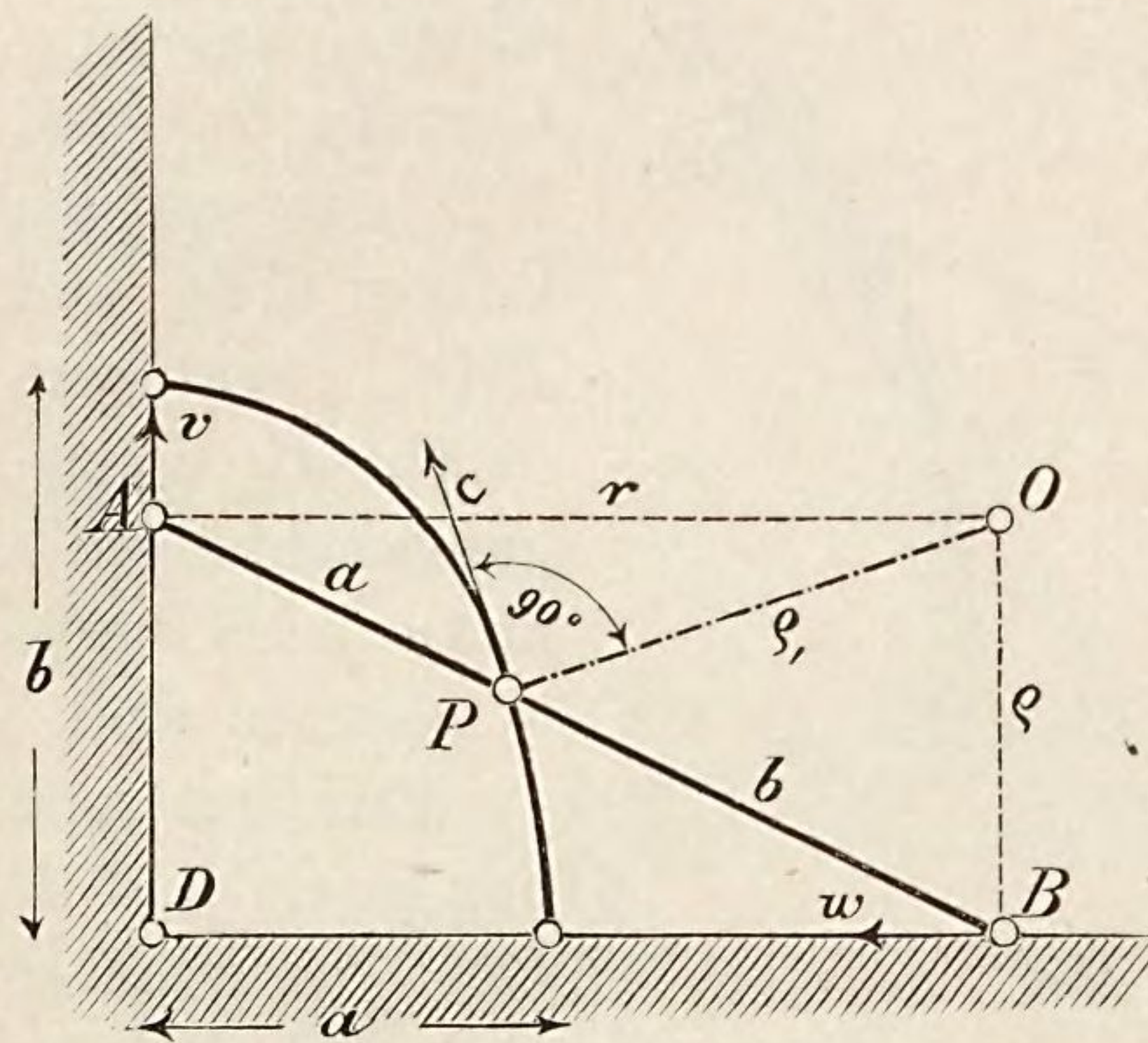


Fig. 54.

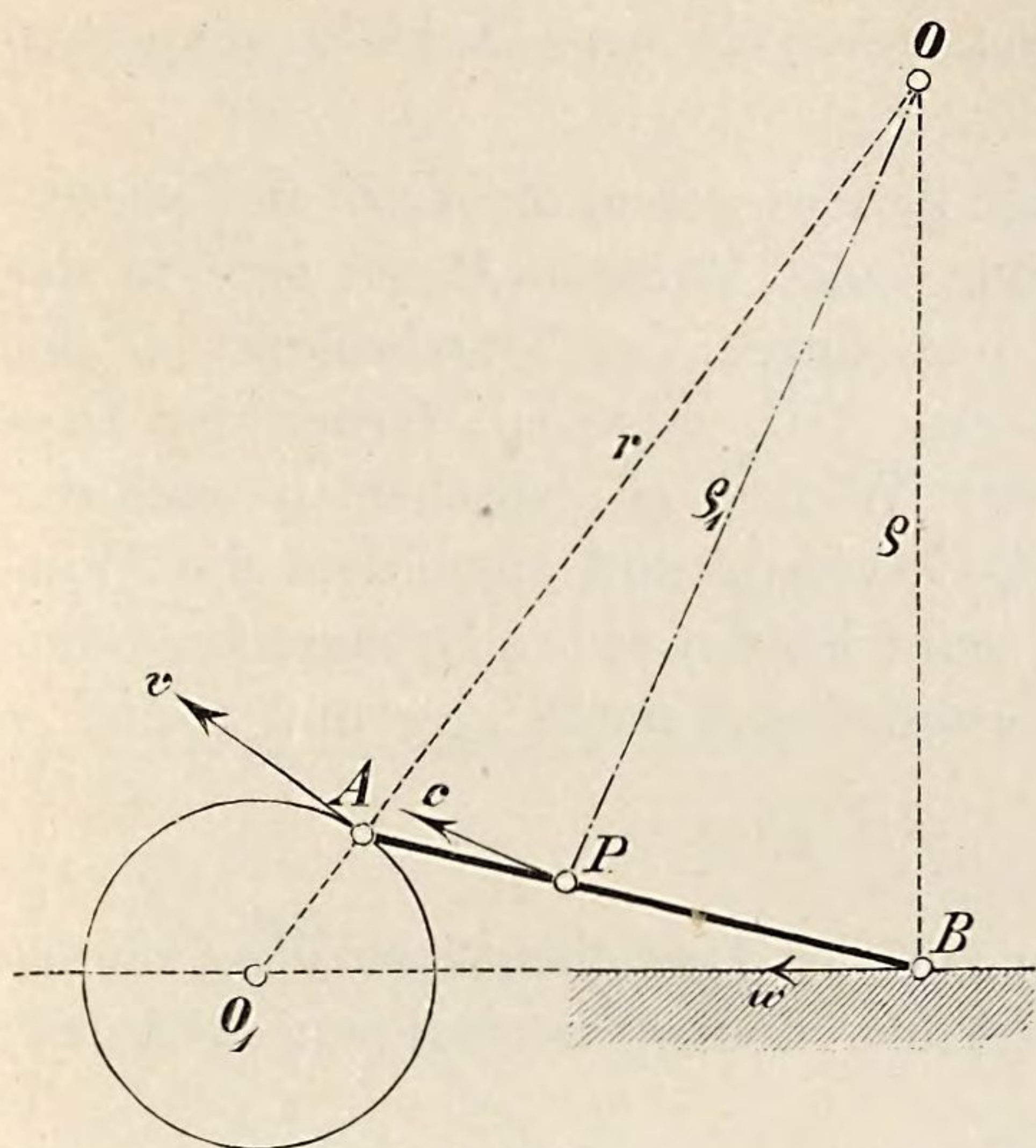


Fig. 55.

Ein Kreis rollt in der Bildebene an einer Geraden, wobei ein Punkt P (Fig. 56) des Kreises die gemeine Cykloide beschreibt. Da der Berührungspunkt O den augenblicklichen Drehpunkt bildet, so ist ϱ der augenblickliche Drehungshalbmesser und $v \perp \varrho$ die augenblickliche Bewegungsrichtung.

ϱ wächst von o bis $2r$ und fällt wieder bis auf o .

Rollt eine Gerade in der Bildebene auf einem Kreise, so erzeugt dabei ein Punkt P (Fig. 57) derselben eine Evolvente;

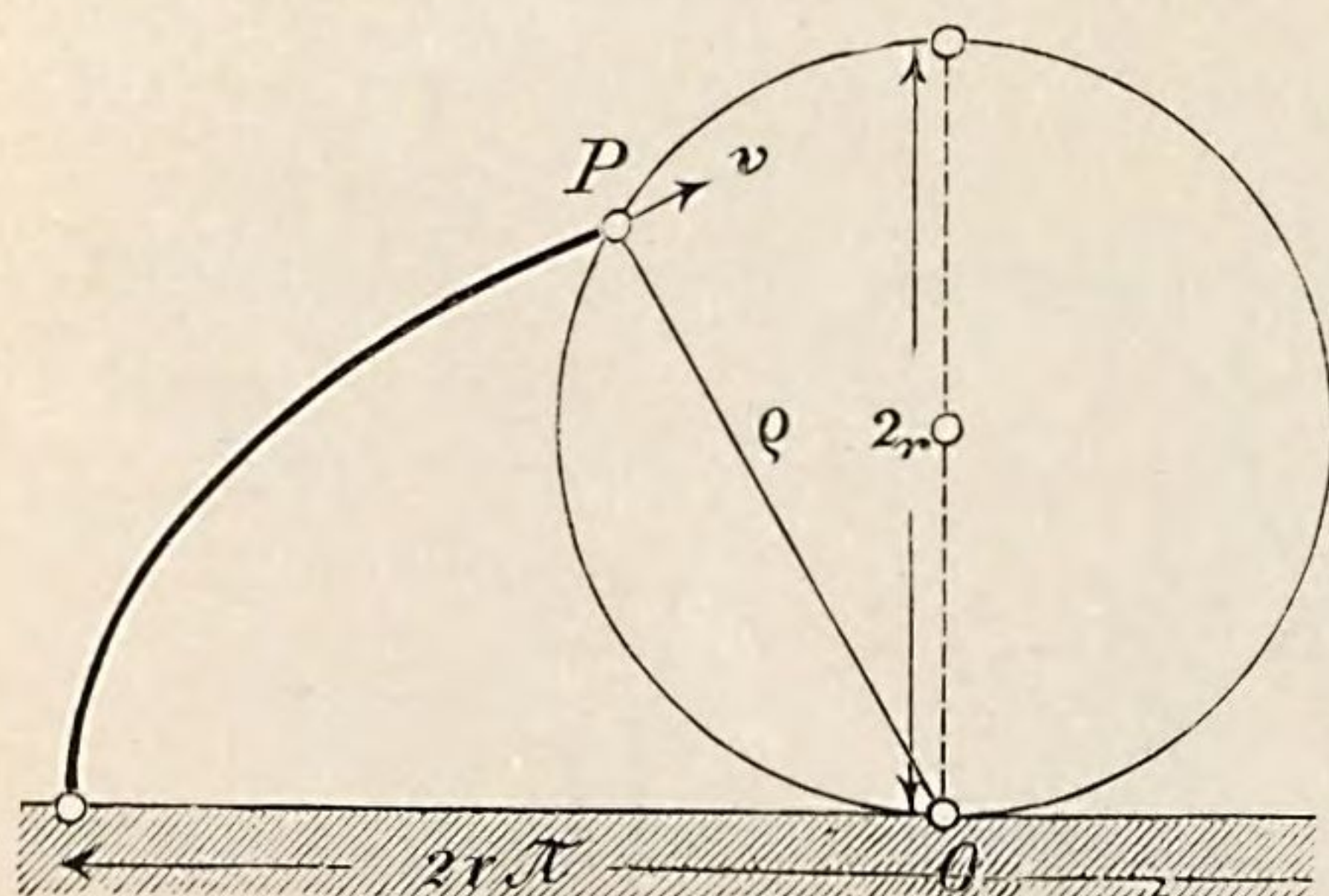


Fig. 56.

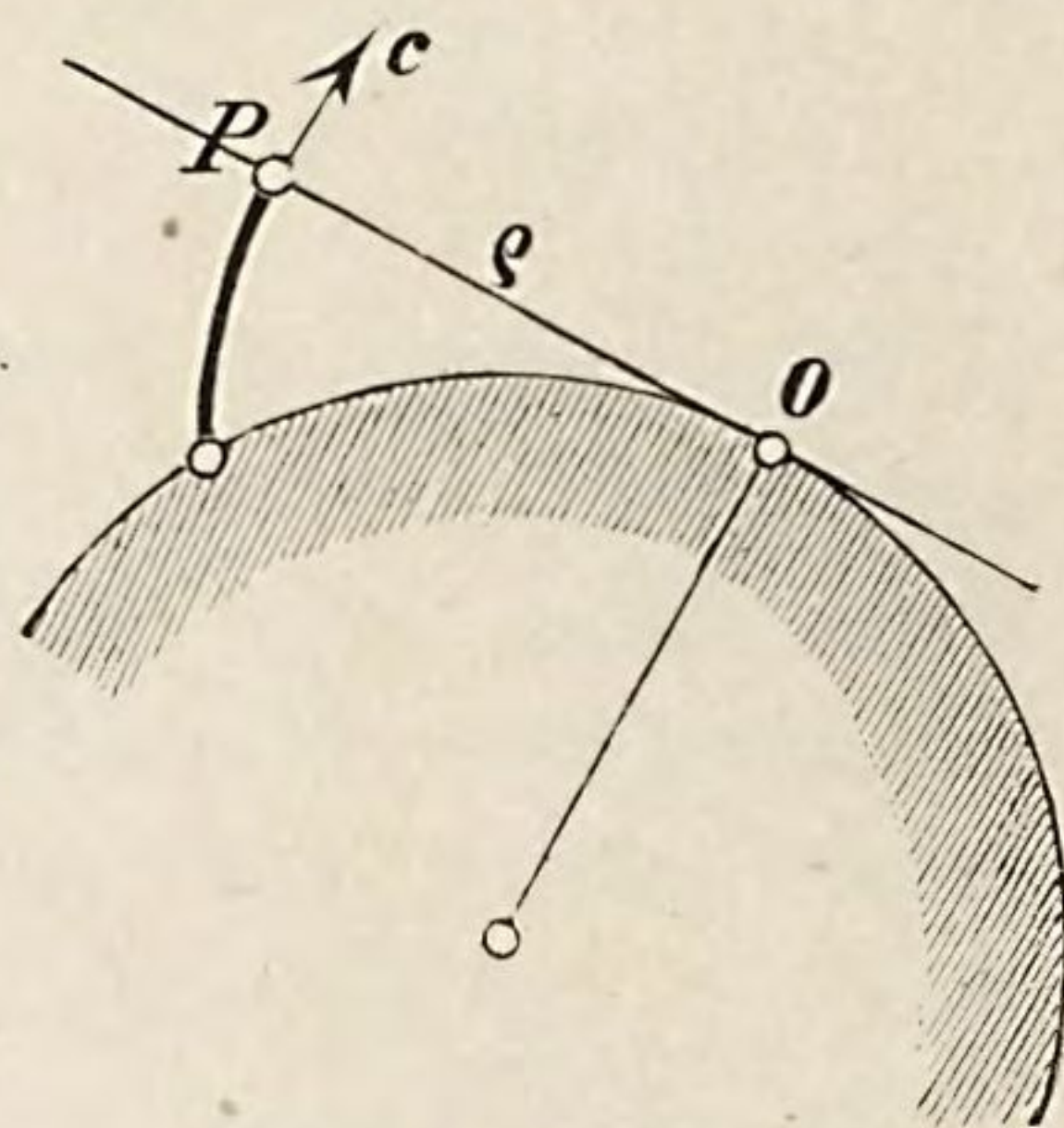


Fig. 57.

der Berührungspunkt O wird augenblicklicher Drehpunkt, ϱ augenblicklicher Drehungshalbmesser und $c \perp \varrho$ die Bewegungsrichtung des Punktes P in der Evolventenbahn.

f) Die Drehbewegung eines Punktes P um eine gegebene Drehachse kann als die Zusammensetzung von augenblick-

lichen Drehbewegungen um gegebene Achsen angesehen werden.

Ist das rechtwinklige Achsensystem X, Y, Z und ausserdem eine Drehbewegung eines Punktes P um eine in der XY -Ebene liegende und durch den Durchschnitt O der Achsen laufende Drehachse OO_1 gegeben, ferner der Drehungshalbmesser ϱ , der Winkel φ zwischen ϱ und der Horizontalprojection O_1P_1 von ϱ und ausserdem die Winkelgeschwindigkeit ω , dann ist die wahre Drehgeschwindigkeit des Punktes P , dessen Coordinaten x, y und z sind,

$$v = \varrho \cdot \omega.$$

Zerlegt man nun v „in der Drehebene“ in die Componenten v_z nach der Z -Achse und v_n normal zur Z -Achse, dann folgt (Fig. 58)

$$v_z = -v \cdot \cos \varphi = -\varrho \cdot \omega \cdot \cos \varphi,$$

$$v_n = v \cdot \sin \varphi = \varrho \cdot \omega \cdot \sin \varphi.$$

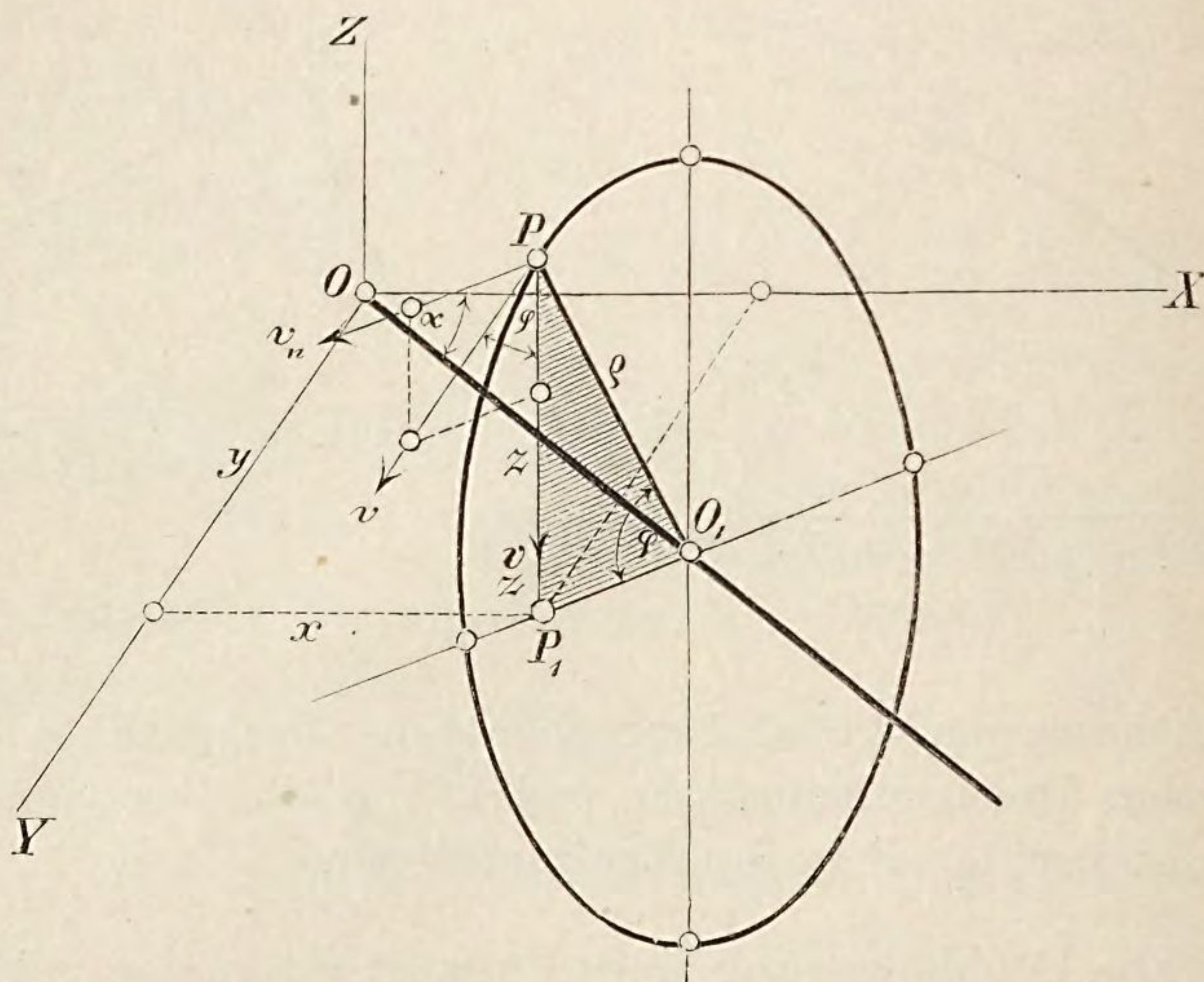


Fig. 58.

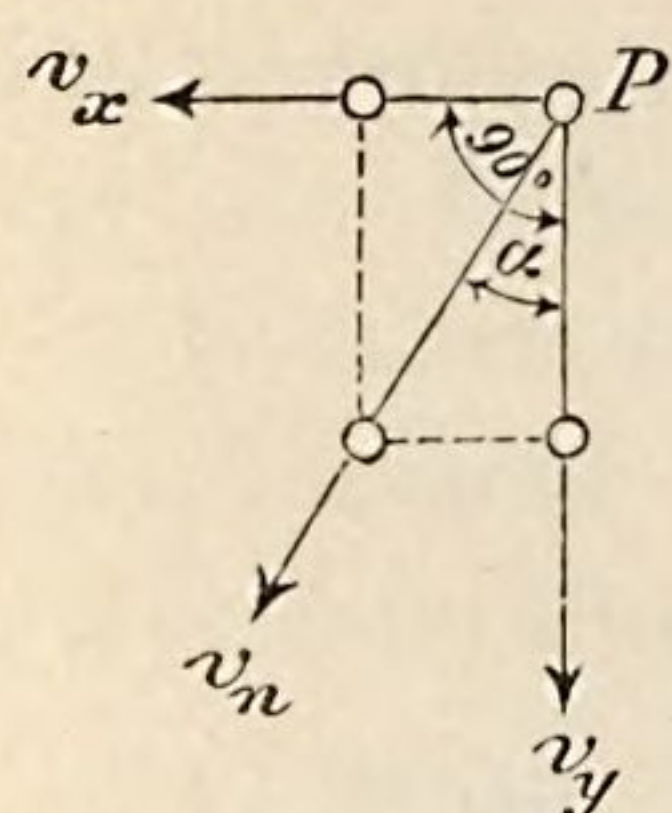


Fig. 59.

Zerlegt man ferner v_n in die Richtung der X - und Y -Achse (Fig. 59), so ergibt sich, wenn die Drehachse OO_1 um den Winkel α zur X -Achse geneigt ist,

$$v_y = v_n \cdot \cos \alpha = \varrho \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot \cos \alpha,$$

$$v_x = -v_n \cdot \sin \alpha = -\varrho \cdot \omega \cdot \sin \varphi \cdot \sin \alpha.$$

Nun ist aber

$$\varrho \cdot \sin \varphi = z$$

$$\varrho \cdot \cos \varphi = O_1 P_1$$

und nach beistehender Fig. 60 auch

$$\varrho \cdot \cos \varphi = O_1 P_1$$

$$= y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha,$$

folglich ergibt sich nach Einsetzung dieser Werthe

$$v_z = x \cdot \omega \cdot \sin \alpha - y \cdot \omega \cdot \cos \alpha,$$

$$v_y = z \cdot \omega \cdot \cos \alpha,$$

$$v_x = -z \cdot \omega \cdot \sin \alpha.$$

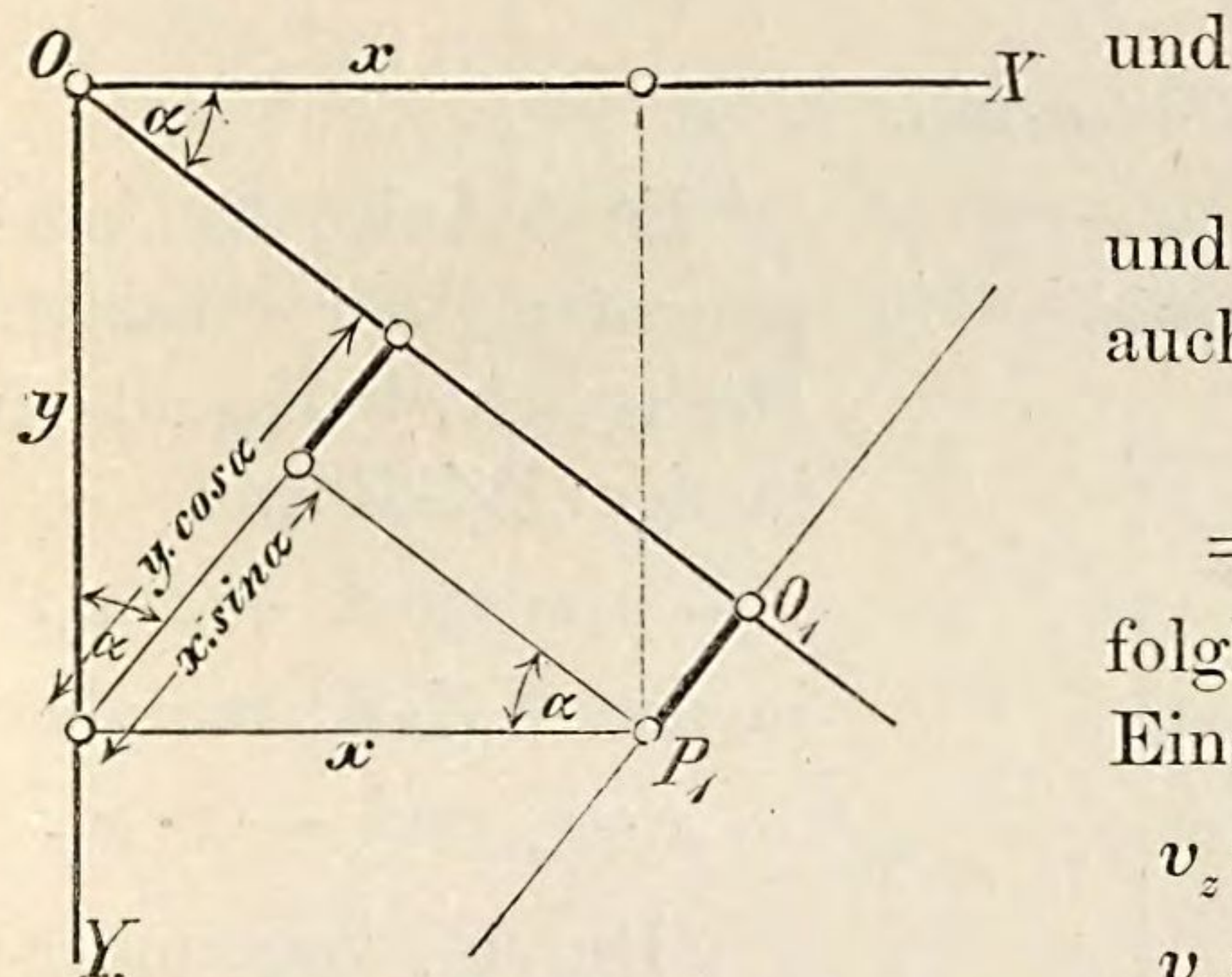


Fig. 60.

Betrachtet man nun — in den positiven Achsen nach O

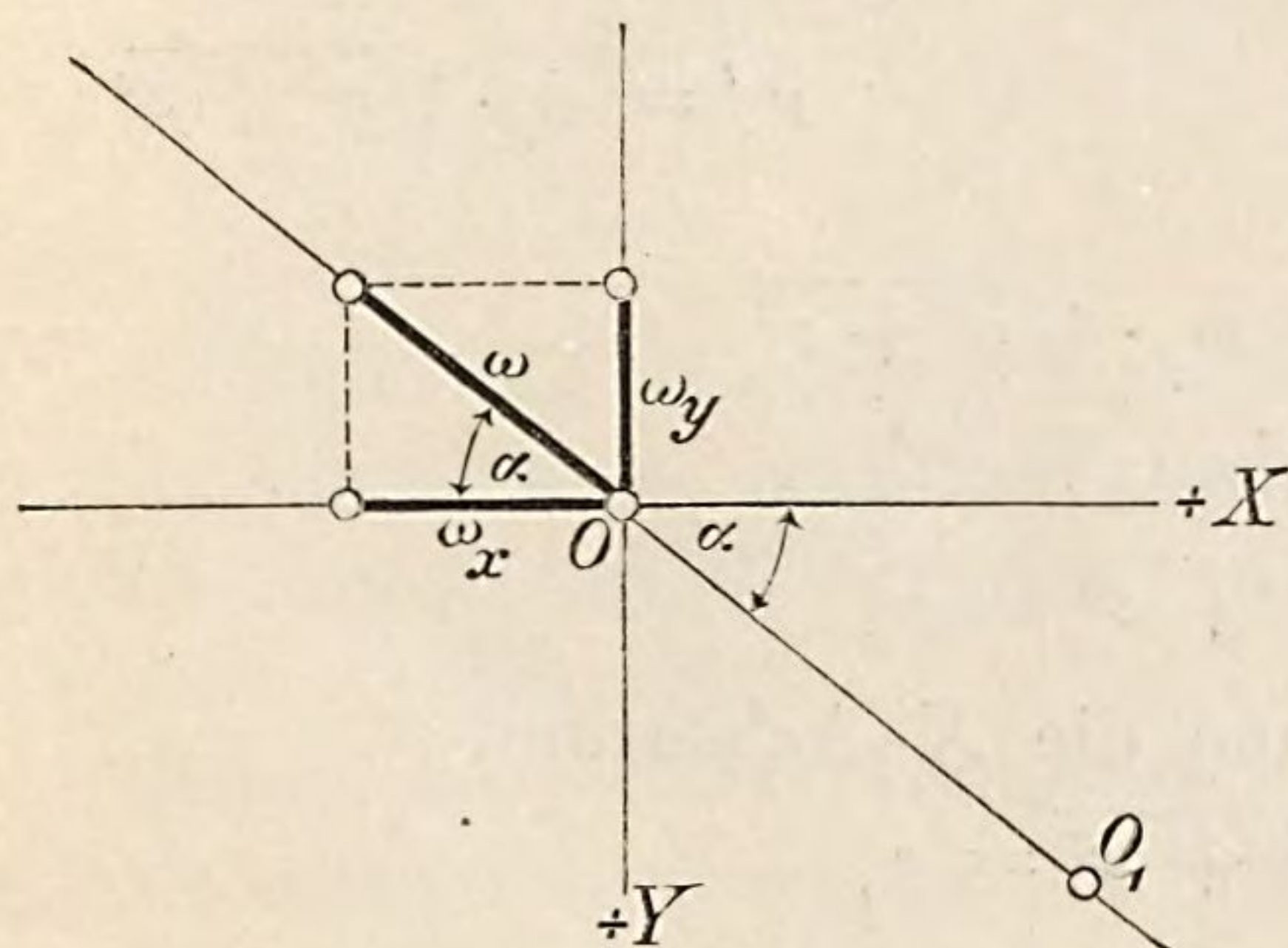


Fig. 61.

hingesehen — eine Drehung von links nach rechts als eine positive, die von rechts nach links als eine negative und trägt man die Winkelgeschwindigkeit ω auf der Drehachse OO_1 auf eine Gerade, im vorliegenden Falle von O aus negativ auf, so ergeben sich durch Zer-

legung derselben nach den Achsenrichtungen die Winkel-

geschwindigkeiten der augenblicklichen Drehbewegungen um die X -Achse (Fig. 61)

$$\omega_x = \omega \cdot \cos \alpha$$

und um die Y -Achse

$$\omega_y = \omega \cdot \sin \alpha.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe folgt aber Fig. 62

$$v_z = x \cdot \omega_y - y \cdot \omega_x,$$

$$v_y = z \cdot \omega_x$$

und

$$v_x = -z \cdot \omega_y.$$

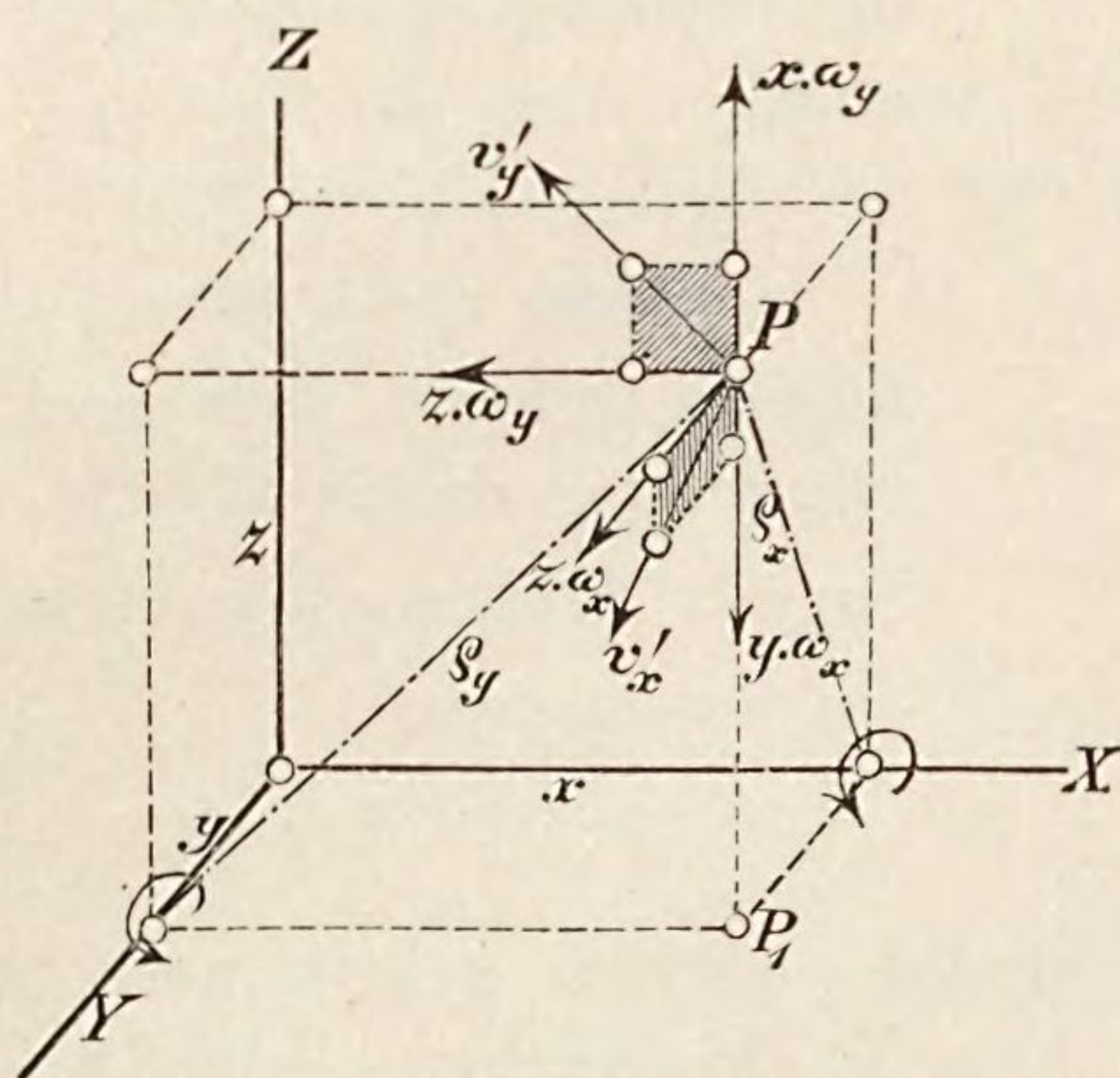


Fig. 62.

Es sind also die Komponenten der wahren Drehgeschwindigkeit v in der YZ -Ebene

$-y \cdot \omega_x$ und $+z \cdot \omega_x$,
in der XZ -Ebene aber

$$x \cdot \omega_y \text{ und } -z \cdot \omega_y.$$

Durch Zusammensetzung dieser Komponenten ergeben sich die augenblicklichen Drehgeschwindigkeiten

$$v'_x = \omega_x \cdot \sqrt{y^2 + z^2}$$

um die X -Achse und

$$v'_y = \omega_y \cdot \sqrt{x^2 + z^2}$$

um die Y -Achse; in welchen Werthen

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \varrho_x$$

ein Drehungshalbmesser um die X -Achse und

$$\sqrt{x^2 + z^2} = \varrho_y$$

ein Drehungshalbmesser um die Y -Achse ist.

Die gegebene Drehbewegung eines Punktes um die Achse OO_1 kann also in „jedem Augenblicke“ in eine

Drehbewegung um die X -Achse und in eine Drehbewegung um die Y -Achse zerlegt werden.

Würden nun die beiden augenblicklichen Drehbewegungen bezogen auf die X - und Y -Achse mit ihren Winkelgeschwindigkeiten $\omega_x = \omega \cdot \cos \alpha$ und $\omega_y = \omega \cdot \sin \alpha$ von vorn herein gegeben sein, so würde sich durch Zusammen-
setzen die resultierende Winkelgeschwindigkeit ω aus

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$$

berechnen.

Liegt hingegen die Drehachse OO_1 (Fig. 63) der wahren Drehbewegung beliebig im Raum XYZ , so kann die Winkelgeschwindigkeit ω der letzteren angesehen werden als die

Resultierende aus den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_x = \omega \cdot \cos \alpha,$$

$$\omega_y = \omega \cdot \cos \beta$$

und

$$\omega_z = \omega \cdot \cos \gamma$$

von drei augenblicklichen Drehbewegungen je um die X -, Y - und Z -Achse; dann ist

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

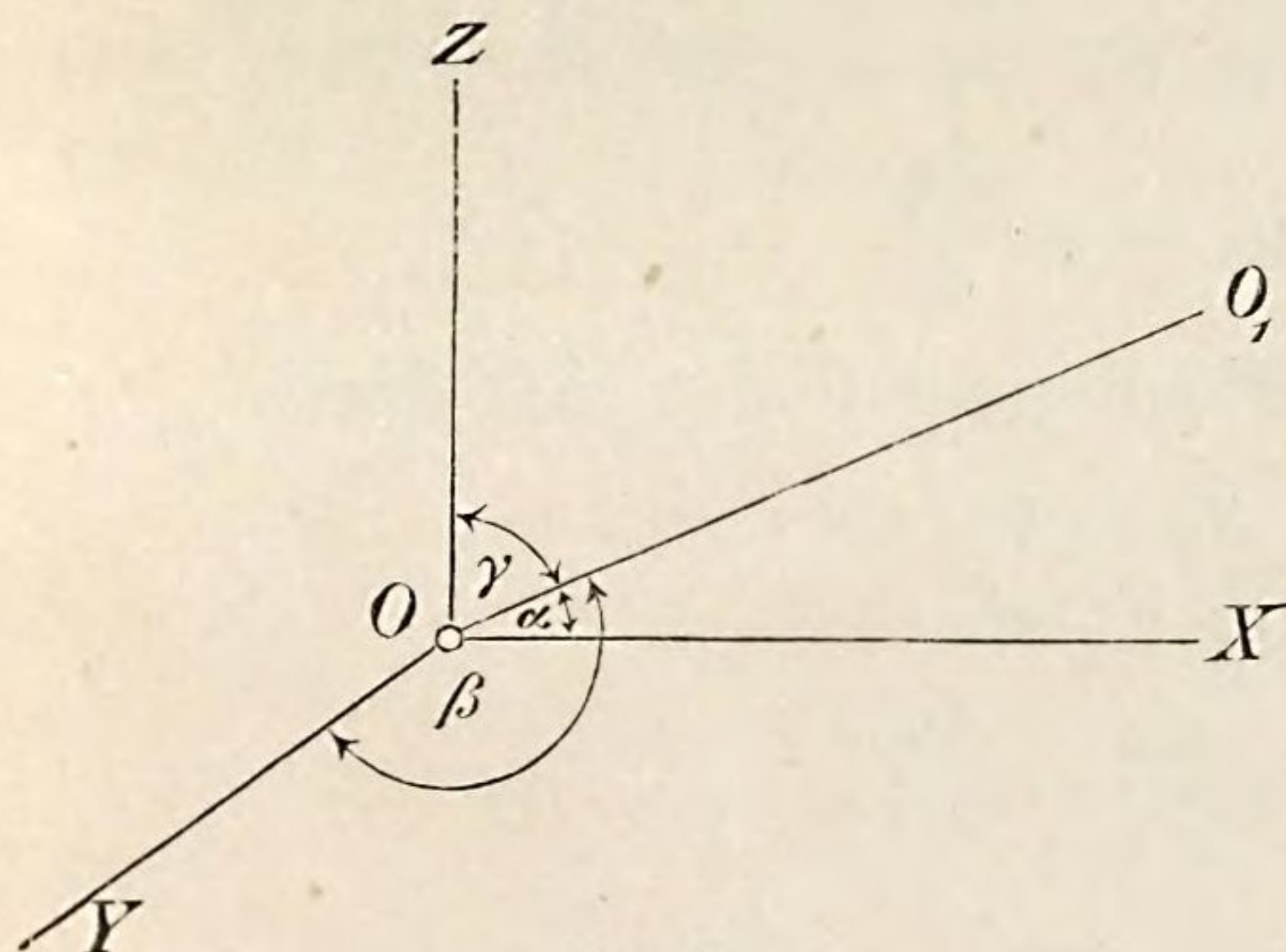


Fig. 63.

g) Eine ungleichförmig krummlinige Bewegung in derselben Ebene kann auch angesehen werden als das Resultat gleichzeitiger fortschreitender und Dreh-Bewegung eines Punktes P (Fig. 64).

Bedeutet v_1 die veränderliche Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung in der Richtung des veränderlichen Drehungshalbmessers ϱ , ist O der Drehpunkt, v_2 die veränderliche Geschwindigkeit der Drehbewegung und φ der Drehwinkel, ist ferner

dann ist

und $\varrho = F(t)$
 $\varphi = f(t),$

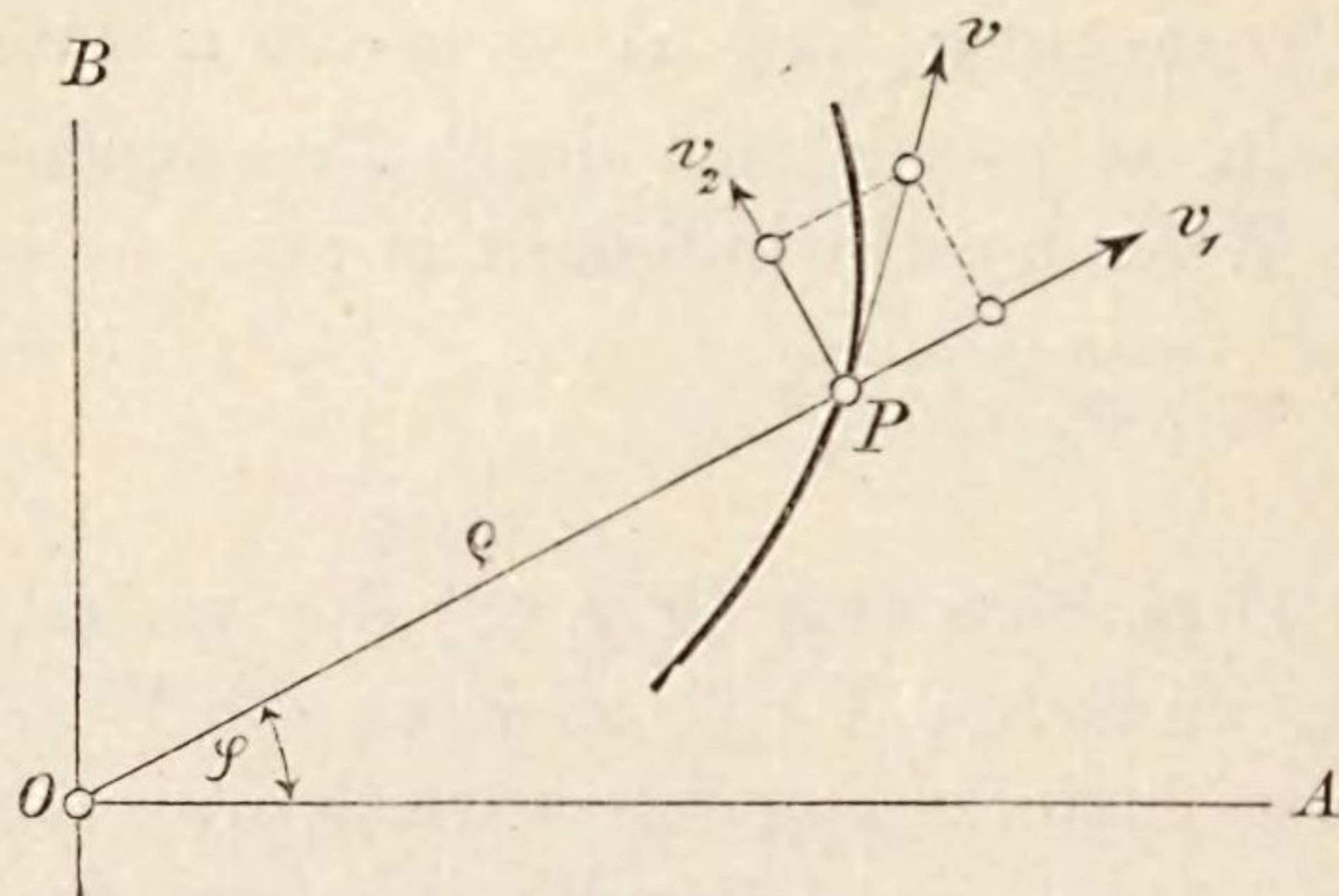


Fig. 64.

$$v_1 = \frac{d\varrho}{dt}$$

und die zugehörige Beschleunigung

$$p_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2\varrho}{dt^2};$$

ferner ist

$$v_2 = \varrho \cdot \omega,$$

die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

also $v_2 = \varrho \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$

Die zugehörige Beschleunigung findet sich durch

$$p_2 = \varrho \varepsilon,$$

die Winkelbeschleunigung ist aber

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

also $p_2 = \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} = \varrho \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$

Die resultierende oder Tangential-Geschwindigkeit beträgt

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

die tangentielle Beschleunigung

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

und der Weg

$$s = \int v \cdot dt.$$

Tritt zu den beiden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 noch eine dritte hinzu, welche eine Drehbewegung des Punktes P

um die B -Achse oder eine Verschiebung desselben parallel zu einer durch O laufenden auf der AB -Ebene senkrecht stehenden Achse hervorruft, so entsteht eine Curve im Raume.

h) Aus f) und g) ergibt sich, dass eine jede beliebige Bewegung entstanden gedacht werden kann aus einer fortschreitenden Bewegung in der Richtung einer Geraden O und aus einer augenblicklichen Drehbewegung um dieselbe; während nun erstere in 3 fortschreitende Bewegungen nach 3 senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z zerlegt werden kann, lässt sich die Drehbewegung in 3 augenblickliche Drehbewegungen um jene Achsen auflösen, **eine jede beliebige Bewegung hiernach aber „auf 3 fortschreitende Bewegungen je in einer der Achsen und auf 3 augenblickliche Drehbewegungen je um eine solche Achse zurückführen“.**

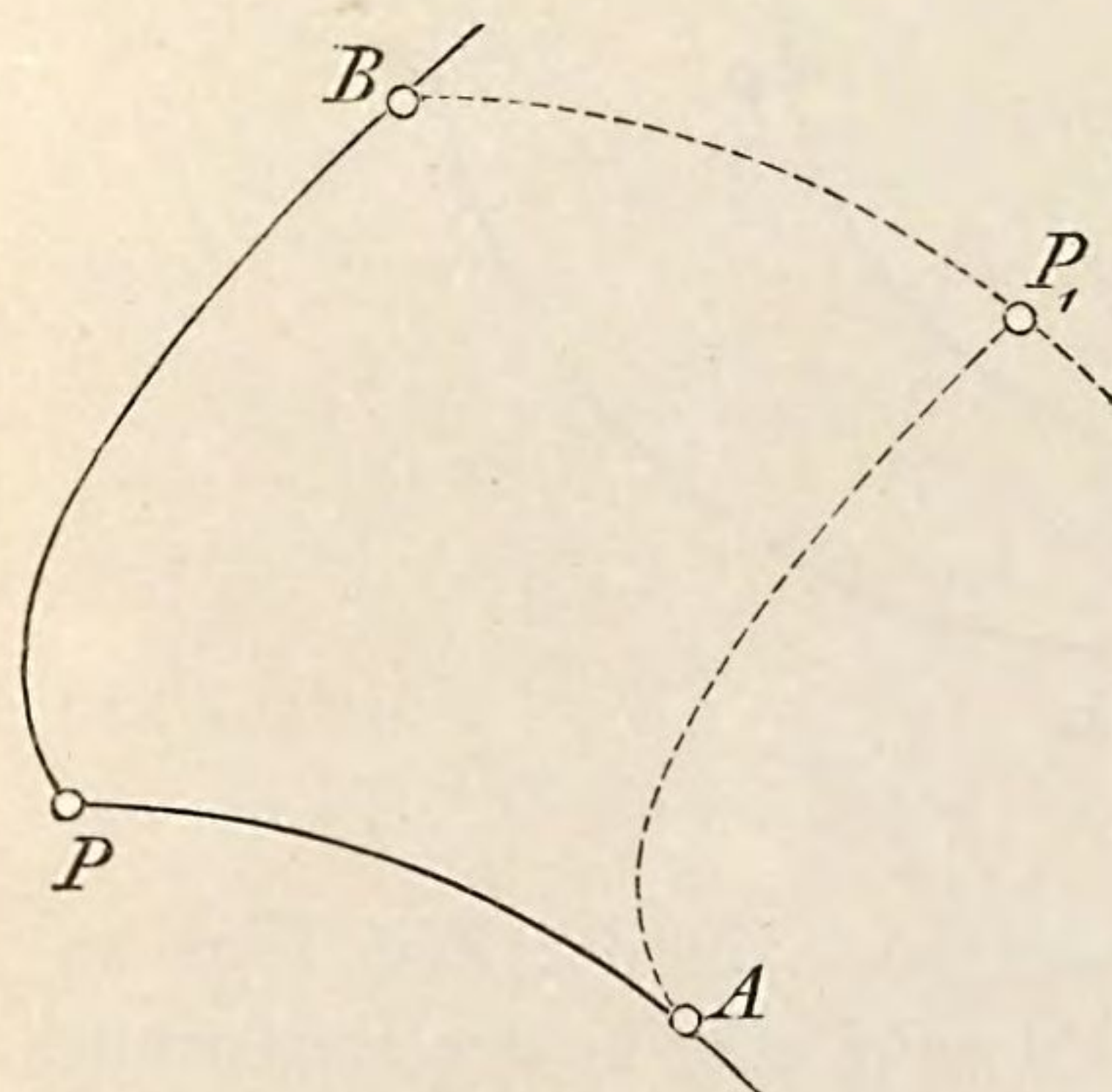


Fig. 65.

i) Noch ist das geometrische Parallelogrammgesetz zur Bestimmung der resultierenden Bahn anwendbar, wenn die beiden Bewegungen des Punktes zwei „beliebig“ fortschreitende sind. Sind beispielsweise die Curven PA und P_1B in der Bildebene gegeben, so kann man sich vorstellen, dass der Punkt erst von P nach A und hierauf von A nach P_1 läuft u. s. w. (Fig. 65).

Bewegt sich ein Punkt auf einer sich um einen festen Punkt O drehenden ebenen Fläche fortschreitend in der krummen Bahn $P, 1, 2, 3, \dots, P_1$ (Fig. 66), so nimmt der Punkt zugleich an der Drehbewegung jener Fläche Theil und zwar nach Massgabe desjenigen Ortes, welchen der Punkt augenblicklich auf der Bahn der

fortschreitenden Bewegung einnimmt. Der Drehungshalbmesser des Punktes wird hiernach ein veränderlicher.

Man kann sich nun vorstellen, dass die einzelnen Bewegungen aufeinander folgend stattfinden, dass der Punkt P erst die fortschreitende Bewegung auf der Scheibe und hierauf erst die Drehbewegung mit der Scheibe ausführe, wodurch sich — beispielsweise unter der Voraussetzung gleichförmig fortschreitender und gleichförmiger Dreh-Bewegung — die in Fig. 66 ausgeführte Construction der resultirenden Bahn ergibt.

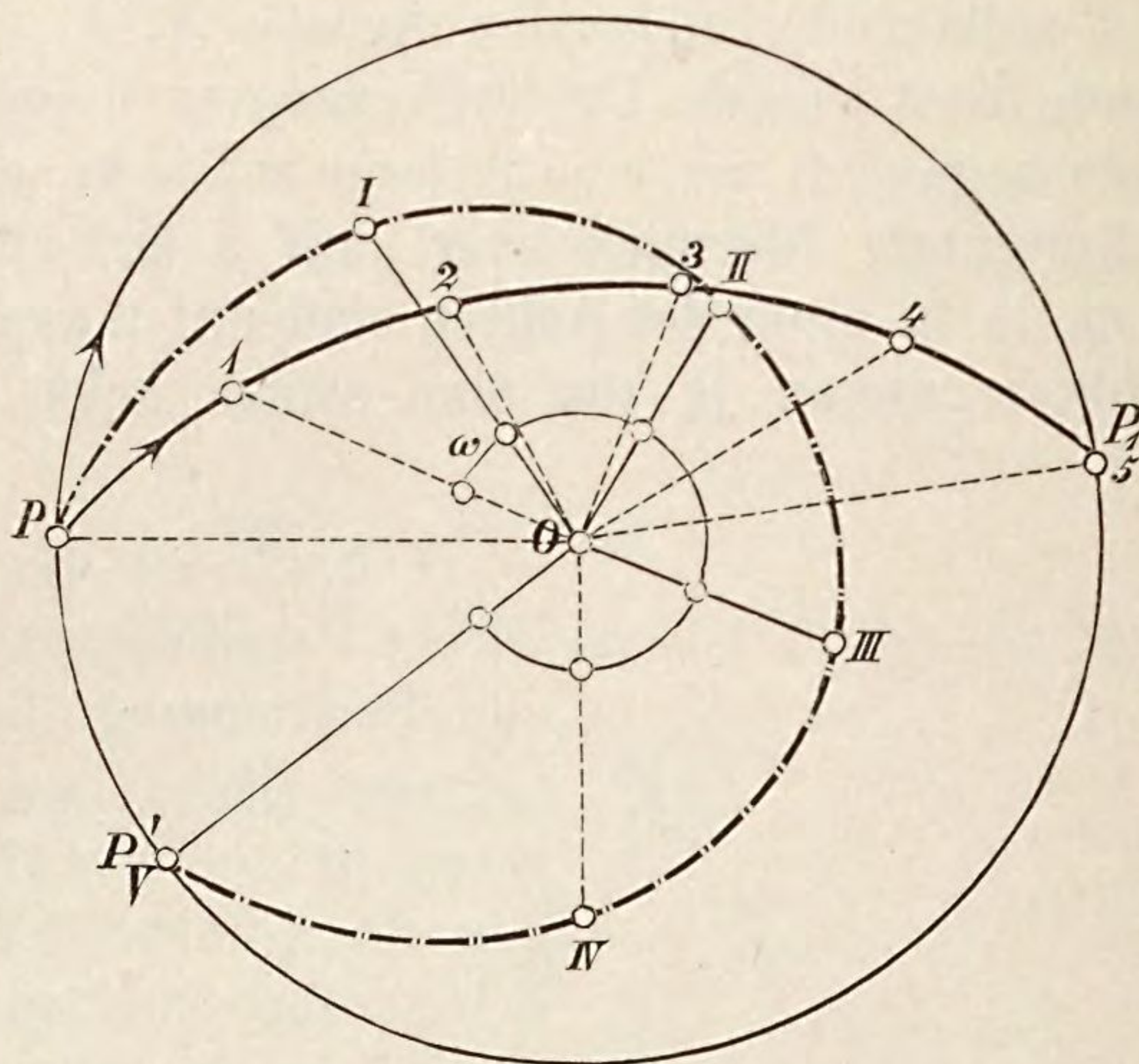


Fig. 66.

Man stellt sich vor, der Punkt laufe in der Zeit Eins zunächst von P nach 1 und werde hierauf erst in der Entfernung $O1$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω in der Zeit Eins nach I gedreht. Würde diese Construction für jeden Punkt zwischen P und 1 ausgeführt, dann würde die krumme Linie PI die resultirende Bahn während der ersten Secunde u. s. w.

Bildet beispielsweise die fortschreitende Bewegung des Punktes auf der ebenen Fläche einen Kreis vom festen Mittelpunkte O_1 (Fig. 67), für welchen die Winkelgeschwindigkeit doppelt so gross ist als für die Fläche, wären X und Y zwei fest liegende

Coordinatenachsen, und würden die Drehbewegungen im Sinne der eingezeichneten Pfeile stattfinden, dann wäre nach Fig. 67

$$x = r \cdot \cos \alpha + r_1 \cdot \cos \alpha,$$

$$y = r \cdot \sin \alpha - r_1 \cdot \sin \alpha$$

oder

$$x = (r + r_1) \cdot \cos \alpha$$

und

$$y = (r - r_1) \cdot \sin \alpha.$$

Auch ist

$$\frac{x}{r + r_1} = \cos \alpha,$$

$$\frac{y}{r - r_1} = \sin \alpha.$$

Werden diese Werthe quadriert und addirt, dann folgt für die resultirende Bahn

$$\frac{x^2}{(r + r_1)^2} + \frac{y^2}{(r - r_1)^2} = 1,$$

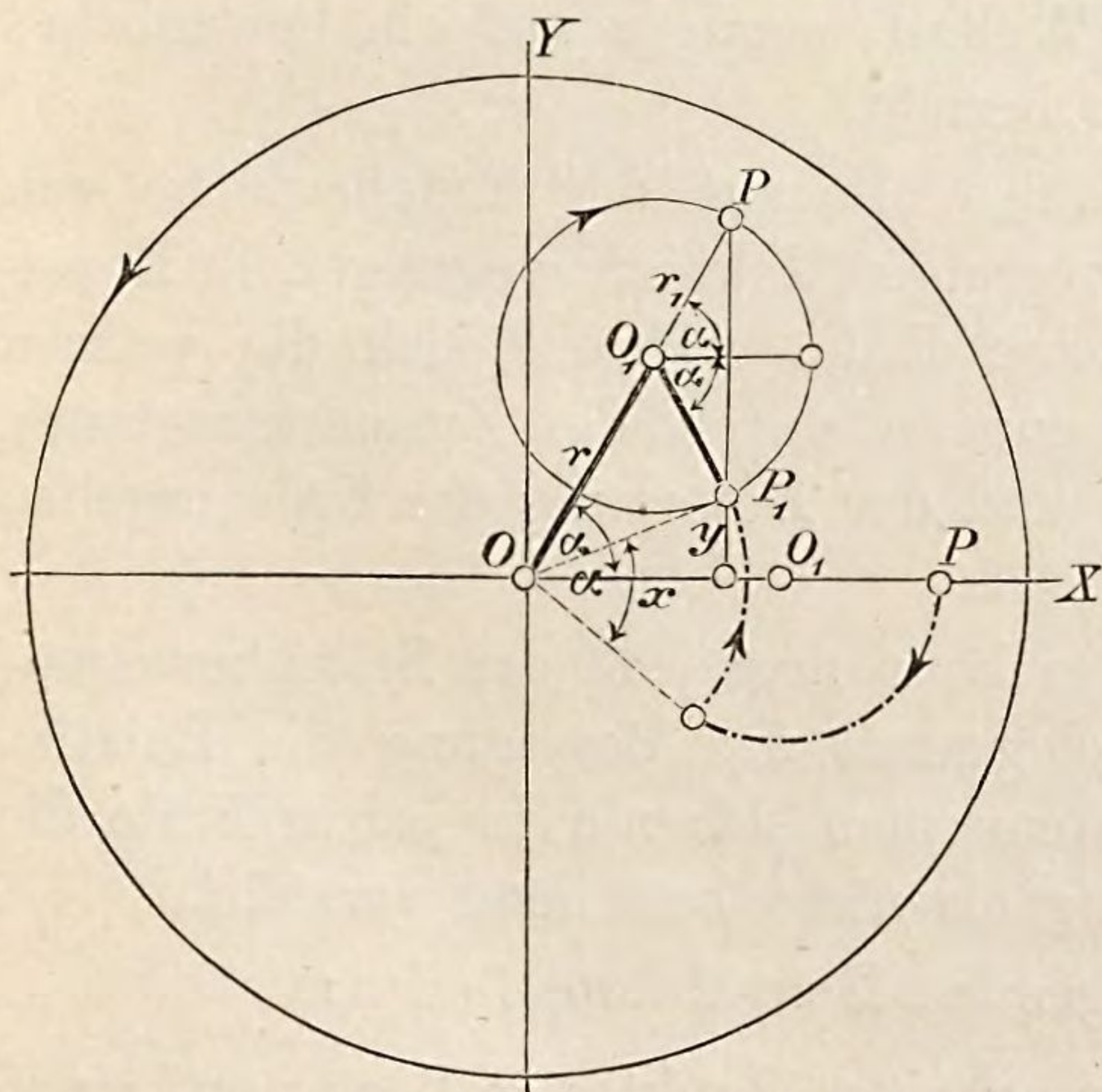


Fig. 67.

die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, deren grosse Halbachse $r + r_1$ und deren kleine Halbachse $r - r_1$ ist. Dasselbe Resultat würde durch die oben angedeutete auf dem Parallelogrammgesetz basirende Construction — wie auch in Fig. 67 ausgeführt — gefunden werden.

k) Relative Bewegung eines mathematischen Punktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Stellt man sich vor, dass sich ein Punkt in einem Raum bewegt, welcher sich selbst in Bewegung befindet, so wird die wahre Bewegung des Punktes die Resultirende aus der Bewegung des Raumes und derjenigen des Punktes im Raume sein, und im Uebrigen eine absolute, wenn man sich den Anfangspunkt der Bewegung im Weltraum als absolut vorstellt.

Um die wahre Bewegung zu beobachten, muss sich der Beschauer ausserhalb des sich bewegenden Raumes befinden; ist er in demselben, dann besitzt er selbst die Bewegung des Raumes, ohne sich deren bewusst zu sein: der Raum erscheint ihm infolgedessen als ruhend und die Bewegung des Punktes im Raume als „die einzig vorhandene Bewegung des Punktes“. Letztere ist aber nur eine Seiten-Bewegung der wahren, und man nennt sie „die Relativbewegung des Punktes in Bezug auf den ruhend gedachten Raum“, weil man sie nicht auf einen absoluten Punkt im Weltall, sondern auf ein bewegliches Gebilde in demselben bezieht.

So sind beispielsweise alle auf der Erdoberfläche von uns beobachteten Bewegungen Relativbewegungen in Bezug auf die ruhend gedachte Erde, während sich die wahren oder absoluten Bewegungen durch die Zusammensetzung je einer beobachteten und der Bewegung der Erde ergeben würden.

Nach dem Gesagten kann man jede der Seitenbewegungen in einem Parallelogramm der Bewegung als Relativbewegung ansehen, wenn man sich nur in jedem Falle die zweite Seitenbewegung als nicht bestehend vorstellt.

Es sollen im Folgenden Betrachtung finden:

- 1) Relativbewegung eines Punktes in Bezug auf einen geradlinig fortschreitenden und

2) Relativbewegung eines Punktes in Bezug auf einen sich drehenden Raum.

1) *Relativbewegung eines mathematischen Punktes in Bezug auf einen geradlinig fortschreitenden Raum.*

Ein Raum, beispielsweise eine ebene Platte $abcd$ (Fig. 68) besitze die geradlinige Bewegung A , während sich ein Punkt P auf der Platte geradlinig nach B bewegt.

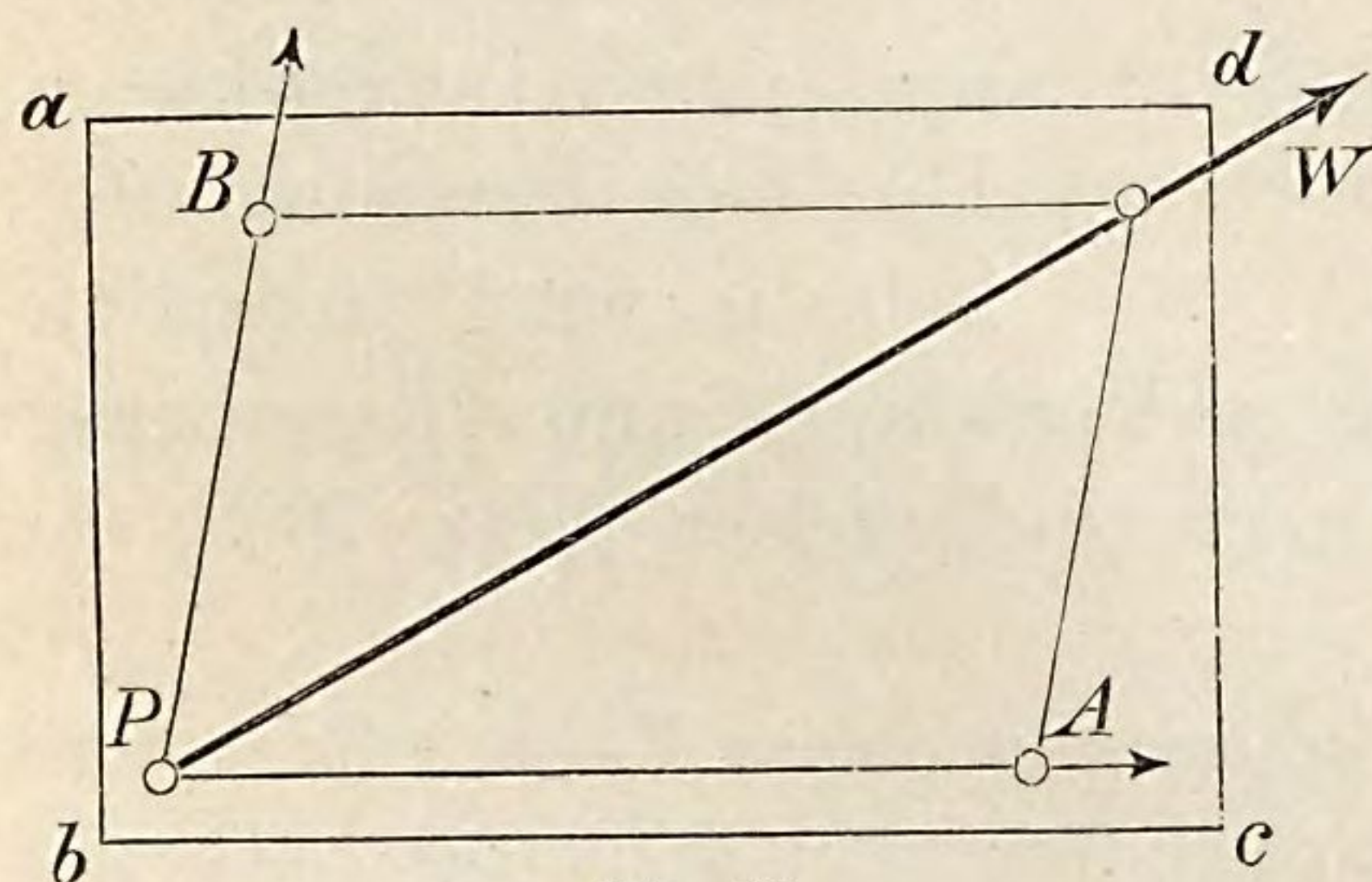


Fig. 68.

Die Resultierende W aus A und B liefert die wahre Bewegung des Punktes P , während B die Relativbewegung in Bezug auf den fortschreitenden (aber ruhend gedachten) Raum bildet.

Wären A und W bekannt, so würde B nach dem geometrischen Parallelogrammgesetz bestimmt werden können und

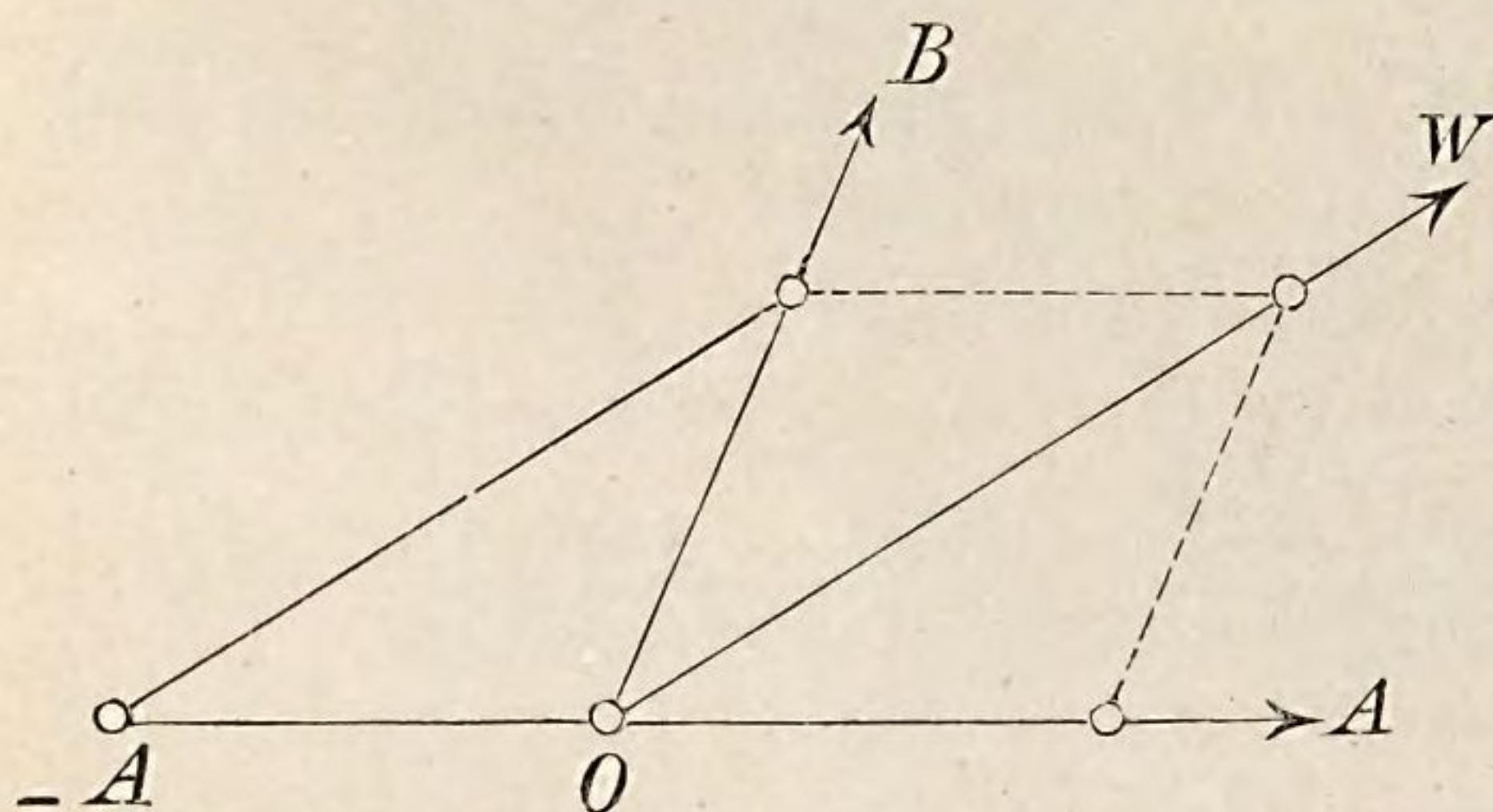


Fig. 69.

zwar entweder in bisheriger Weise oder für Untersuchungen bequemer wie folgt:

Verlängert man OA (Fig. 69) geradlinig rückwärts über den Anfangspunkt der Bewegung und zieht man durch den Endpunkt

von B eine Parallele zu OW , so schneidet dieselbe auf der rückwärtigen Verlängerung ein Stück OA ab, und es „erscheint“ infolgedessen die Relativbewegung B als die Resultierende aus der wahren Bewegung W des Punktes und der negativen Bewegung A des Raumes. B wird deshalb

schnell gefunden, wenn man dem $+OA$ ein $-OA$ zufügt und aus $-OA$ und OW die Resultierende bildet.

a) Es mögen die Bewegungen geradlinig gleichförmige sein. Der Bewegung A entspreche die Geschwindigkeit c , der Bewegung W die Geschwindigkeit w und der Relativbewegung B die Geschwindigkeit v ; c und w sollen gegeben und v zu suchen sein. Die Relativgeschwindigkeit v wird gefunden

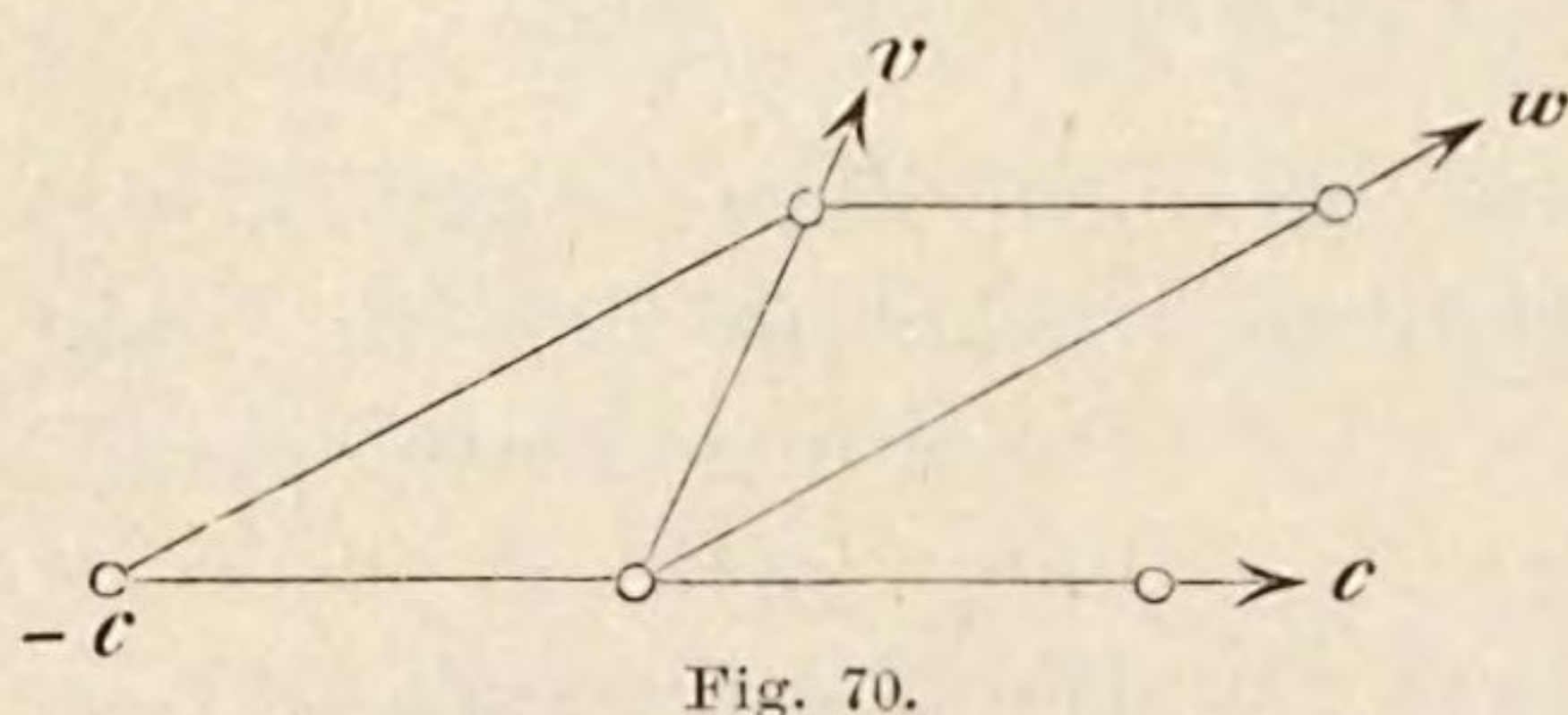


Fig. 70.

mit Hilfe des zuletzt gezeigten Verfahrens unter Benutzung des Parallelogramms der Geschwindigkeiten (Fig. 70).

Ein Punkt P (Fig. 71) besitze in einem Flusse die wahre Bewegung W mit der constanten Geschwindigkeit w , während das Wasser in seinem Bett die constante Geschwindigkeit c hat.

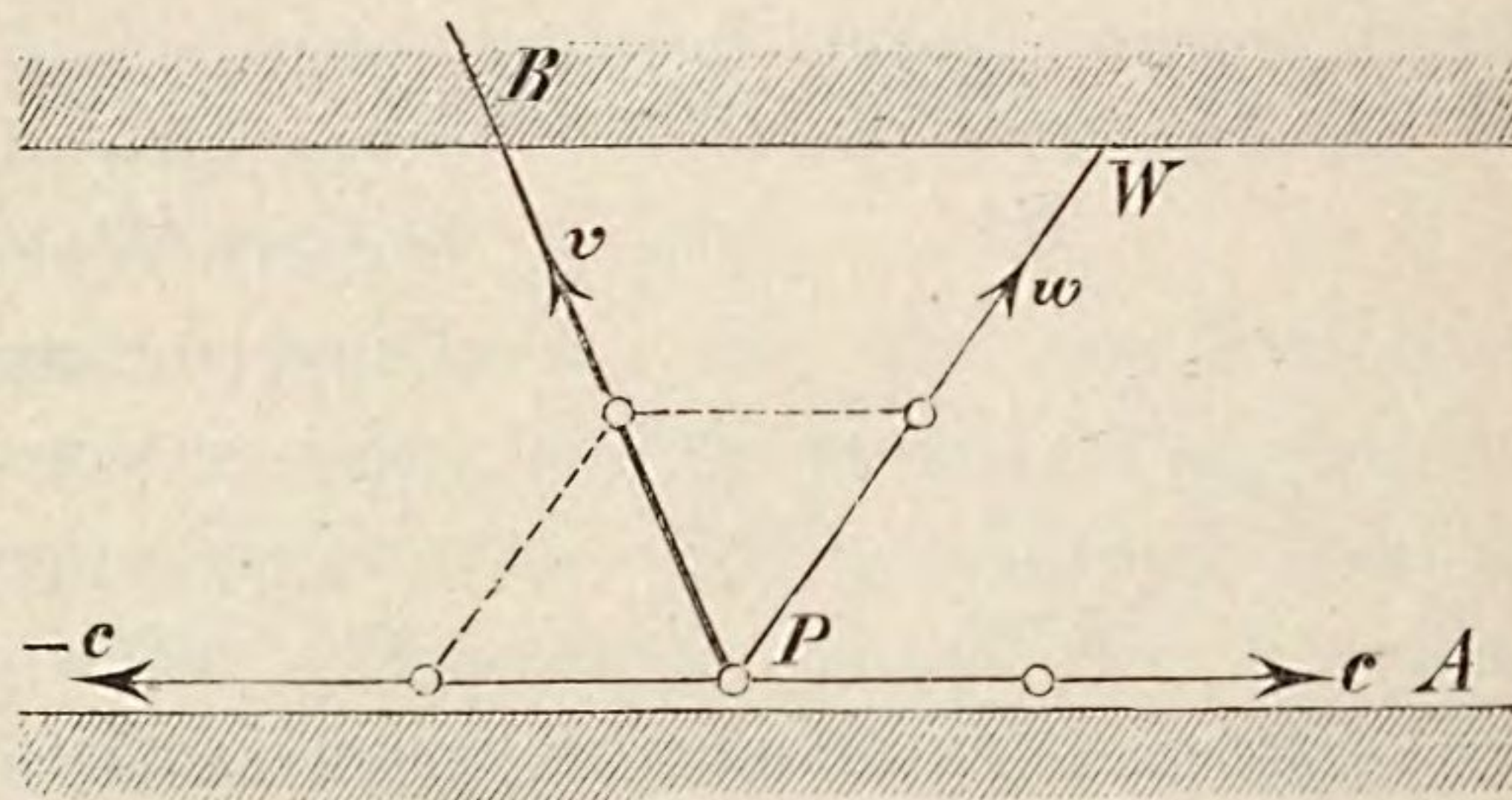


Fig. 71.

Die relative Geschwindigkeit v und die Richtung der Bewegung B ergeben sich somit durch die in Fig. 71 dargestellte Parallelogrammconstruction. Wird gefordert, dass der Punkt P eine wahre Bewegung quer über den Fluss annimmt, dann muss nach Fig. 72

$$v = \sqrt{w^2 + c^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w}{c} \text{ sein.}$$

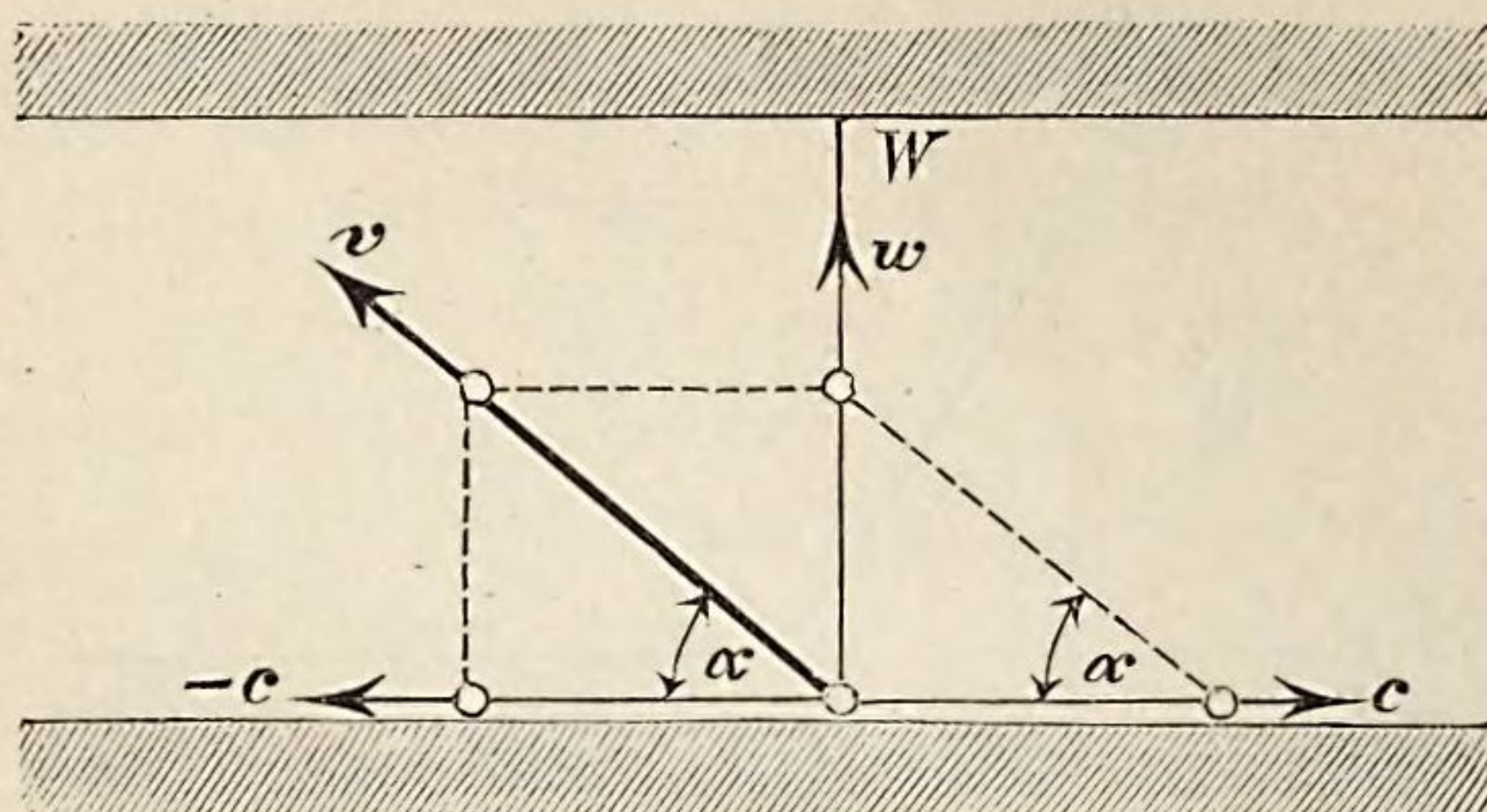


Fig. 72.

Ein Schiff fährt auf einem Flusse mit der Geschwindigkeit c , und ein Punkt P besitzt die wahre Richtung und Geschwindigkeit

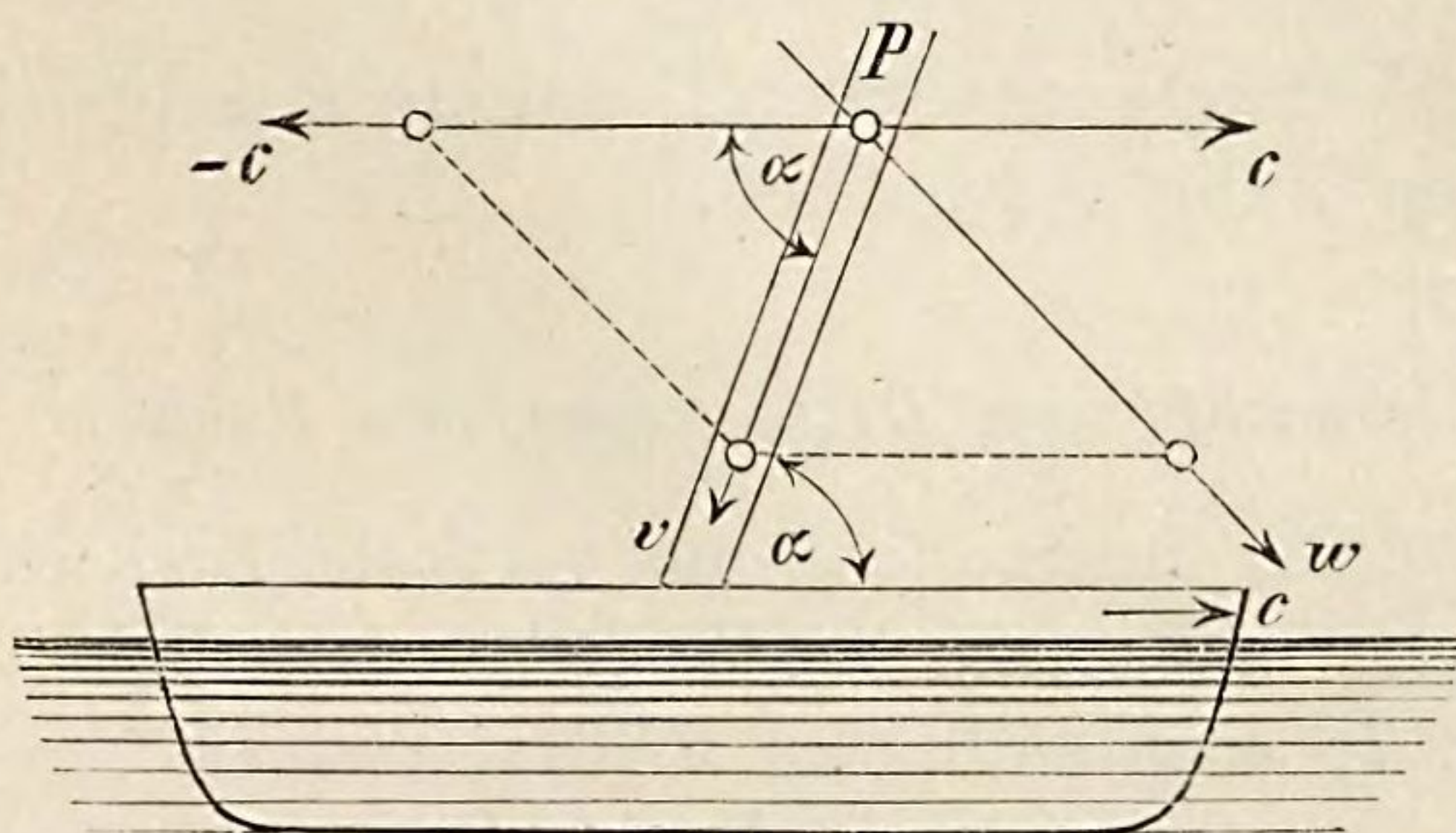


Fig. 73.

keit w . Unter welchem Winkel α zur Horizontalen muss der Schornstein des Schiffes stehen, damit die Innenwandungen desselben von dem Punkte P nicht berührt werden, oder wie muss die Grösse und Richtung von w bei gegebenem c und v beschaffen sein, wenn der Schornstein senkrecht steht, und der Punkt P die Wände nicht berühren soll? (Siehe Fig. 73 und 74.)

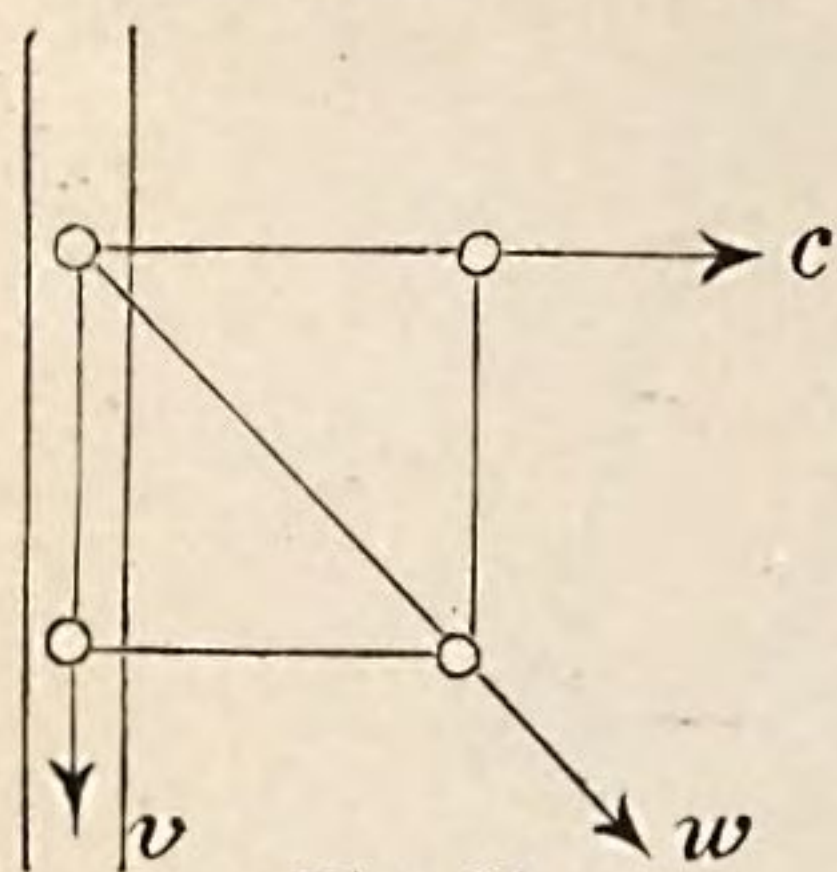


Fig. 74.

b) Sind die Bewegungen geradlinig und ungleichförmig, heisst die wahre Beschleunigung p , die Beschleunigung des Raumes p_1 und die Relativbeschleunigung p_2 , und sind p und p_1 gegeben, dann findet sich p_2 analog mit Hilfe des Parallelogrammes der Beschleunigung nach Fig. 75.

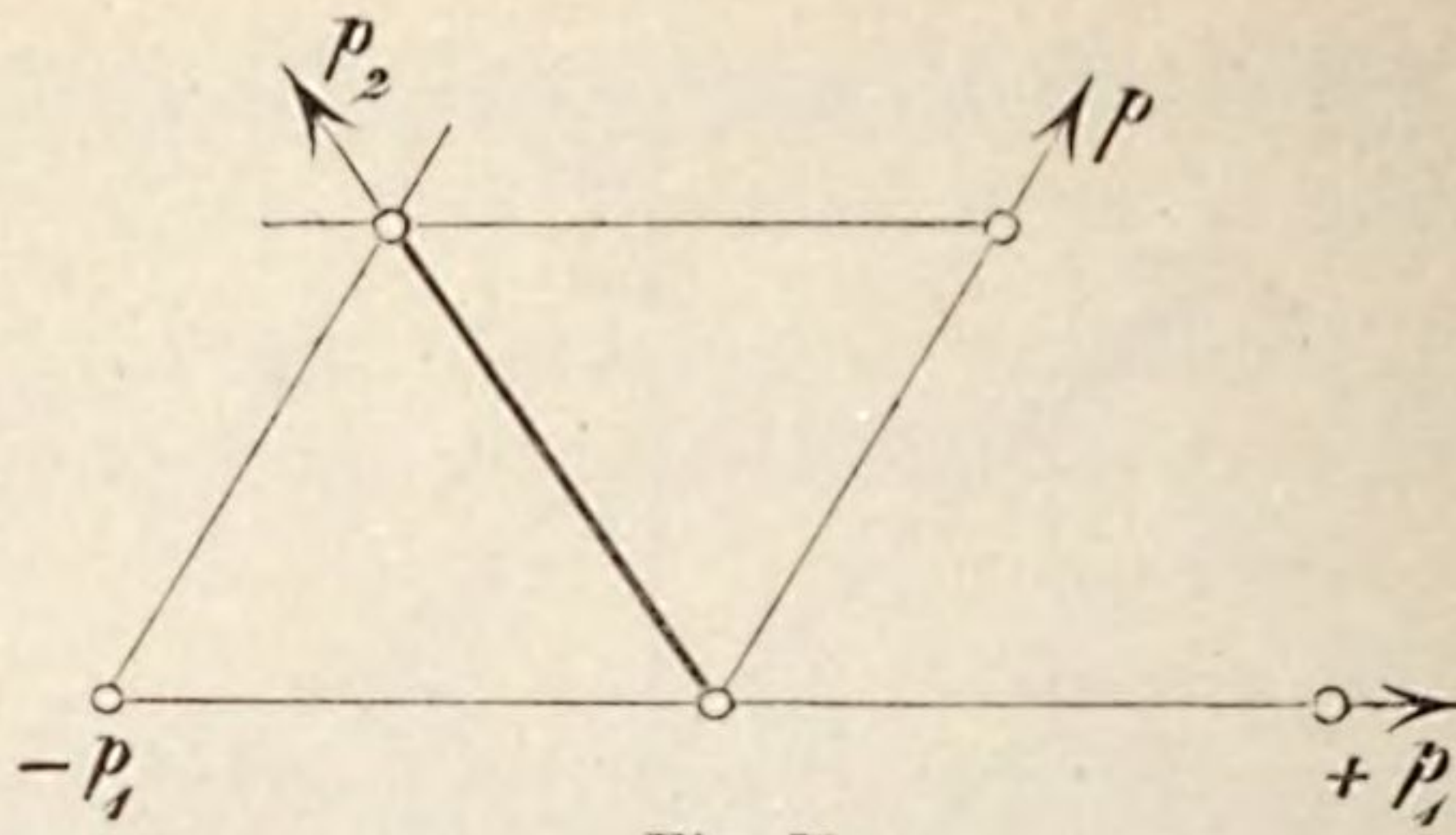


Fig. 75.

2) *Relative Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen sich drehenden Raum.*

Die im Vorigen erhaltenen Resultate lassen sich auch im vorliegenden Falle verwerthen.

Gleichförmige Drehbewegung des Raumes.

Eine Scheibe besitze um die verticale Drehachse O eine Drehbewegung mit constanter Winkelgeschwindigkeit im Sinne des in Fig. 76 eingezeichneten Pfeiles, und auf der Oberfläche der Scheibe bewege sich ein Punkt P derart, dass die ent-

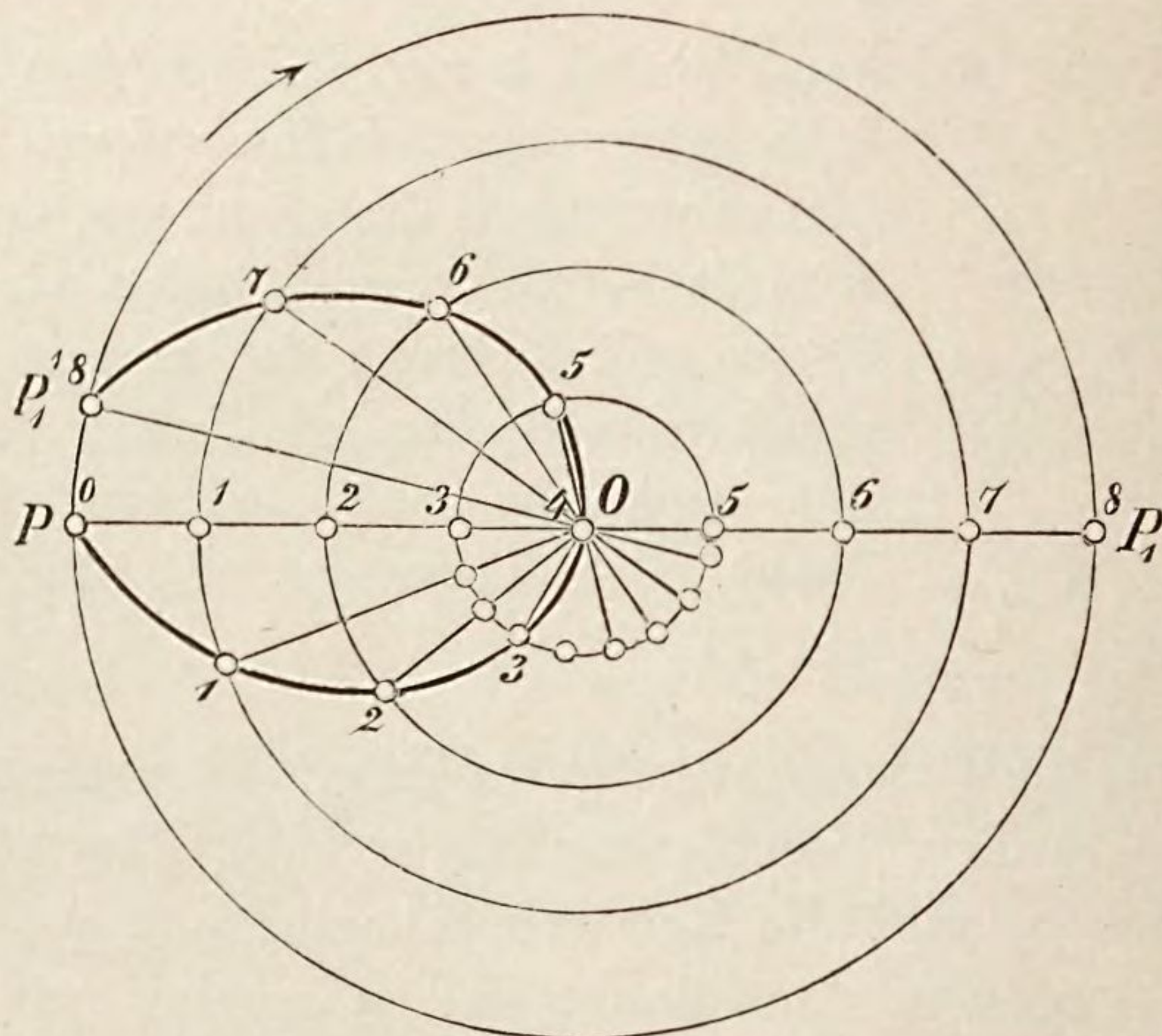


Fig. 76.

stehende wahre Bewegung PP_1 eine durch die Drehachse O hindurchlaufende geradlinig gleichförmige wird. Diese wahre Bewegung ist also anzusehen als die Resultirende aus der gleichförmigen Drehbewegung der Scheibe (des Raumes) und der fortschreitenden Relativbewegung des Punktes auf derselben. Die Bestimmung der Relativbewegung erfolgt daher nach den unter 1) gefundenen Regeln, indem man zur wahren Bewegung die Drehbewegung im entgegengesetzten Sinne der Drehung hinzufügt.

Aehnliches gilt für ungleichförmige Bewegungen.

Betrachtungen über relative Beschleunigungen siehe Relativbewegung eines materiellen Punktes.

Zweiter Abschnitt.

Bewegungslehre eines materiellen Punktes,
auch Physische Bewegungslehre
oder Mechanik eines materiellen Punktes genannt.

Die Bewegungen der einzelnen Theile eines Körpers sind im Allgemeinen von einander verschieden. Besitzt beispielsweise ein Körper eine Drehbewegung um eine feste Drehachse, so sind die Wege der einzelnen Punkte desselben concentrische Kreise, welche von einander verschieden und von den Abständen der Punkte von der Drehachse abhängig sind.

Soll nun ein klares Bild von einer Körperbewegung gegeben werden, so ist es erforderlich, die Bewegungen der einzelnen Körpertheile anzugeben.

Man denkt sich zu dem Zweck den Körper in unendlich kleine Theile, sogenannte „materielle Punkte“ zerlegt, welche alle Körpereigenschaften besitzen, ihrer unendlich kleinen Ausdehnungen wegen aber wie mathematische Punkte angesehen werden dürfen. Ihre Bahnen sind daher ebenfalls Linien. Die Untersuchung der Bewegungen aber findet — verschieden von der des mathematischen Punktes — nunmehr mit Rücksicht auf „Kraft“, „Masse“, „Raum“ und „Zeit“ statt.

Wie in der eigentlichen Mechanik, in der Lehre von der Bewegung der Körper, nachgewiesen wird, ist es für die Beantwortung bestimmter Hauptfragen zulässig, sich die ganze Masse eines Körpers in einem bestimmten Punkte desselben concentrirt zu denken, weshalb die im Folgenden aufzustellenden Regeln auch später auf Körper Anwendung finden, und die Bewegungslehre des materiellen Punktes auch mit dem Namen „Mechanik des materiellen Punktes“ bezeichnet wird.

I.

Allgemeines über Kraft und Masse und Principien der Mechanik.

1.

Kraft.

Unter Kraft versteht man (siehe Einleitung) die Ursache der Geschwindigkeits- und Richtungsänderung einer bewegten Masse. Nach der geometrischen Bewegungslehre lassen sich aber letztere zurückführen auf die Erzeugung von Tangential- und Normalbeschleunigung, während sich diese in der Ebene des Krümmungshalbmessers und der Tangente wieder zu einer resultirenden Beschleunigung, der sogenannten Totalbeschleunigung, vereinigen lassen. Es besteht demnach allgemein die Wirkung einer Kraft in der Erzeugung von Totalbeschleunigung. Die Richtung der letzteren liefert zugleich die Richtung der Kraft, und die Grösse der Kraft beurtheilt man nach der Grösse der hervorgebrachten Totalbeschleunigung. Bringen Kräfte gleiche Wirkungen hervor, d. h. ertheilen sie einem und demselben materiellen Punkte gleiche Totalbeschleunigung, so sind die Kräfte einander gleich. Erzeugt dagegen eine Kraft an demselben materiellen Punkt eine P_{mal} so grosse Totalbeschleunigung als eine zweite, dann ist die erste Kraft auch P_{mal} grösser als die zweite.

Betrachtet man nun die zweite Kraft als Einheit, so ist es erlaubt dieselbe geometrisch durch eine Gerade von beliebiger Länge zu veranschaulichen, und die P_{mal} so grosse Kraft oder — wie man sagt — die „Kraft P “ durch eine Gerade darzustellen, deren Länge P solcher Einheiten enthält.

Wirken zwei gleiche Kräfte auf verschieden grosse Massen, dann kann die Gleichheit der Kräfte nicht direct aus der Wirkung auf die Massen gefunden werden.

Weiter lehrt die Erfahrung, dass Kräfte an materiellen Körpern Verlängerungen oder Verkürzungen erzeugen können, und man nennt eine Kraft im ersten Falle „Zug“, im zweiten „Druck“. Bringen nun zwei Kräfte nacheinander an demselben Körper gleiche Verlängerungen resp. gleiche Verkürzungen hervor, dann ergeben sich die ersteren ebenfalls als gleich.

Ferner dient zur Vergleichung von Kräften die Erfahrung, dass jeder Körper von der Erde angezogen wird und zwar mit einer Kraft, als deren Ausgangspunkt der Mittelpunkt der Erde zu betrachten sein würde, wenn die letztere eine absolute Kugel wäre. Im Allgemeinen nennt man diese Kraft „Schwerkraft“, für einen bestimmten Körper aber „Gewicht“. Das Gewicht eines Körpers ist daher auch der Druck desselben auf eine horizontale Unterlage oder sein Zug an einem verticalen Faden, woraus sich ergibt, dass Drücke und Züge, also allgemein „Kräfte“, durch Gewichte (Kilogramme etc.) gemessen und mit Leichtigkeit verglichen werden können.

Weiteres über Kraft siehe Einleitung.

2.

Masse.

Masse ist nach der Einleitung das Quantum Materie, was ein Körper resp. ein materieller Punkt enthält. Die Massen zweier materiellen Punkte werden gleich gross sein, wenn gleiche Kräfte denselben gleiche Beschleunigungen ertheilen. Hiernach ergibt sich ein Mittel die Massen grössen zu messen und durch Zahlen auszudrücken (siehe Gesetz der Beschleunigung). Die Vereinigung zweier materiellen Punkte von gleich grossen Massen giebt einen materiellen Punkt von doppelt so grosser Masse, und die Vereinigung von m solchen Punkten ergibt einen materiellen Punkt, dessen Masse m mal so gross ist als die Masse eines jeden einzelnen. Wählt man also die Masse eines

materiellen Punktes als Einheit, so wird m die Masse bezeichnen, welche sich in m Einheiten zerlegen lässt. Als Masseneinheit betrachtet man die Masse von einem bestimmten Gewichte (gewöhnlich 1 Kilogramm).

3.

Grundgesetze der Mechanik.

(Erfahrungsgesetze.)

a) Gesetz der Beschleunigung.

(Beiläufig Messung der Masse.)

Es bedeute

m die Masse des materiellen Punktes,

P die Kraft, welche auf ihn wirkt,

p die Beschleunigung, welche die Kraft der Masse ertheilt.

Die Erfahrung lehrt,

- 1) dass die Beschleunigung p der Kraft P direct proportional ist, und
- 2) dass die Beschleunigung p der Masse m umgekehrt proportional ist.

Hieraus folgt daher die Gleichung

$$p = \frac{P}{m},$$

$$P = m \cdot p$$

oder

$$m = \frac{P}{p} \text{ (Mass der Masse).}$$

Specieller Fall: $P = 0$ liefert, da m nicht Null ist, $p = 0$.

Hierdurch wird dargethan, dass das bereits in der Ein-

leitung ausgesprochene Gesetz der Trägheit oder das Beharrungsvermögen in dem Gesetz der Beschleunigung inbegriffen ist; denn bewegt sich eine Masse geradlinig und gleichförmig oder ruht dieselbe, so wird ohne Hinzuthun einer Kraft keine Beschleunigung erzeugt, d. h. der herrschende Zustand nicht geändert.

Einführung der Schwerkraft resp. des Gewichtes G des Körpers oder des materiellen Punktes.

Die Beschleunigung g der Schwerkraft ist erfahrungsgemäss unabhängig von der Masse des Körpers und hat für alle an der Erdoberfläche befindlichen Körper im Mittel die Grösse

$$g = 9,81 \text{ Meter (in Paris),}$$

die Secunde als Zeiteinheit vorausgesetzt.

Im Uebrigen ändert sich g mit der Entfernung vom Erdmittelpunkte.

Setzt man nun

$$P = G$$

und

$$p = g,$$

dann ist

$$G = m \cdot g$$

oder

$$m = \frac{G}{g}.$$

(Wäre $g = 1$, so wäre $m = G$.)

Vergleich zweier Massen m und m_1 in derselben Entfernung vom Erdmittelpunkte, also bei constantem g .

Es sei

$$m = \frac{G}{g},$$

$$m_1 = \frac{G_1}{g}.$$

Durch Division ergibt sich

$$\frac{m}{m_1} = \frac{G}{G_1},$$

d. h. „die Massen der Körper verhalten sich wie ihre Gewichte“.

Vergleich der Gewichte G und G_1 derselben Masse m in verschiedenen Entfernungen vom Erdmittelpunkte, also bei verschiedenen Werthen der Acceleration der Schwere.

Es ist

$$G = m \cdot g,$$

$$G_1 = m \cdot g_1,$$

woraus durch Division folgt

$$\frac{G}{G_1} = \frac{g}{g_1},$$

d. h. „die Gewichte eines und desselben Körpers in verschiedenen Entfernungen vom Erdmittelpunkte verhalten sich wie die den Orten entsprechenden Accelerationen der Schwere“.

Setzt man den Werth

$$m = \frac{G}{g}$$

in die allgemeine Gleichung

$$p = \frac{P}{m}$$

ein, so resultirt

$$p = \frac{P}{G} \cdot g,$$

$$P = \frac{p}{g} \cdot G,$$

$$G = \frac{g}{p} \cdot P.$$

Es bewege sich ein Körper vom Gewichte $G = 200$ Kilogramm (wie ein materieller Punkt behandelt) auf einer ebenen polirten

Fläche (ohne Reibung) geradlinig infolge einer stetig auf ihn wirkenden constanten Kraft $P = 100$ Klgr. Wie gross wird die Beschleunigung p ?

$$p = \frac{P}{G} \cdot g = \frac{100}{200} \cdot 9,81 = 4,905 \text{ Meter.}$$

Es bewegt sich ein Körper vom Gewicht $G = 60$ Klgr. unter sonst gleichen Verhältnissen wie vorher mit einer Beschleunigung $p = 1,5$ Meter. Wie gross ist P ?

$$P = \frac{p}{g} \cdot G = \frac{1,5}{9,81} \cdot 60 = 9,17 \text{ Klgr.}$$

Es bewegt sich ein Körper mit einer Beschleunigung $p = 5$ Klgr., infolge einer constant wirkenden Kraft $P = 60$ Klgr. unter gleichen Verhältnissen. Wie gross ist das Gewicht G des Körpers?

$$G = \frac{g}{p} \cdot P = \frac{9,81}{5} \cdot 60 = 117,72 \text{ Klgr.}$$

Soll beispielsweise im letzten Fall die Masse m des Körpers bestimmt werden, so gilt

$$m = \frac{G}{g} = \frac{117,72}{9,81} = 12,$$

und es ist ersichtlich, „dass der Zahlwerth einer bestimmten Masse sich ändert mit der Wahl des Mass- und Gewichtssystemes“.

b) Gesetz der Unabhängigkeit der Bewegungen.

Ein materieller Punkt bewegt sich entweder,

- 1) nach dem Gesetz der Trägheit, mit constanter Geschwindigkeit geradlinig und gleichförmig,
- 2) unter der Einwirkung von Kräften, geradlinig und ungleichförmig

oder

- 3) mit einer anfänglichen Geschwindigkeit unter dem Einfluss von Kräften, allgemein krummlinig und ungleichförmig.

In dem letzten Falle ergibt sich die wahre Bewegung



durch die Zusammensetzung derjenigen Bewegung, welche allein vermöge der Trägheit entsteht, und derjenigen, welche allein durch die Kräfte erzeugt wird.

Hiernach gilt aber die Folgerung, „dass die Beschleunigung, welche eine Kraft einem materiellen Punkte ertheilt, unabhängig ist von der Grösse der dem materiellen Punkte bereits eigenthümlichen Geschwindigkeit.“

Diesen Satz nennt man „das Gesetz der Unabhängigkeit der Bewegungen“.

Physisches Parallelogrammgesetz.

Parallelogramm der Kräfte.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf einen materiellen Punkt, so erzeugt eine jede für sich an demselben eine Beschleunigung. Sämmtliche Beschleunigungen lassen sich aber nach Früherem durch ein Parallelogramm oder Parallelepipedon zu einer resultirenden Beschleunigung vereinigen, welche der materielle Punkt unter dem Einfluss der auf ihn wirkenden Kräfte erhalten wird.

Erzeugen beispielsweise zwei Kräfte P_1 und P_2 die Beschleunigungen p_1 und p_2 , und besitzen die Beschleunigungen, also auch die Kräfte, eine Neigung α zueinander, dann gilt für die Resultirende p der Grösse nach

$$p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos \alpha}$$

und bezüglich der Richtung, sofern α_1 den Richtungsunterschied zwischen p und p_1 angiebt,

$$\sin \alpha_1 = \frac{p_2 \cdot \sin \alpha}{p}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{p_2 \cdot \sin \alpha}{p_1 + p_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Da aber die Beschleunigungen den Kräften direct und der Masse des materiellen Punktes umgekehrt proportional sind, so gilt

$$p_1 = \frac{P_1}{m}$$

und

$$p_2 = \frac{P_2}{m}.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe in die obigen Gleichungen folgt

$$R = m \cdot p = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \alpha},$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{P_2 \cdot \sin \alpha}{R}$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_2 \cdot \sin \alpha}{P_1 + P_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Hieraus geht hervor, dass das Parallelogrammgesetz auch für Kräfte giltig ist. Während jedoch in der geometrischen Bewegungslehre mit diesem Gesetz geometrische Wahrheiten nachgewiesen werden, wird hier eine physikalische constatirt.

Specieller Fall: $\alpha = 90^\circ$ giebt

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P_2}{P_1}.$$

Parallelepipedon der Kräfte.

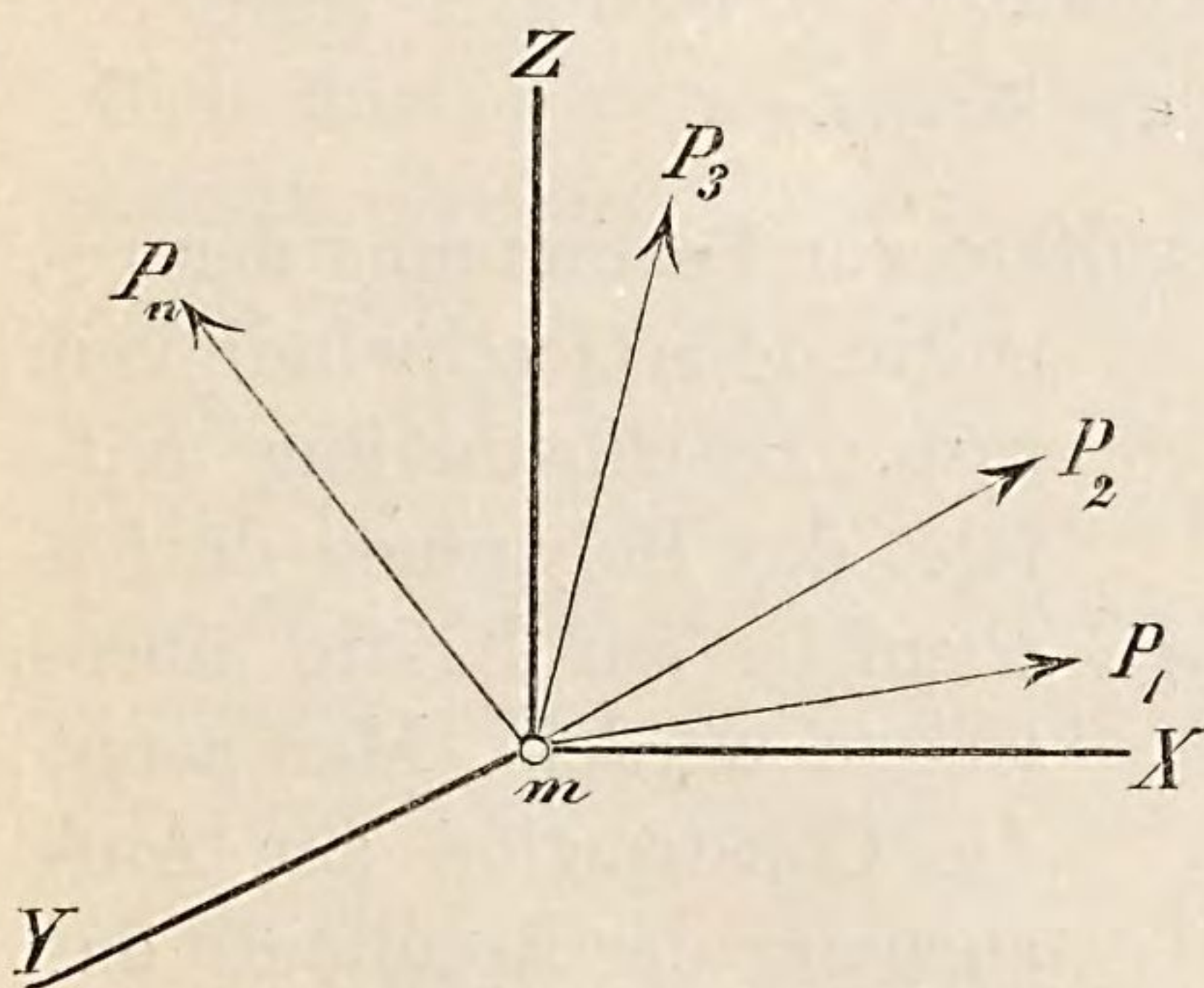


Fig. 77.

Wirken beliebig viele Kräfte P_1 bis P_n (Fig. 77) auf den materiellen Punkt, deren Richtungen zu drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z durch die Winkel α, β, γ unter Beifügung der entsprechenden Indices angegeben werden, so gilt analog dem früheren Ver-

fahren folgendes Schema:

X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
$P_1 \cdot \cos \alpha_1$	$P_1 \cdot \cos \beta_1$	$P_1 \cdot \cos \gamma_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_n \cdot \cos \alpha_n$	$P_n \cdot \cos \beta_n$	$P_n \cdot \cos \gamma_n$
$X = \Sigma(P \cdot \cos \alpha)$	$Y = \Sigma(P \cdot \cos \beta)$	$Z = \Sigma(P \cdot \cos \gamma)$

Für die Grösse der resultirenden Kraft (der Resultirenden oder Resultante) aber ergibt sich:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Heissen die Richtungswinkel der Letzteren zu den Achsen X , Y , Z , α , β , γ , so ist die Richtung der resultirenden Kraft zu bestimmen durch

$$\cos \alpha = \frac{X}{R},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Polygon der Kräfte.

Die früher erhaltenen Resultate zur Bestimmung der resultirenden Geschwindigkeit

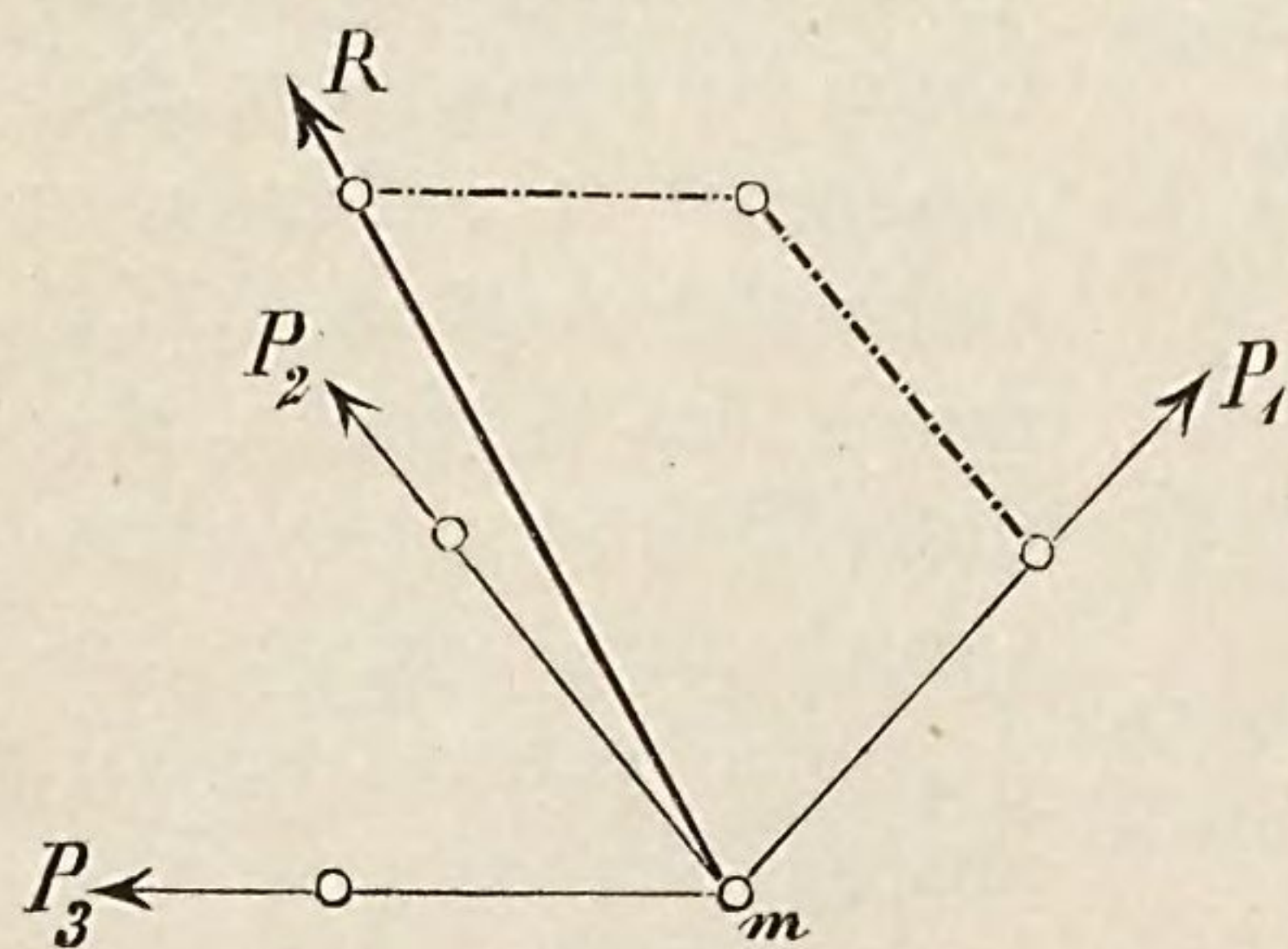


Fig. 78.

resp. Beschleunigung mittelst des Polygons dürfen ebenfalls auf Kräfte übertragen werden. Man nennt die Construction zur Aufsuchung der Resultante das Polygon der Kräfte (vgl. Fig. 78).

c) Das Gesetz der Wechselwirkung.

Die Erfahrung lehrt, dass die Kräfte in der Natur stets paarweise auftreten und dass je ein Paar stets gleich gross und geradlinig entgegengesetzt gerichtet ist.

Alle Körper oder alle materiellen Punkte stehen in steter Wechselwirkung zueinander. Wird ein Körper an einen anderen gedrückt, so übt letzterer eine gleich grosse Gegenkraft auf ersteren aus, und wird an einem aufgehängten Faden gezogen, so wird im Aufhängepunkte ein gleich grosser und entgegengesetzt gerichteter Zug erzeugt.

Alle Körper in der Welt, die grössten wie die kleinsten, ziehen einander an, und es bestimmt sich die an je zwei Körpern wirkende Zugkraft P nach dem von Newton entdeckten allgemeinen Gravitationsgesetz; „sie ist dem Producte der Massen m und m_1 der beiden Körper direct und dem Quadrate ihrer Entfernung r umgekehrt proportional“, und man kann schreiben

$$P = k \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2},$$

worin k diejenige Kraft bedeutet, mit welcher sich zwei Massen Eins in der Entfernung Eins anziehen.

Diese Kraft ist es, vermöge deren sich zwei kleinste Körpertheilchen und auch alle planetarischen und Sonnen-Massen einander anziehen.

So zieht beispielsweise die Erde den Mond und dieser ebenso stark die Erde an. Da aber die Beschleunigungen direct proportional den Massen und die Masse der Erde grösser als die des Mondes ist, so bewegt sich letzterer schneller gegen die Erde, als diese gegen den Mond. Dass die Erde aber überhaupt vom Monde angezogen wird, beweist schon Ebbe und Fluth des Wassers, welches letztere seiner leichten Beweglichkeit wegen der Anziehung auch am leichtesten folgt.

4.

Specielles über das Gewicht der Körper.

Man unterscheidet:

- a) absolutes,
- b) specifisches
- und c) relatives Gewicht.

a) Absolutes Gewicht.

Unter dem absoluten Gewichte G eines Körpers versteht man das wahre Gewicht eines Körpers von ganz beliebigem Volumen, welches erstere nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz geschrieben werden muss

$$G = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

oder

$$m_1 \cdot g = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

wenn m_1 die Masse des zu wägenden Körpers (materiellen Punktes), m_2 die Masse der Erde und r den Erdhalbmesser bedeutet. [Die Lehren der Dynamik lassen — wie später gelehrt wird — die ganze Masse der Erde nach ihrem Schwerpunkte, dem Mittelpunkt, verlegen.]

Bringt man jedoch den Körper (oder den materiellen Punkt) in die Entfernung $\varrho > r$ vom Erdmittelpunkte, und beträgt in dieser Entfernung die Acceleration der Schwere g_1 , dann gilt für das Gewicht G_1 auch

$$m_1 \cdot g_1 = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\varrho^2}.$$

Dividirt man die beiden erhaltenen Gewichtsgleichungen, dann folgt:

$$\frac{g_1}{g} = \frac{r^2}{\varrho^2}$$

oder

$$g_1 = g \cdot \frac{r^2}{\varrho^2}$$

und da $\varrho > r$ ist, so ist auch

$$g_1 > g$$

und

$$G_1 > G,$$

[was experimentell nicht durch eine Krämer-, wohl aber durch eine Federwage zu constatiren wäre, weil nur das Gewicht, nicht aber die Federwirkung von der Acceleration der Schwere abhängt].

Als Gewichtseinheit werde künftig ein Kilogramm benutzt, das ist das Gewicht von 1^{cdm} Wasser von + 4° Celsius.

b) Specifisches Gewicht.

Das specifische Gewicht eines Körpers ist das absolute Gewicht derjenigen Masse, welche in der Volumeneinheit enthalten ist. Hiernach lässt sich bei gegebenem Volumen V und dem specifischen Gewichte γ des Körpers das wahre Gewicht G desselben ausrechnen durch

$$G = V \cdot \gamma.$$

Wird G gleich der Gewichtseinheit und ist v das derselben entsprechende Volumen, dann ist nach dieser Gleichung

$$1 = v \cdot \gamma$$

oder

$$v = \frac{1}{\gamma}$$

das sogenannte „specifische Volumen“.

Für Wasser ist $\gamma = 1000$ Kilogramm pro 1^{cm}, folglich

$$v = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1000} = 0,001^{\text{cm}}$$

oder

$$v = 1^{\text{cdm}} \text{ pro } 1 \text{ Kilogramm Wasser.}$$

Ist das specifische Volumen gegeben, so bestimmt sich aus demselben und aus der Gewichtseinheit das specifische Gewicht durch

$$\gamma = \frac{1}{v},$$

welcher Werth in die Gleichung für G eingesetzt,

$$G = \frac{V}{v}$$

liefert.

c) Relatives Gewicht.

Unter relativem Gewicht versteht man das Verhältniss des specifischen Gewichtes γ_1 eines Körpers zum specifischen Gewichte γ eines anderen:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\gamma};$$

es dient dasselbe zum Vergleich der Dichtigkeiten zweier Körper, d. h. der Stärke der Erfüllung desselben Raumes mit Masse.

Man pflegt γ stets gleich dem specifischen Gewichte eines bestimmten Körpers, meist dem des Wassers zu setzen, wodurch die Grösse ε relativ vergleichbare Werthe, die sogenannten „Dichten“ der Körper, liefert, und man erkennt, dass das relative Gewicht oder kurz die Dichte eines Körpers um so grösser wird, je grösser sein specifisches Gewicht γ_1 ist.

Ist ε und γ gegeben, dann ist

$$\gamma_1 = \varepsilon \cdot \gamma.$$

Für Blei ist $\varepsilon = 11,37$, also $\gamma_1 = 11,37 \cdot 1000 = 11370$ Klgr. gleich dem Gewichte von 1^{cm} Blei.

Ist G_1 das Gewicht und V_1 das Volumen des Körpers, so ist auch

$$\begin{aligned} G_1 &= V_1 \cdot \gamma_1 \\ &= V_1 \cdot \varepsilon \cdot \gamma \end{aligned}$$

oder auch

$$V_1 = \frac{G_1}{\varepsilon \cdot \gamma}.$$

Wie gross ist G_1 von 4^{cm} Eisen?

Es ist

$$\varepsilon = 7,50,$$

$$\gamma = 7,50 \cdot 1000 = 7500 \text{ Klgr.},$$

also

$$G_1 = V_1 \cdot \gamma_1 = 4 \cdot 7500 = 30000 \text{ Klgr.}$$

Wie gross ist V_1 eines Eisengewichtes $G_1 = 2000$ Klgr.?

$$V_1 = \frac{G_1}{\gamma_1} = \frac{2000}{7500} = 0,266^{\text{cm}}.$$

5.

Leistung oder mechanische Arbeit einer Kraft und Gesetz der mechanischen Arbeit.

Unter der Leistung oder der mechanischen Arbeit einer Kraft versteht man die Wirkung derselben über einen in ihrer eigenen Richtung gemessenen Weg, und die Erfahrung lehrt, dass die Grösse der mechanischen Arbeit direct proportional ist sowohl der Grösse der wirkenden Kraft, als auch der Grösse des vom Angriffspunkt der Kraft in der Krafrichtung zurückgelegten Weges.

Bedeutet

L die Leistung,

P die Kraft

und s den in der Krafrichtung zurückgelegten Weg, dann würde zu schreiben sein

$$L = P \cdot s.$$

Eine Kraft verrichtet Arbeit bei der Geschwindigkeitsänderung einer Masse, bei der Formveränderung der Körper, beim Transport von Massen, beim Ueberwinden von Widerständen u. s. w.

Wäre beispielsweise $P = G$, dem Gewichte eines Körpers, und $s = h$, die Hubhöhe desselben (Fig. 79), so wäre die beim [gleichförmigen] Heben des Gewichtes von der Kraft P zu leistende Arbeit,

$$L = P \cdot h = G \cdot h.$$

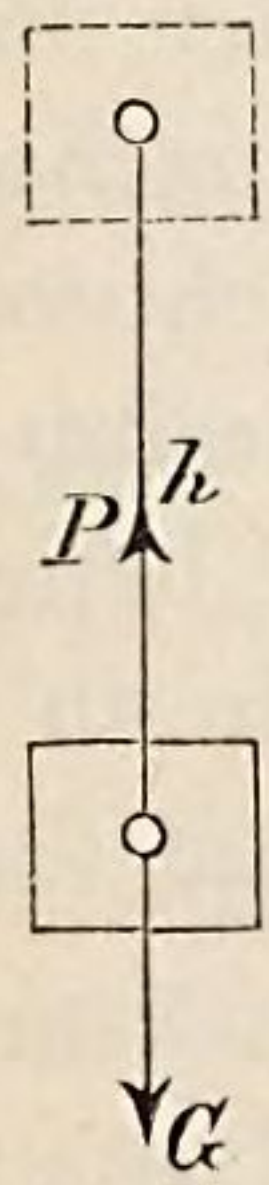


Fig. 79.

Ist $G = 1$ und $h = 1$, dann wäre $L = 1$; folglich wird, wenn $G = 1$ und $h = 2$ ist, die Arbeit die doppelte, und wenn $G = 1$ und die Hubhöhe $= h$ ist, die Arbeit die h fache. Wäre nun $h = 1$ und $G = 2$, dann würde die Arbeit ebenfalls die 2fache, und bei $h = 1$ und dem Gewichte G die

Arbeit die G fache, wodurch die directe Proportionalität zwischen Arbeit, Gewicht und Hub bestätigt wird.

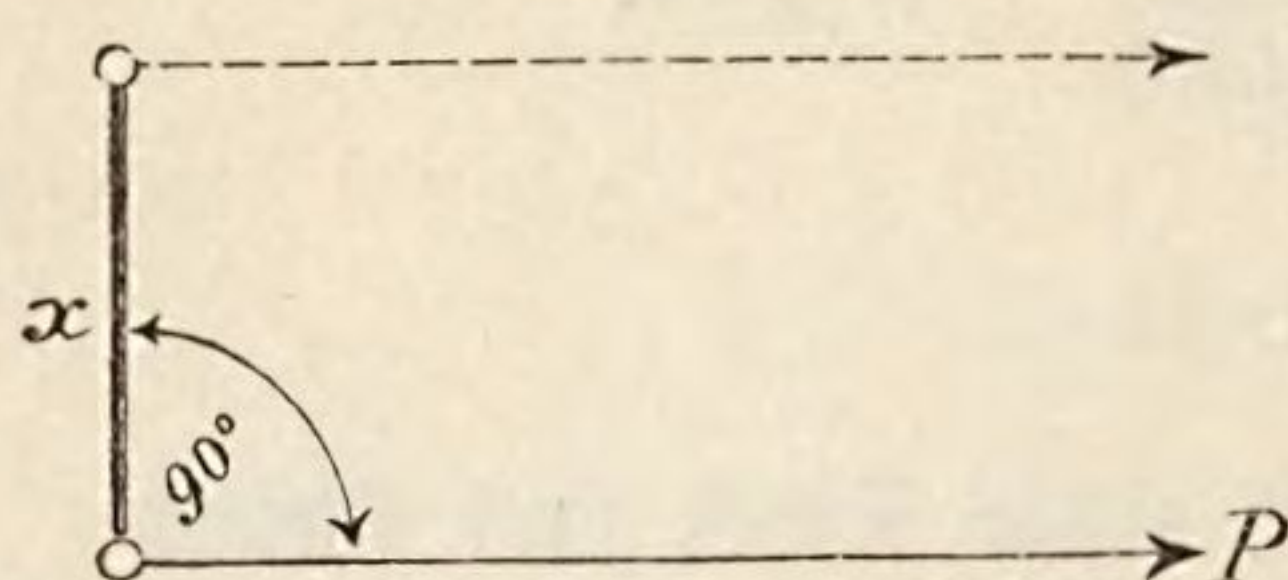


Fig. 80.

Schreitet der Angriffspunkt der Kraft P auf einem geradlinigen Wege x fort, welcher zur Krafrichtung senkrecht liegt (Fig. 80), dann wird in der Richtung der Kraft nothwendiger-

weise kein Weg zurückgelegt, und die Leistung der Kraft wird

$$L = 0.$$

Die Grösse der Arbeit hingegen, welche die Kraft P verrichtet, wenn der geradlinige Weg x des Angriffspunktes unter einem beliebigen Winkel α zur Krafrichtung geneigt

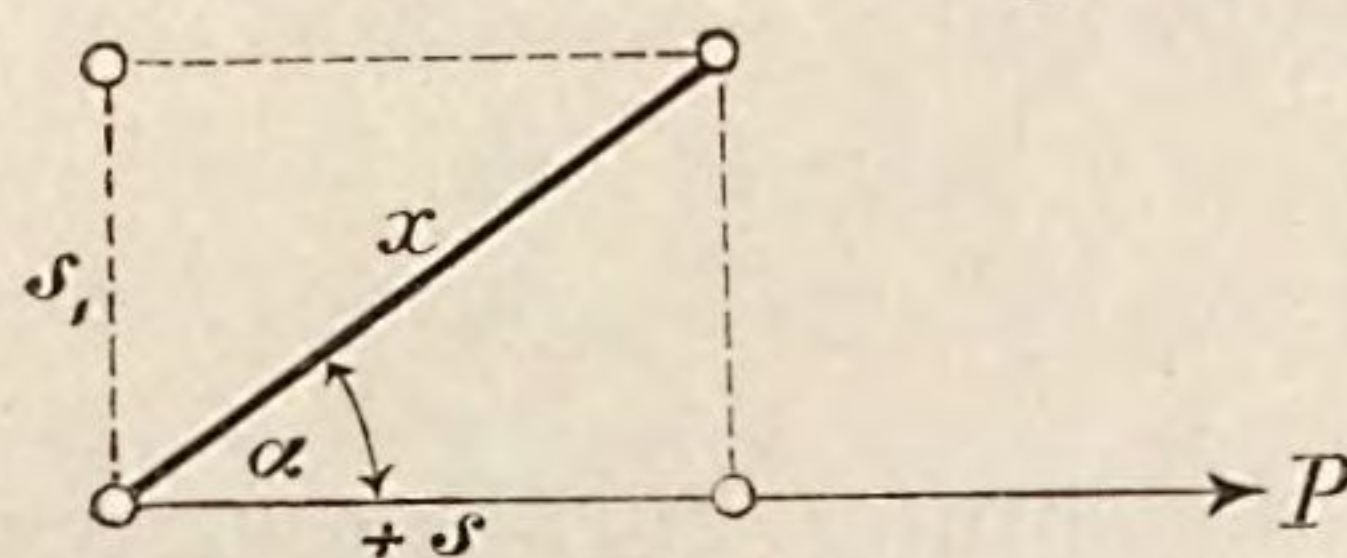


Fig. 81.

ist, bestimmt sich mit Hilfe der beiden vorhergehenden Fälle. Man zerlegt den Weg x in die Richtung der Kraft P und senkrecht zu derselben und erhält die Leist-

ung der Kraft durch

$$L = + P \cdot s = + P \cdot x \cdot \cos \alpha \text{ nach Fig. 81}$$

und

$$L = - P \cdot s = - P \cdot x \cdot \cos \alpha \text{ nach Fig. 82.}$$

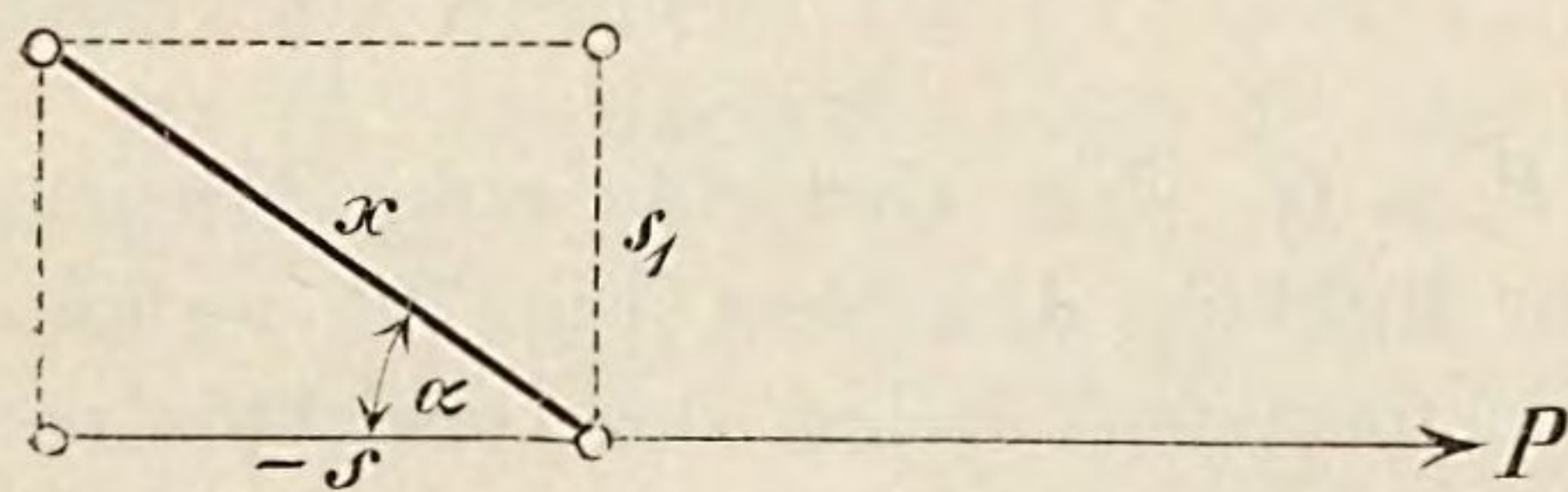


Fig. 82.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte gleichzeitig auf einen materiellen Punkt nach verschiedenen Richtungen und durchschreitet da-

bei der Angriffspunkt der Kräfte einen geraden beliebig gelegenen Weg x , dann finden sich nach Fig. 83 die in den Krafrichtungen von P_1 und P_2 zurückgelegten Wege durch

$$s_1 = x \cdot \cos \alpha_1$$

und

$$s_2 = x \cdot \cos \alpha_2,$$

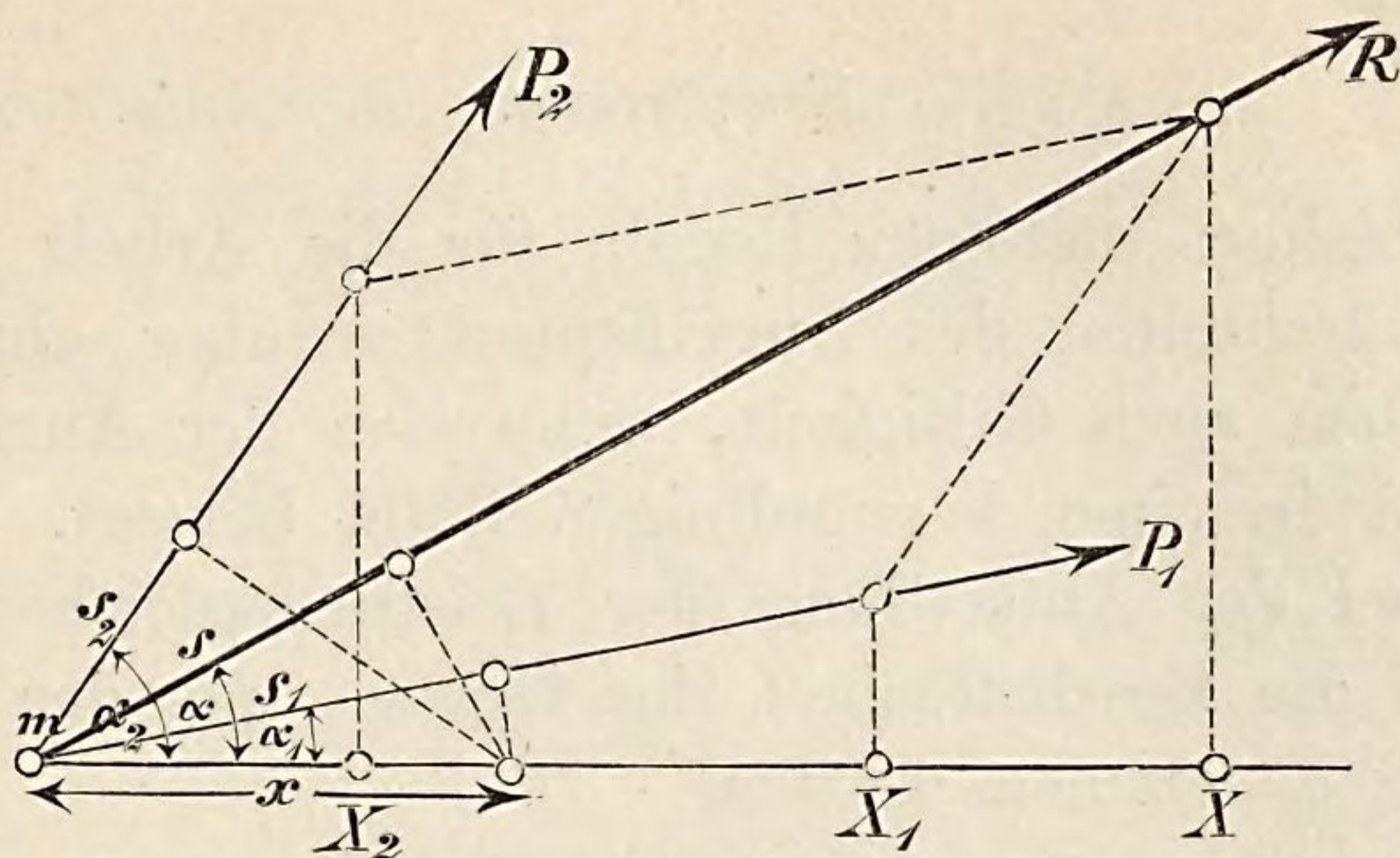


Fig. 83.

während für die Resultierende R der beiden Kräfte sich der Weg

$$s = x \cdot \cos \alpha$$

ergibt.

Zerlegt man nun sowohl die Seitenkräfte, als auch die Resultierende in eine mit dem Wege x zusammenfallende Achse und senkrecht zu derselben, dann gilt nach Fig. 83 und nach Früherem, wenn die Componenten mit X_1 , X_2 und X bezeichnet werden,

$$X = \Sigma(X)$$

oder hier

$$X = X_1 + X_2;$$

wofür geschrieben werden kann

$$R \cdot \cos \alpha = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2$$

oder

$$R \cdot \frac{s}{x} = P_1 \cdot \frac{s_1}{x} + P_2 \cdot \frac{s_2}{x},$$

und es resultirt

$$R \cdot s = P_1 \cdot s_1 + P_2 \cdot s_2.$$

Für beliebig viele Kräfte aber würde allgemein zu schreiben sein

$$R \cdot s = \Sigma(P \cdot s),$$

d. h. „die Arbeit der Resultierenden ist gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Seitenkräfte“, welcher Satz selbstredend auch für beliebig viele und beliebig im Raum gelegene Kräfte Giltigkeit hat.

Erweiterung.

Die bisher erhaltenen Regeln für die Arbeit der Kraft beim Fortschreiten des Angriffspunktes über eine gerade Bahn haben auch Giltigkeit, wenn sich der Angriffspunkt der Kraft in einer krummlinigen Bahn bewegt. Es muss jedoch bei der Aufstellung der Leistungsgleichung Rücksicht auf die Beschaffenheit der Grösse und der Richtung der Kraft genommen werden.

1) Die Kraft P sei der Grösse nach constant und

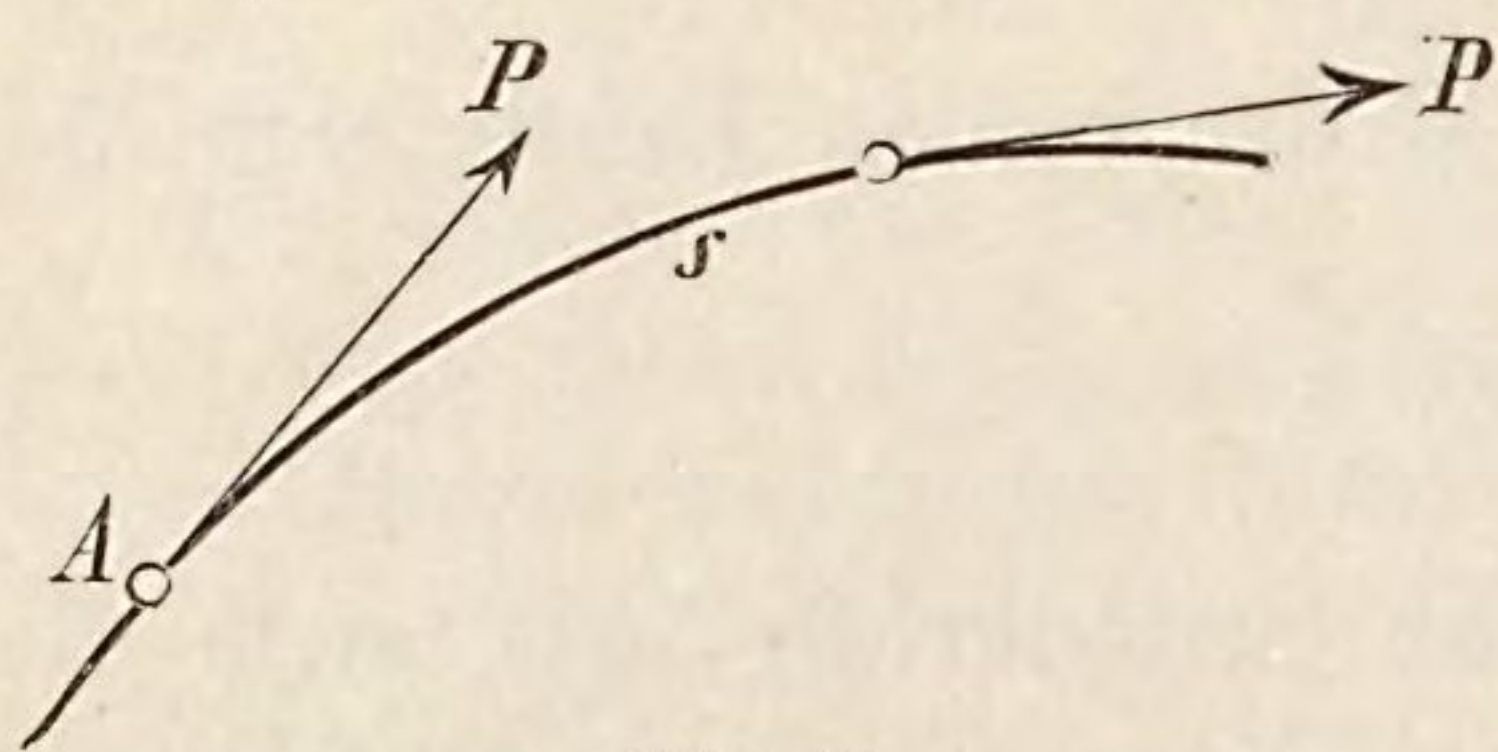


Fig. 84.

a) stets tangential zur Bahn gerichtet, dann ist die Leistung

$$L = P \cdot s,$$

wobei s den wahren vom Angriffspunkte der Kraft P in der Curve durchlaufenen Weg bedeutet (Fig. 84).

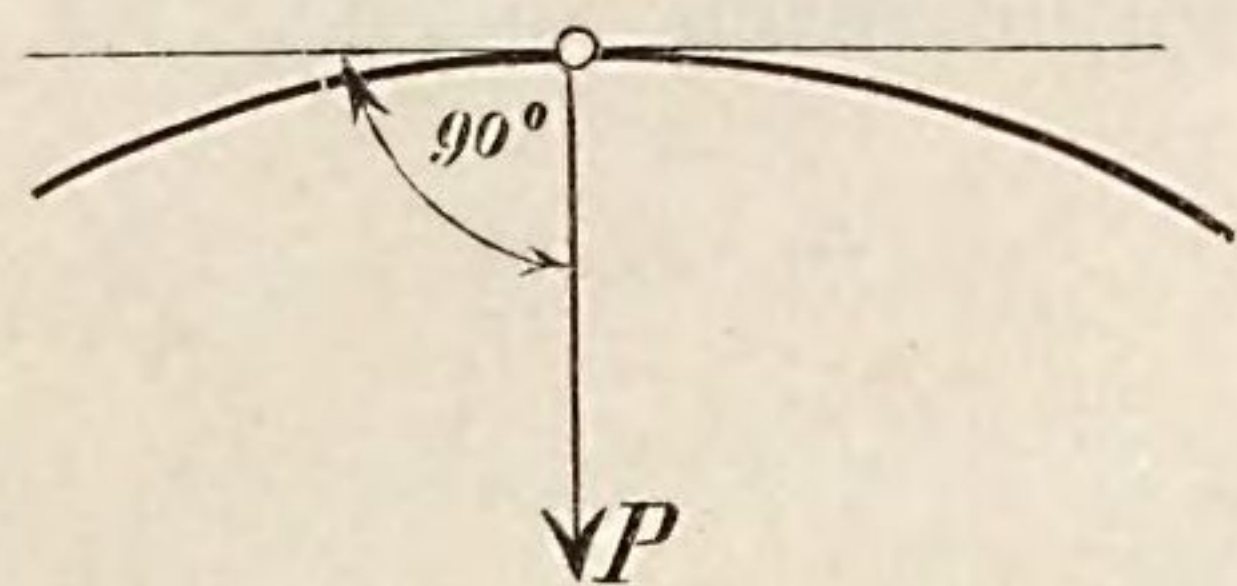


Fig. 85.

b) Liegt die Kraft P stets normal zur Bahn (Fig. 85), so wird in ihrer Richtung kein Weg zurückgelegt, und die Leistung wird

$$L = 0.$$

c) Ist endlich „die Richtung“ der constanten Kraft P beliebig veränderlich (Fig. 86), während ihr Angriffspunkt den krummen Weg s durchläuft, und heisst der veränderliche Neigungswinkel der Kraft P zur Tangente α , dann

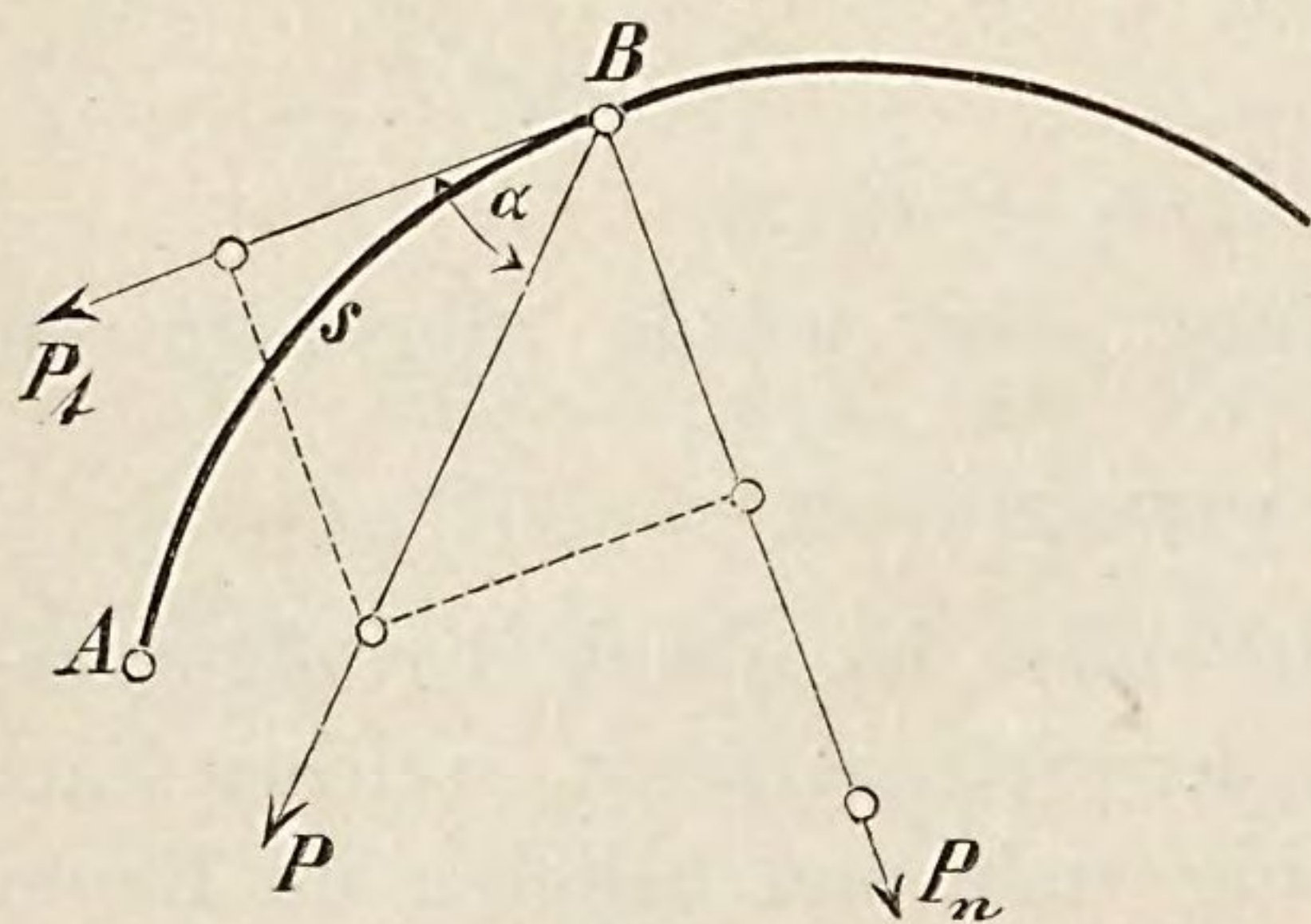


Fig. 86.

ergeben sich durch tangentiale und normale Zerlegung die Seitenkräfte P_t und P_n , von denen nach Obigem P_n überhaupt keine Arbeit verrichtet und P_t über den gerad-

linig zu betrachtenden Weg ds als constant angesehen werden darf. Hiernach ist ein Differential der mechanischen Arbeit der Kraft P (Fig. 87)

$$dL = P_t \cdot ds$$

und die ganze Arbeit über den Weg s

$$L = \int P_t \cdot ds$$

oder, da

$$P_t = P \cdot \cos \alpha,$$

$$L = P \cdot \int ds \cdot \cos \alpha.$$

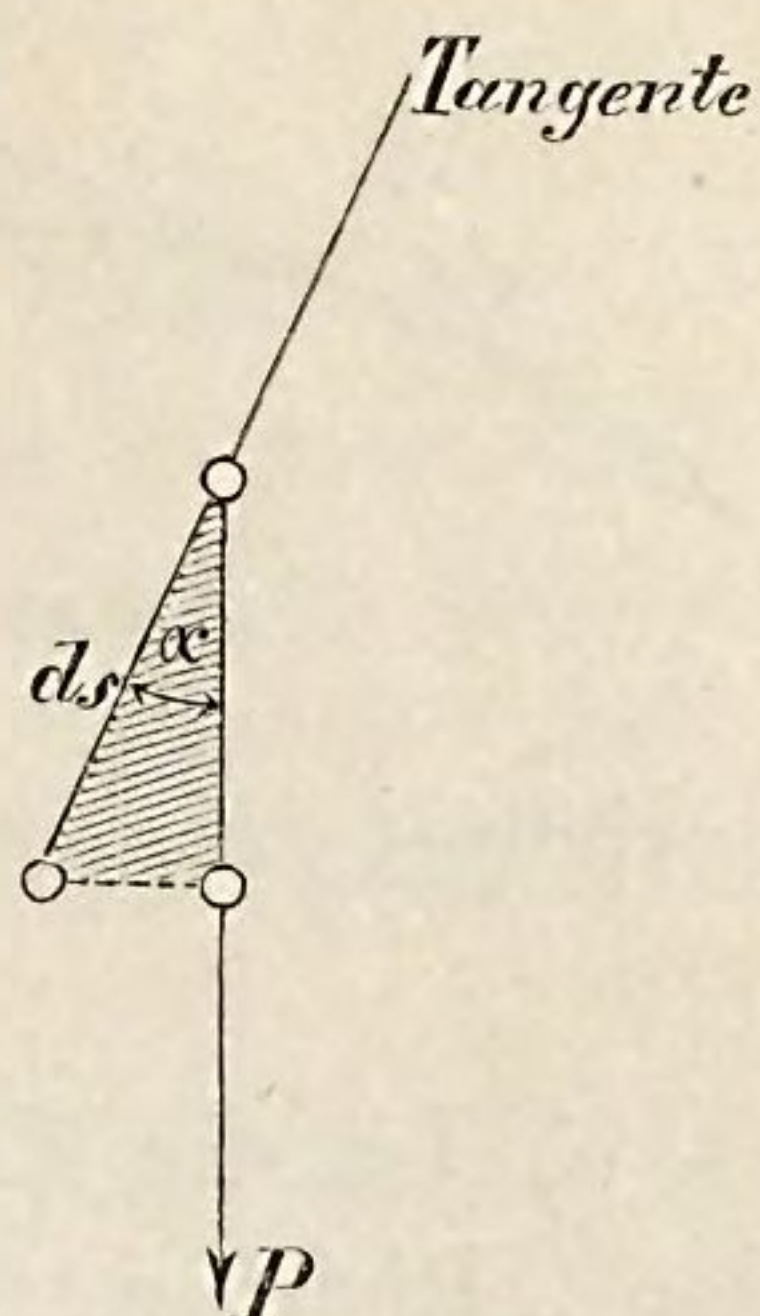


Fig. 87.

Spezieller Fall: Ändert sich der Winkel α derart, dass die nach Grösse constante Kraft P während ihres Fortschreitens stets parallel zu ihrer ursprünglichen Lage bleibt, dann ist nach Fig. 88

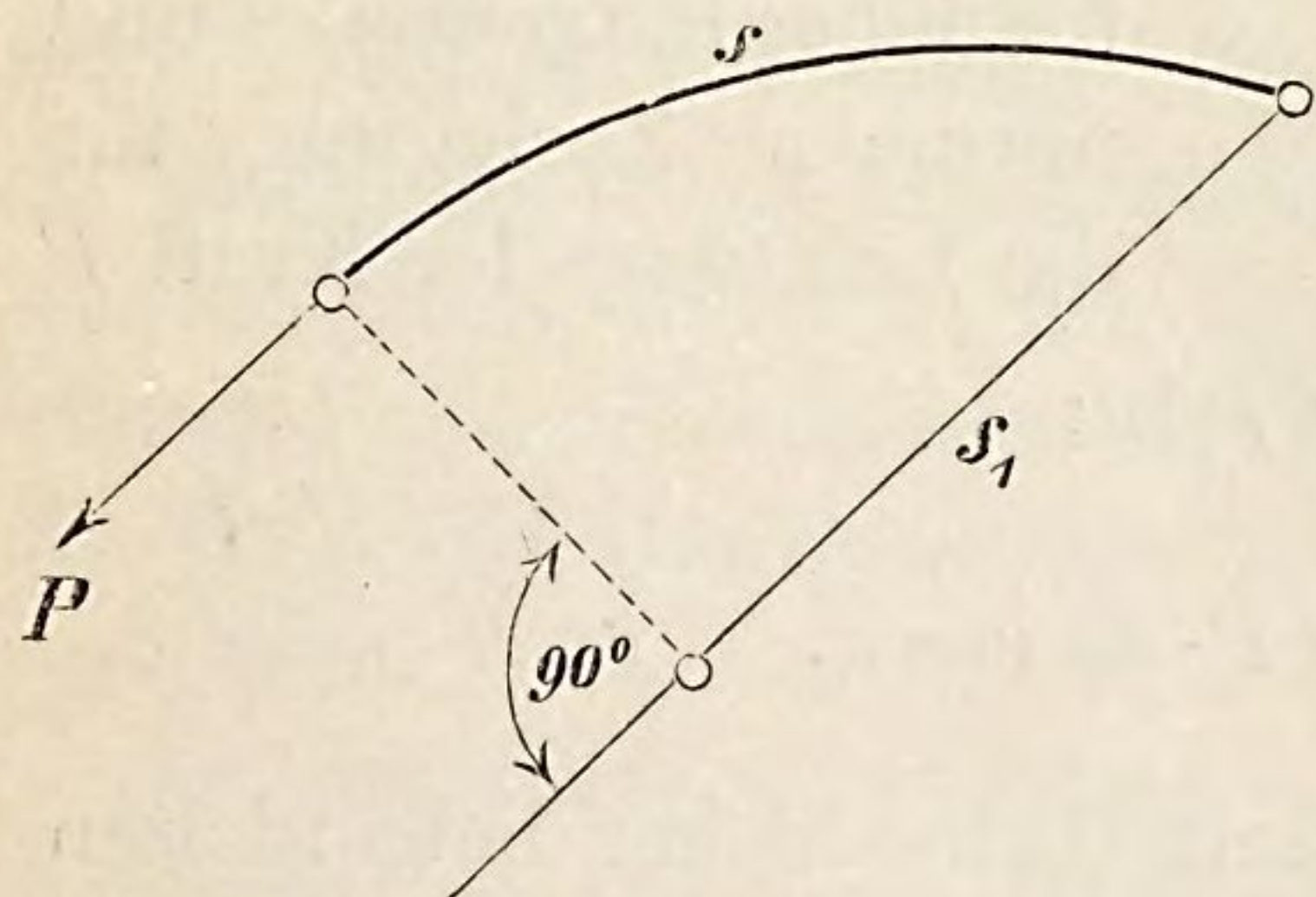


Fig. 88.

$$\int ds \cdot \cos \alpha = s_1$$

und die Leistung der Kraft P

$$L = P \cdot s_1.$$

Wäre beispielsweise $P = G$, einem Gewichte, welches sich über den krummen Weg s abwärts bewegt, dann würde die Arbeit des Gewichtes

$$L = G \cdot h,$$

wenn h die Projection des Weges s senkrecht zur Krafrichtung vorstellt (Fig. 89).

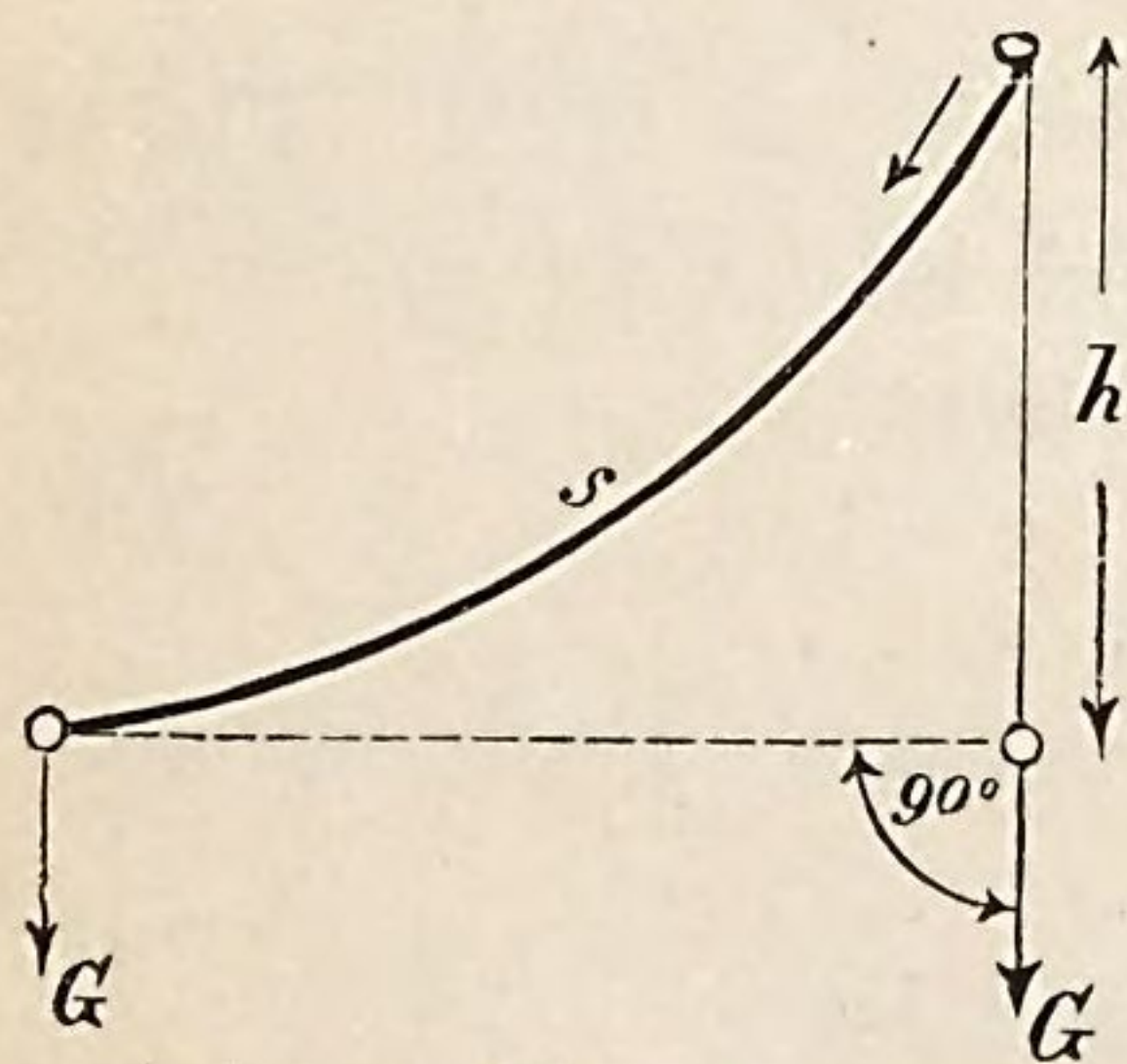


Fig. 89.

- 2) Es sei die Kraft P der „Grösse“ nach veränderlich und
- a) stets tangential zur Curve gerichtet, dann ist (Fig. 90)

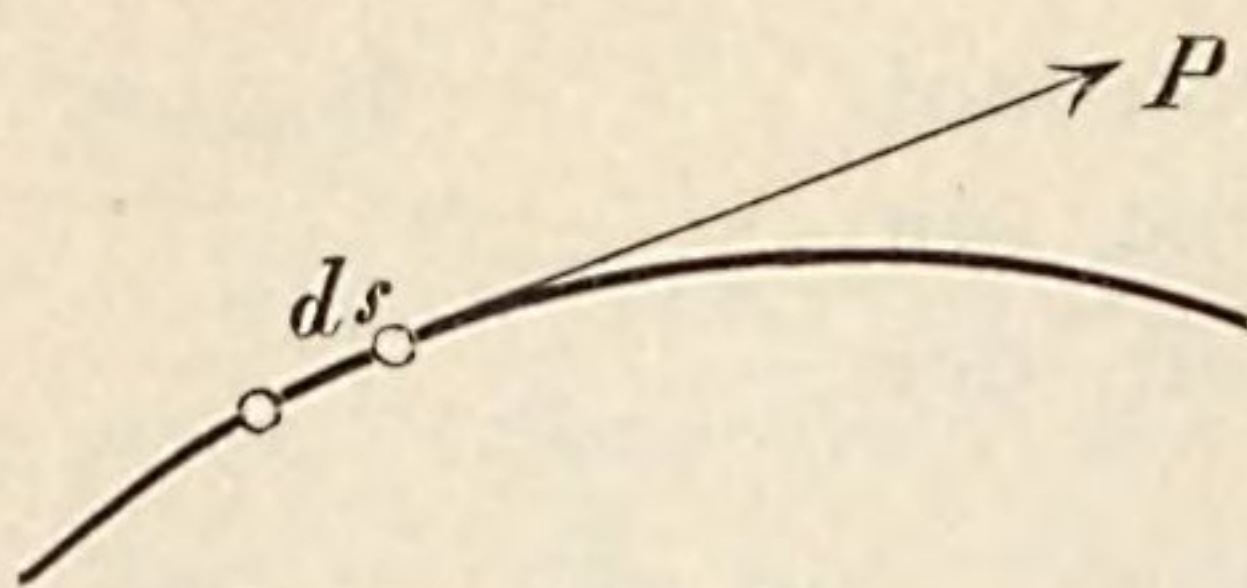


Fig. 90.

und

$$dL = P \cdot ds$$

$$L = \int P \cdot ds.$$

b) Würde die veränderliche Kraft P stets normal zur Bahn gerichtet sein, so wäre auch hier

$$L = 0.$$

c) Ist die Kraft P nicht nur der „Grösse“, sondern auch der „Richtung“ nach beliebig veränderlich und heisst der

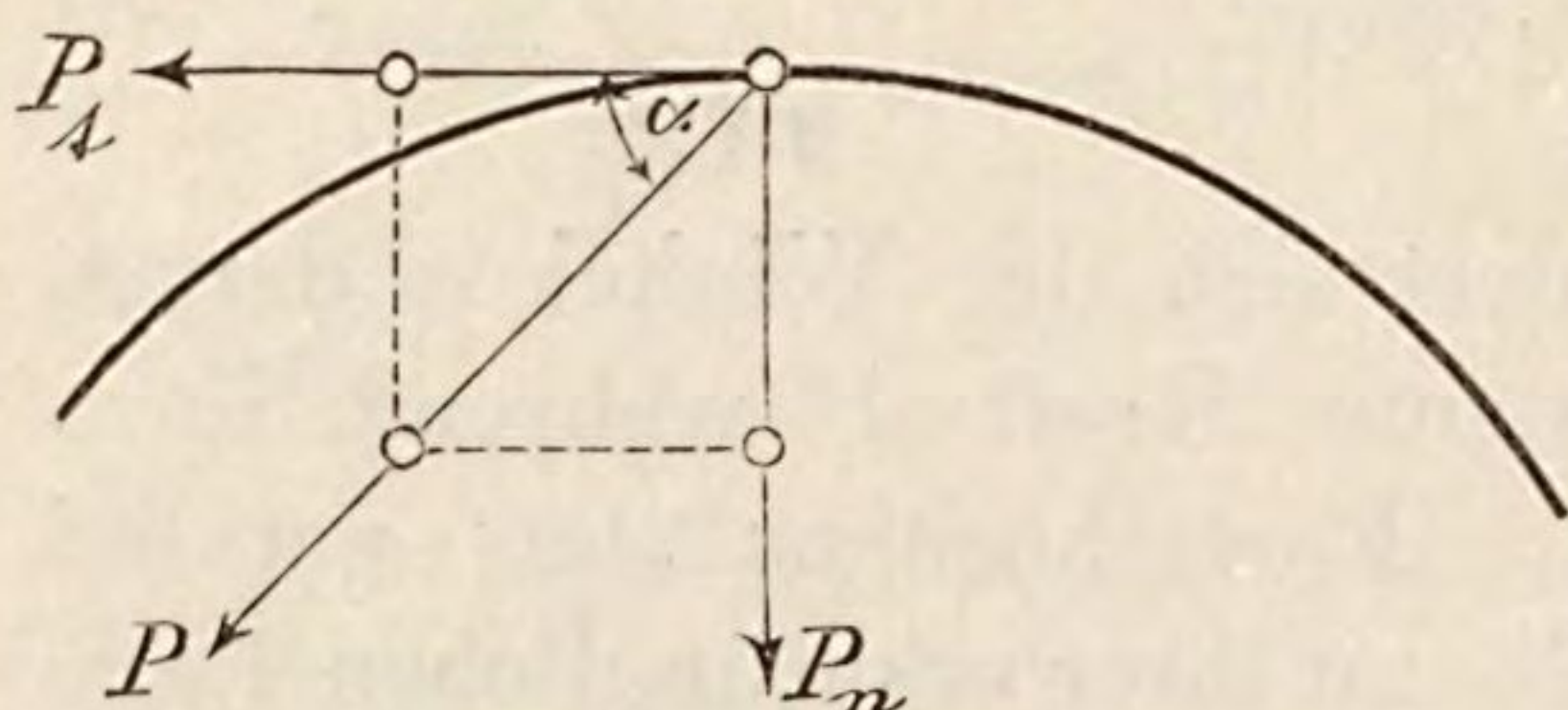


Fig. 91.

veränderliche Richtungswinkel der Kraft P zur Tangente α (Fig. 91), dann gilt nach stattgefundener tangentialer und normaler Zerlegung für die Leistung der Kraft P

$$L = \int P_t \cdot ds$$

oder

$$L = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha.$$

In dieser Gleichung sind sämtliche bisher behandelten Fälle als specielle enthalten; denn ist

1) P constant und

- a) $\alpha = 0^\circ$, so ist $L = P \cdot s$,
- b) $\alpha = 90^\circ$, so folgt $L = 0$, und ist
- c) α beliebig veränderlich, so wird

$$L = P \cdot \int ds \cdot \cos \alpha.$$

Ist ferner 2) P veränderlich und

- a) $\alpha = 0^\circ$, so ist $L = \int P \cdot ds$ und ist
- b) $\alpha = 90^\circ$, dann folgt $L = 0$.

Die Gleichung $L = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha$ ist auch dann noch ganz allgemein gültig, wenn der Angriffspunkt der nach

Grösse und Richtung veränderlichen Kraft P in einer doppelt gekrümmten Curve fortschreitet. Denkt man sich im letzten Falle sowohl die veränderliche Kraft P , als auch die unendlich kleine Fortschreitung ds im Raume in drei senkrecht aufeinander stehende Achsen zerlegt, und heissen die veränderlichen Kraftcomponenten X , Y , Z und die entsprechenden Wegcomponenten dx , dy und dz , dann gilt der Gleichung

$$R \cdot s = \Sigma(P \cdot s)$$

für das Differential der Kraftleistung

$$dL = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz$$

und für die ganze mechanische Arbeit über einen Weg s

$$L = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

durch welche Gleichung der Satz von der mechanischen Arbeit allgemeiner ausgesprochen wird. Noch ist die Gleichung gültig, wenn P die Resultirende aus beliebig vielen und beliebig gerichteten Kräften ist, nur sind dann unter X , Y , Z die Resultirenden in den gleichnamigen Achsen zu verstehen.

Ist die Kraft P stets nach einem unbeweglichen Punkte gerichtet, so wird die Bewegung eine sogenannte

„Centralbewegung“,

und ist dabei die Kraft eine Function des Abstandes r der bewegten Masse m von jenem Fixpunkte, also

$$P = F(r)$$

oder

$$m \cdot p_r = F(r),$$

dann ist die Leistung

$$L = \pm \int P \cdot dr.$$

Diejenige Arbeitsleistung, welche eine Kraft über den ganzen in der Zeit t und in der Kraftrichtung zurückgelegten Weg verrichtet, nennt man

„Arbeitsquantität“,

während das Arbeitsquantum in 1 Secunde, also das Product aus Kraft und Geschwindigkeit, die

„Arbeitsintensität“

genannt wird.

Drückt man die Kräfte durch Pfunde und die Wege durch Fusse aus, so bezeichnet man die mechanische Arbeit allgemein mit dem Namen

„Fusspfunde“,

werden jedoch — und wie es im Folgenden geschehen soll — die Kräfte durch Kilogramme und die Wege durch Meter ausgedrückt, dann nennt man die Arbeit

„Meterkilogramme“

oder

„Kilogrammmer“.

Graphische Darstellung der von einer Kraft geleisteten mechanischen Arbeit.

1) Die Kraft P sei nach Grösse und Richtung constant und s der in der Krafrichtung zurückgelegte Weg.

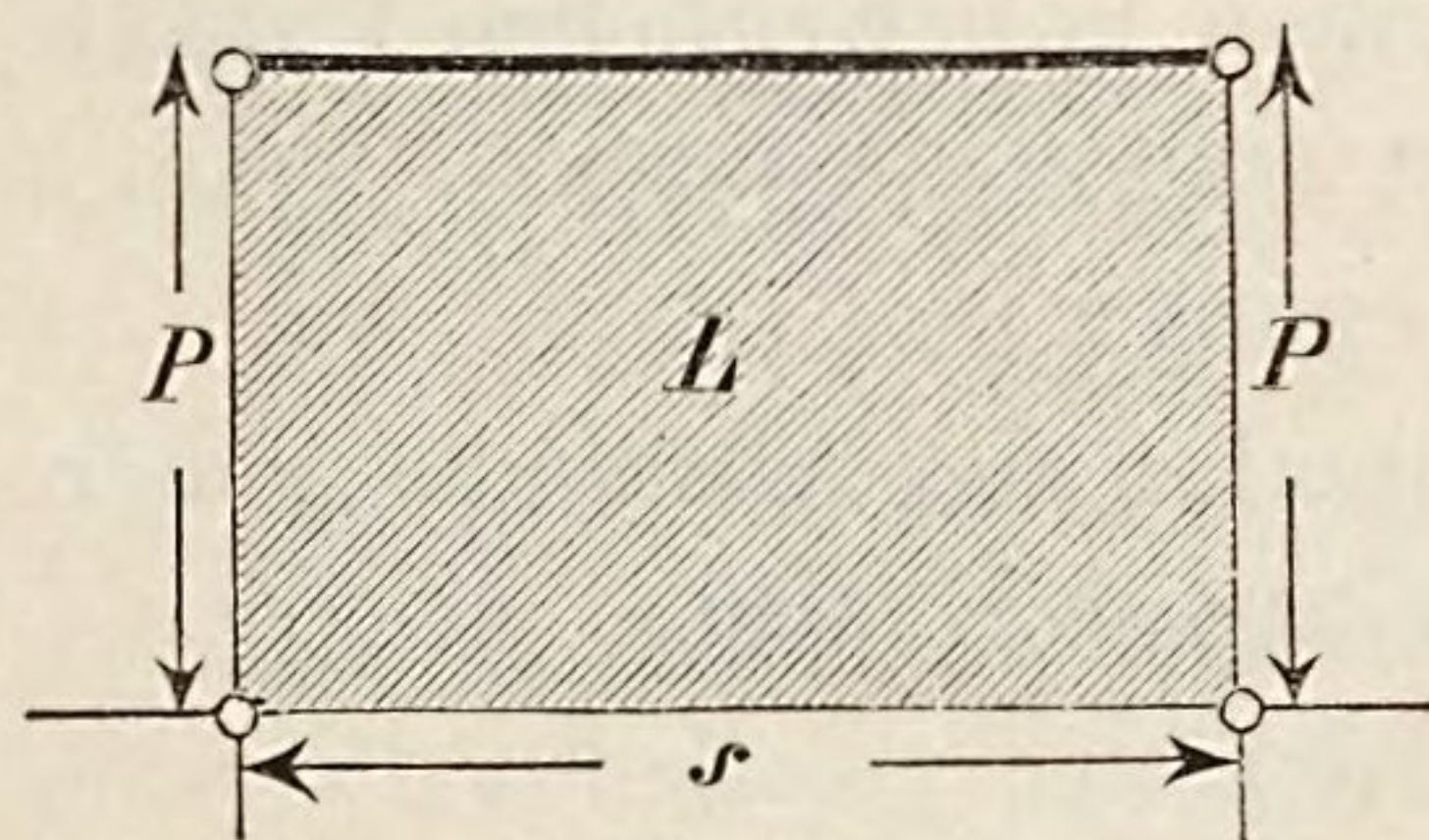


Fig. 92.

Trägt man s als Abscisse und P als Ordinate auf (Fig. 92), so entspricht jedem beliebigen Wege dieselbe Kraft, und es ergibt sich als Begrenzung der constanten Ordinaten eine „Gerade“, welche allgemein „Kraftcurve“ ge-

nannt wird; ausserdem entsteht ein Rechteck, dessen Flächen-

$$L = P \cdot s$$

die mechanische Arbeit geometrisch repräsentirt.

2) Nimmt die Kraft stetig zu oder stetig ab und heissen die Anfangskraft P_a , die Endkraft P_e , ferner der in der Krafrichtung zurückgelegte Weg s , dann ergeben sich nach

der im Vorigen angegebenen Weise folgende graphischen Darstellungen:

a) Ist die Kraft P stetig wachsend, so wird die Kraftcurve eine steigende Gerade und die Leistung durch den Flächeninhalt des Trapezes (Fig. 93)

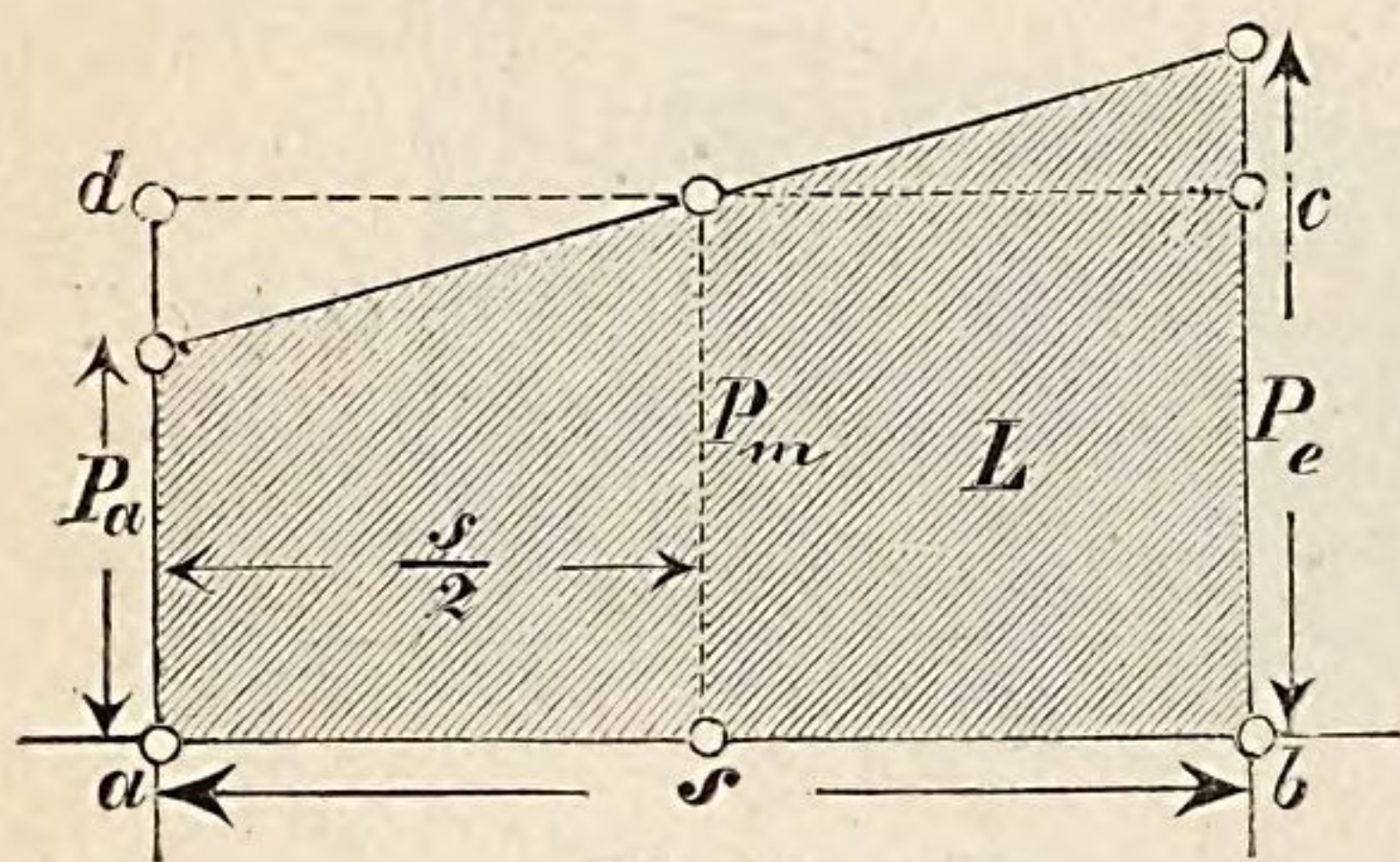


Fig. 93.

$$L = \frac{P_a + P_e}{2} \cdot s$$

graphisch veranschaulicht.

In letzter Gleichung ist

$$\frac{P_a + P_e}{2} = P_m$$

eine mittlere Kraft oder die Ordinate in der Entfernung $\frac{s}{2}$, folglich lässt sich die ganze Leistung hier auch nach einem Rechteck $abcd$ ausrechnen, dessen Höhe P_m beträgt.

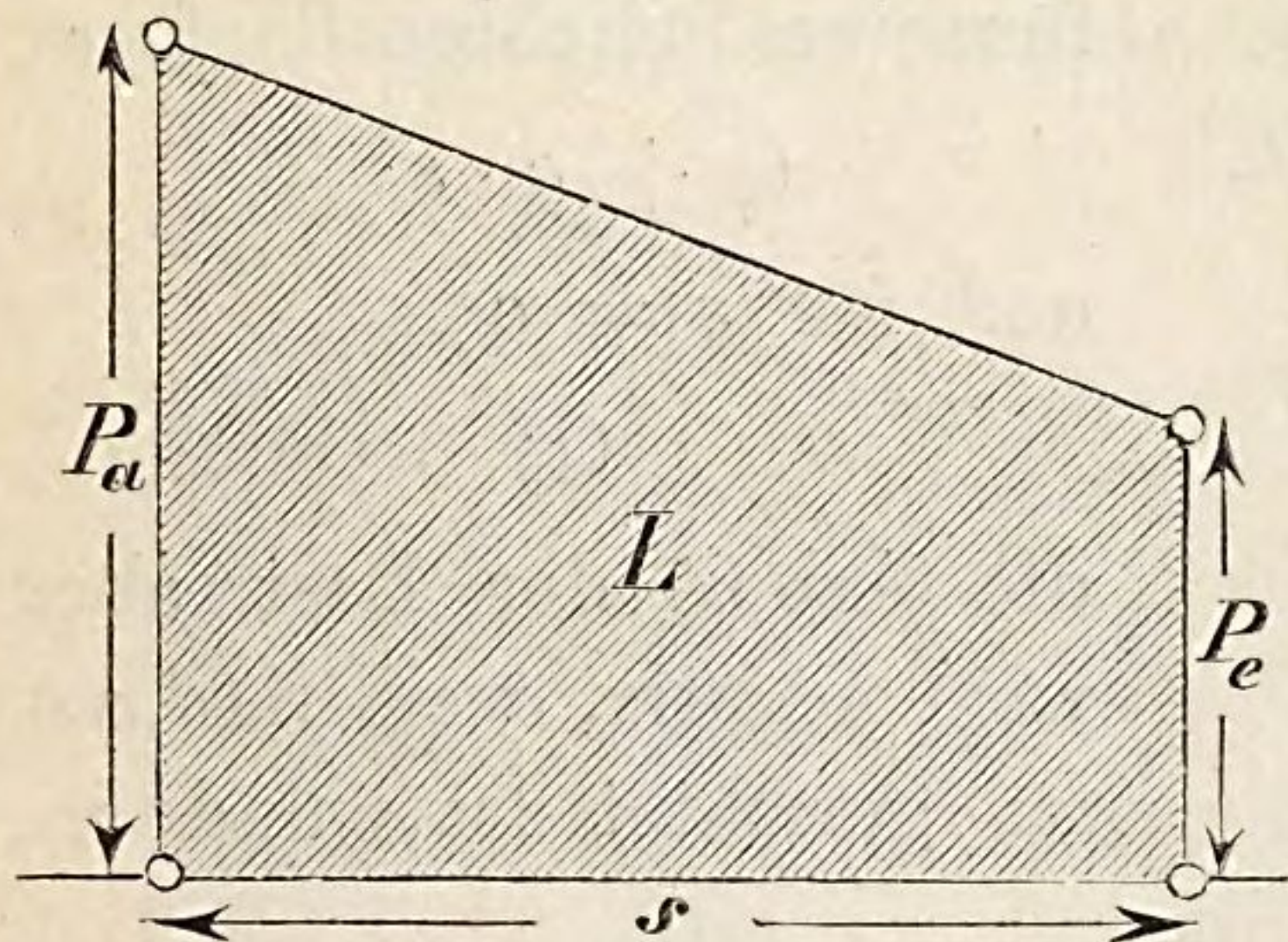


Fig. 94.

b) Die Kraft sei stetig abnehmend.

Auch hier gilt (Fig. 94)

$$L = \frac{P_a + P_e}{2} \cdot s,$$

$$L = P_m \cdot s.$$

Lässt man eine Last Q an einem Seile, dessen Gewicht pro Längeneinheit q beträgt, gleichförmig über eine Höhe H herabsinken (Fig. 95), so ist wegen der Zunahme des Seilgewichtes die totale Last eine veränderliche und zwar für eine beliebige Tiefe s

$$Q + q \cdot s,$$

für $s = 0$

$$Q$$

und für $s = H$

$$Q + q \cdot H.$$

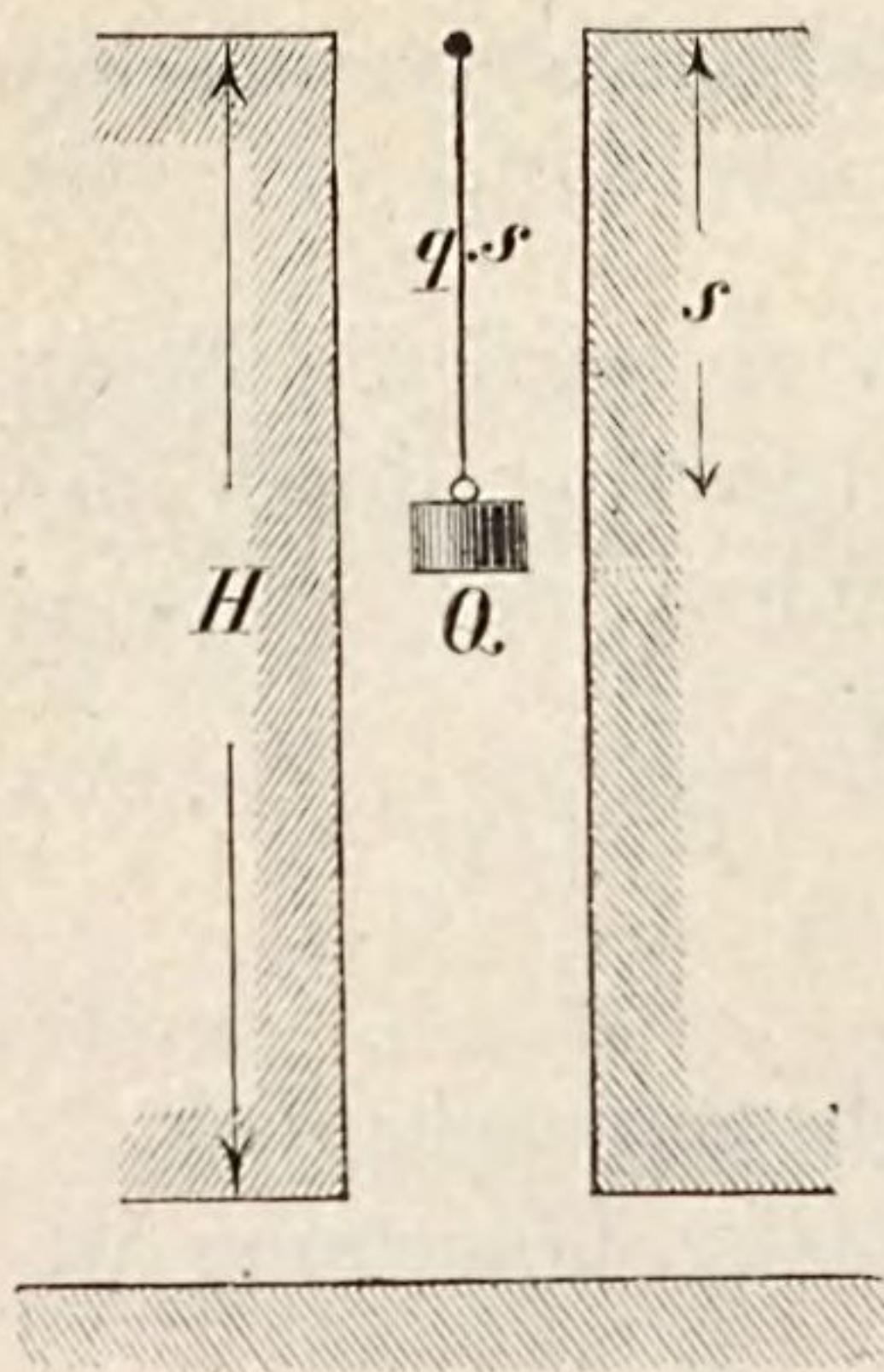


Fig. 95.

Da nun s stetig wächst, so wird die Arbeit der veränderlichen Last durch Fig. 96 veranschaulicht.

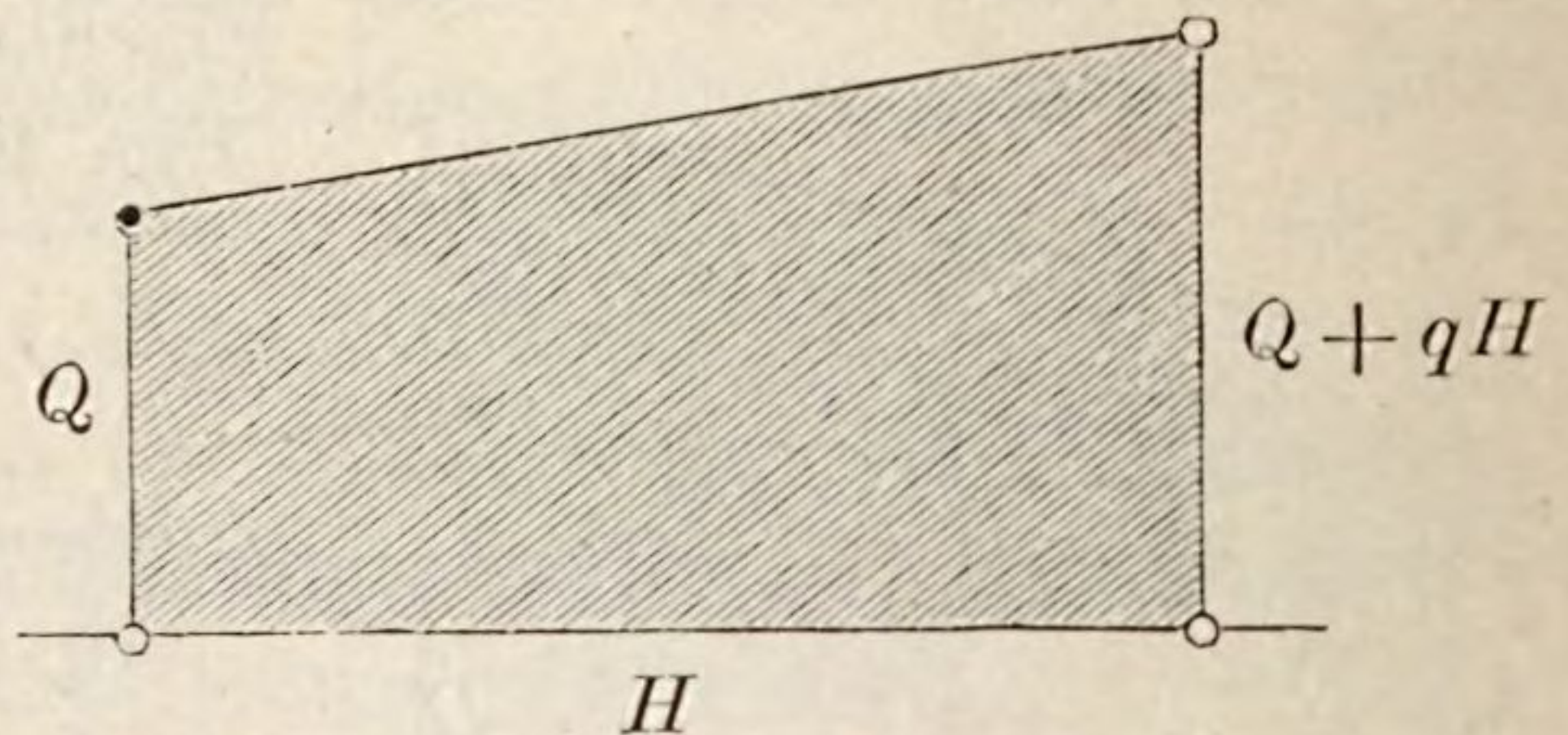


Fig. 96.

Wird umgekehrt die Last mit dem Seile aus der Tiefe wieder gleichförmig gehoben, so ist die Last im Anfange

$$Q + q \cdot H,$$

für eine beliebige Tiefe s

$$Q + q \cdot s$$

und für $s = 0$

$$Q;$$

die Arbeit der Last aber wird negativ, weil die Last

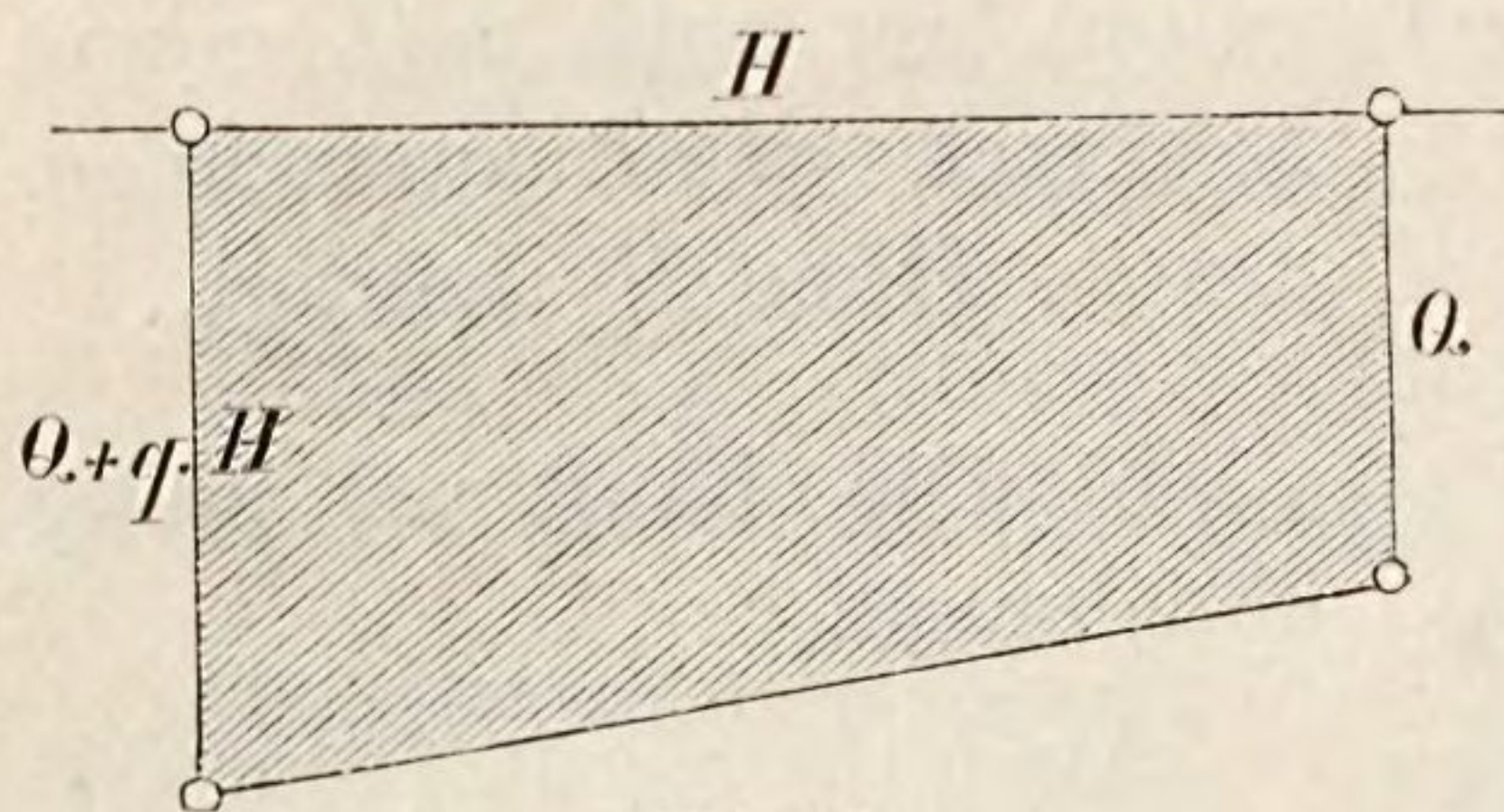


Fig. 97.

der Bewegungsrichtung entgegengesetzt gerichtet ist, und im Uebrigen durch Fig. 97 dargestellt.

Die Kraftgleichung der geradlinig schwingenden Bewegung heisst, wie später bewiesen wird,

$$P = -m \cdot x \cdot \omega^2;$$

die Kraft ist also direct proportional dem Wege x .

Die Arbeit über den Weg x ist daher durch die Dreiecksfläche $Oab = L$ (Fig. 98) oder

$$L = \frac{P \cdot x}{2},$$

$$L = \frac{m \cdot x^2 \cdot \omega^2}{2}$$

graphisch veranschaulicht.

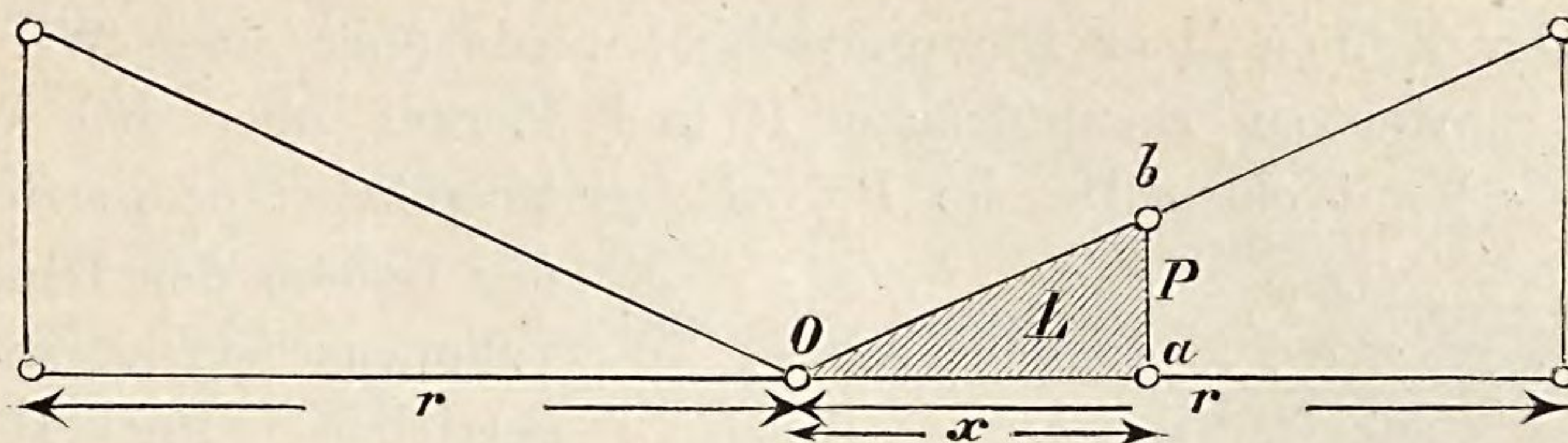


Fig. 98.

3) Die Kraft P sei nach „Grösse“ und „Richtung“ veränderlich und s der vom Angriffspunkte auf einer krummen Bahn zurückgelegte Weg.

Für den vorliegenden Fall galt

$$L = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

oder
$$L = \int P_t \cdot ds,$$

worin P_t diejenige veränderliche Kraftkomponente ist, welche stets tangential zur krummlinigen Bahn fällt. Ändert sich

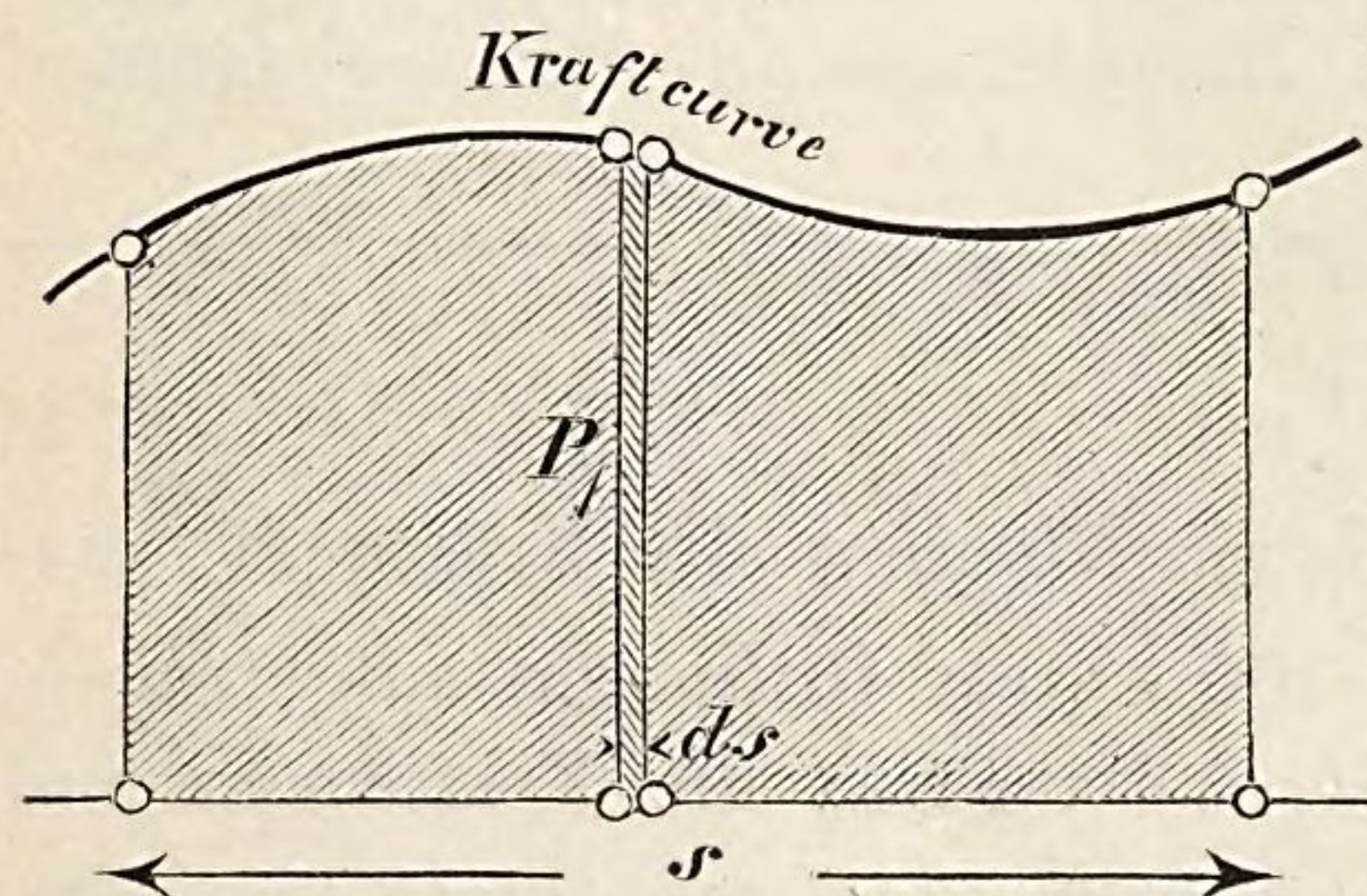


Fig. 99.

P_t mit dem Winkel α , resp. dieser mit dem Wege, dann trage man die verschiedenen Wege als Abscissen und die den Wegen zugehörigen Tangentialkräfte P_t als Ordinaten auf (Fig. 99). Die durch die Abscisse, die Anfangs- und End-Ordinate und die Kraftcurve eingeschlossene Fläche repräsentirt dann die Leistung

$$L = \int P_t \cdot ds.$$

Spezieller Fall: Wird die Bahn des materiellen Punktes eine Gerade und fällt dieselbe mit der Kraftrichtung zusammen, dann ist $P_t = P$ und $L = \int P \cdot ds$.

Der Kolben einer Dampfmaschine werde über einen Weg s_1 mit constantem Dampfdrucke P und hierauf über den Weg $(s - s_1)$ mit einem Drucke P_x , welcher umgekehrt proportional

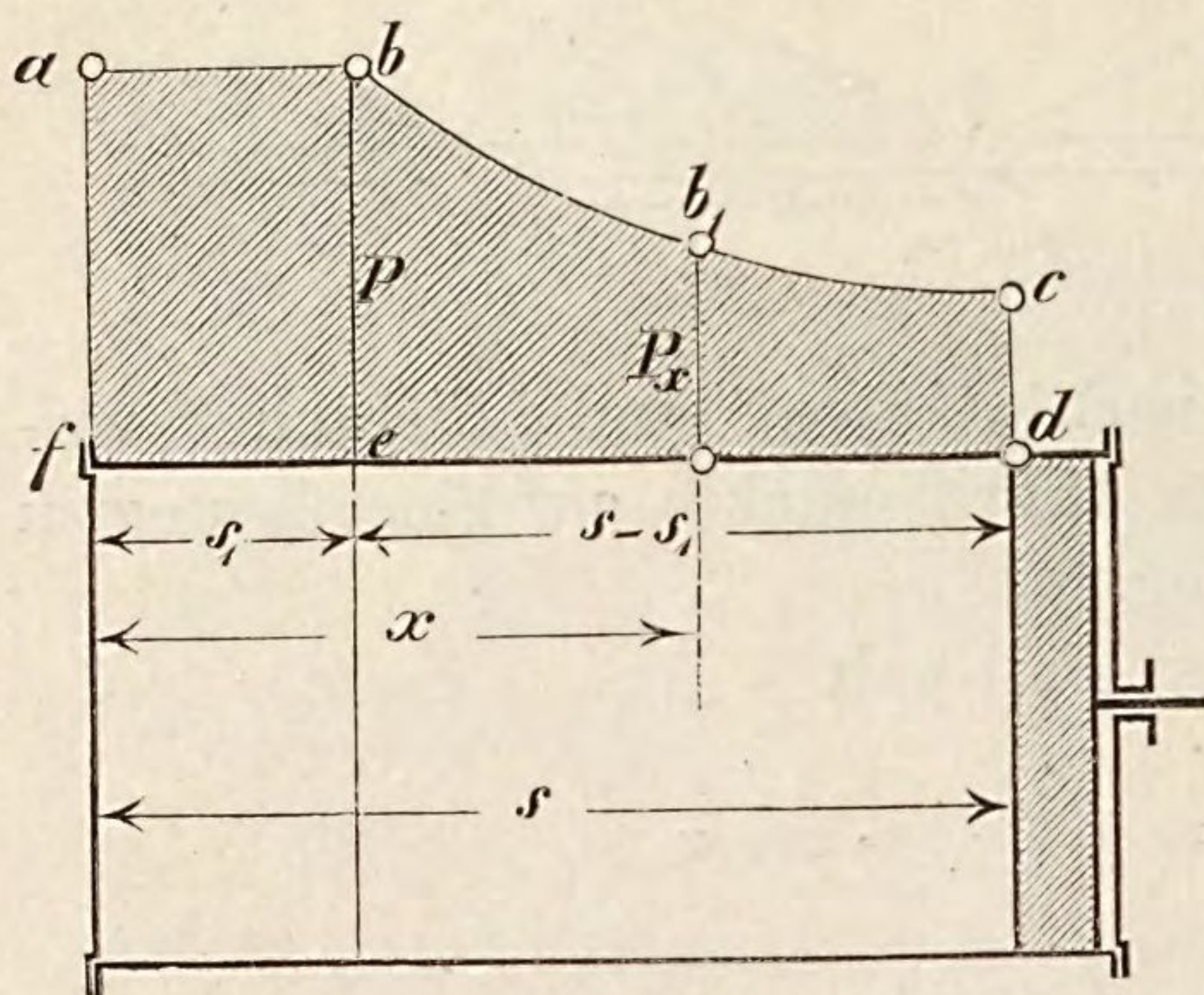


Fig. 100.

der Grösse des Dampf-
volumens ist, vorwärts
getrieben (Fig. 100).
Heisst das dem Kolben-
wege x und der Kraft
 P_x entsprechende Cylin-
dervolumen V_x , und ist
das dem Kolbenwege s_1
und dem Drucke P ent-
sprechende Cylindervo-
lumen V_1 , dann gilt
nach dem Mariotteschen
Gesetz

$$\frac{P_x}{P} = \frac{V_1}{V_x}$$

oder für den veränderlichen Dampfdruck in der sogenannten Expansionsperiode

$$P_x = \frac{V_1}{V_x} \cdot P.$$

Werden für die verschiedenen Wege x die Kräfte P_x ausgerechnet und — wie in Fig. 100 — als Ordinaten aufgetragen, so liefert die Begrenzung abb_1c derselben die Kraftcurve und veranschaulicht die Fläche $L = abb_1cdef$ die totale von dem Dampfdrucke über den Weg s geleistete mechanische Arbeit.

6.

Princip der lebendigen Kräfte.

(Vergleich zwischen Ursache und Wirkung.)

Wirkt eine Kraft P derart auf einen materiellen Punkt, dass ihre Richtung mit der Richtung der anfänglichen gleich-

förmig geradlinigen Bewegung des letzteren zusammenfällt, so besteht die Wirkung der Kraft über einen bestimmten Weg in einer bestimmten Zeit lediglich in einer Geschwindigkeitsänderung der Masse in der ursprünglichen Bewegungsrichtung, so dass die neue Bewegung eine „geradlinig geänderte“ wird.

Ist v die veränderliche Geschwindigkeit, dann gilt nach dem Gesetz der Beschleunigung für die Kraft

$$P = m \cdot \frac{dv}{dt},$$

welche Gleichung mit

$$ds$$

multiplicirt, die neue

$$P \cdot ds = m \cdot v \cdot dv$$

liefert.

Bedeutet nun c die Geschwindigkeit zur Zeit 0 oder in dem Augenblick, in welchem die Kraft P zu wirken beginnt, und v die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t , dann ist die totale Leistung und Wirkung ausgesprochen durch

$$\begin{aligned} \int P \cdot ds &= m \cdot \int_c^v v \cdot dv \\ &= \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}. \end{aligned}$$

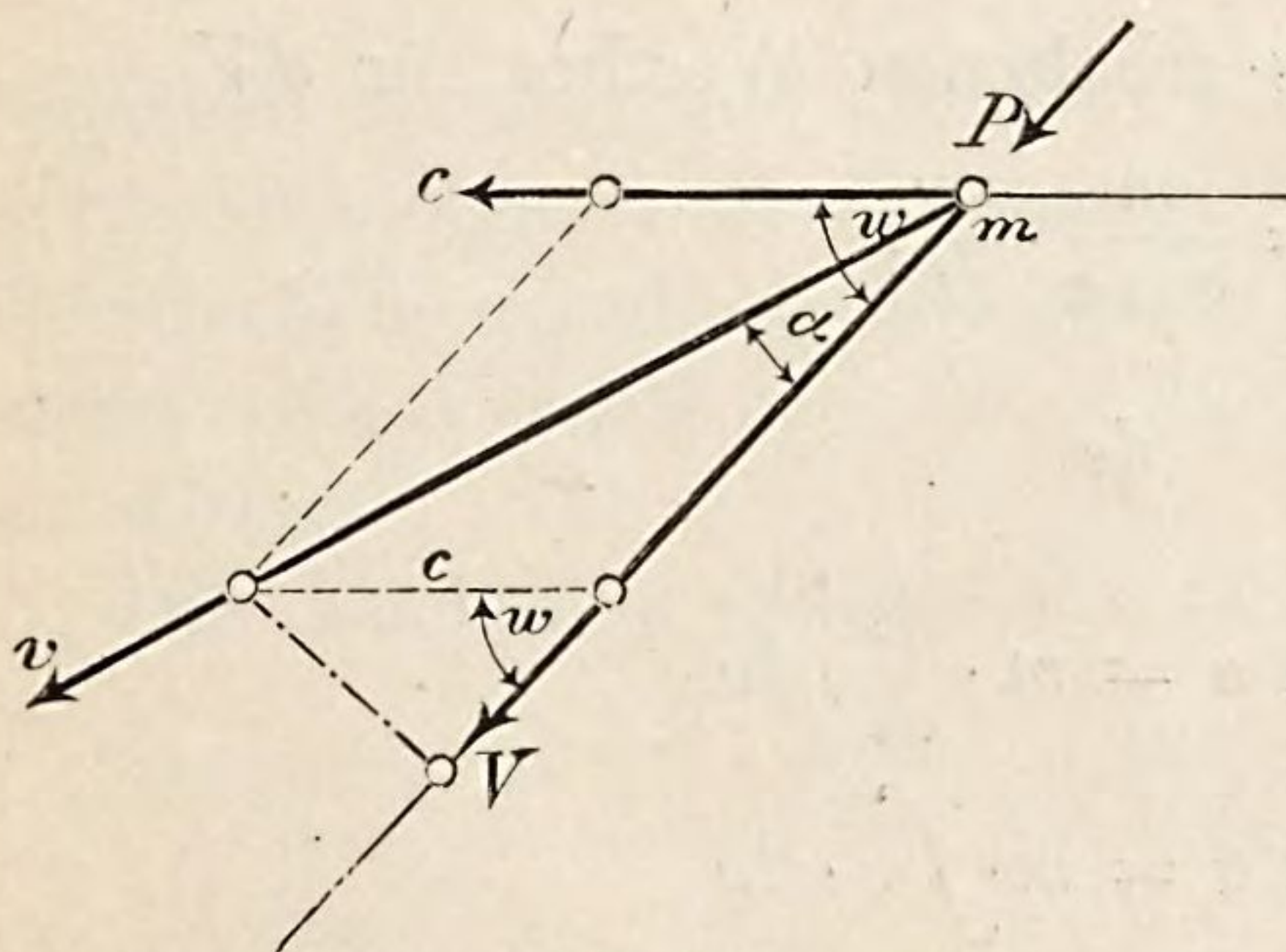


Fig. 101.

Besitzt die Kraft P zu der ursprünglichen geradlinig gleichförmigen Bewegung einen Richtungsunterschied w (Fig. 101), heisst die constante anfängliche Geschwindigkeit c und diejenige veränderliche Geschwindigkeit, welche die Kraft P dem ma-

teriellen Punkte in ihrer eigenen Richtung ertheilt, V , dann wird die wahre Geschwindigkeit v desselben die Resultante aus c und V und ihre Richtung zugleich auch die augenblickliche Richtung der entstehenden krummlinigen Bewegung.

Die veränderliche Richtung von v zur Kraft P oder zu V ist α , und die Grösse von v wird ausgedrückt durch

$$v^2 = c^2 + V^2 + 2 \cdot c \cdot V \cdot \cos w,$$

woraus sich, c und w als constant betrachtet, durch Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} v \cdot dv &= V \cdot dV + c \cdot \cos w \cdot dV \\ &= (V + c \cdot \cos w) \cdot dV. \end{aligned}$$

Nun ist aber auch nach Fig. 101

$$v \cdot \cos \alpha = V + c \cdot \cos w$$

oder

$$c \cdot \cos w = v \cdot \cos \alpha - V,$$

folglich ergibt sich aus obiger Gleichung durch Einsetzung dieses Werthes

$$v \cdot dv = v \cdot \cos \alpha \cdot dV$$

$$\text{oder} \quad dV = \frac{dv}{\cos \alpha}.$$

Nach dem Gesetz der Beschleunigung ist weiter die Kraft

$$P = m \cdot \frac{dV}{dt}$$

oder nach Einsetzung des erhaltenen Werthes für dV

$$P = \frac{m}{\cos \alpha} \cdot \frac{dv}{dt},$$

welche Gleichung mit

$$ds$$

multiplicirt,

$$P \cdot ds \cdot \cos \alpha = m \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv$$

$$\text{oder} \quad \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha = m \cdot \int v \cdot dv$$

ergibt.

Bedeutet nunmehr c die Geschwindigkeit zur Zeit Null oder überhaupt in dem Augenblicke, in welchem P zu wirken beginnt, und v die Geschwindigkeit nach Ablauf der Zeit t , dann folgt

$$\int P \cdot ds \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2},$$

diejenige Gleichung, welche „allgemein die Beziehungen zwischen Kraft, Masse, Raum und Zeit oder zwischen Ursache und Wirkung angiebt“.

Während die linke Seite allgemein die innerhalb bestimmter Zeit geleistete mechanische Arbeit einer nach Grösse und Richtung veränderlichen Kraft P , also die Ursache der Bewegung ausdrückt, liefert die rechte Seite die Geschwindigkeitsänderung der Masse in tangentialer Richtung zur krummen Bahn oder besser die ganze Wirkung, das ist „das Wachsthum an Trägheitskraft oder sogenannter lebendiger Kraft der Masse“; denn man versteht unter der Grösse

$$\frac{m \cdot c^2}{2}$$

die lebendige Kraft, mit welcher sich der materielle Punkt ohne Einfluss der Kraft P geradlinig und gleichförmig in der Anfangsrichtung fortbewegt, unter

$$\frac{m \cdot v^2}{2}$$

hingegen die während der Zeit t durch die Kraft P geänderte lebendige Kraft des materiellen Punktes, mit welcher sich derselbe geradlinig und gleichförmig fortbewegen würde, wenn nach Verlauf der Zeit t die Kraft P aufhören würde zu wirken.

Die Aenderung selbst ist aber gleich

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}.$$

Versteht man nun noch unter P die Resultirende aus

beliebig gerichteten auf den materiellen Punkt wirkenden Kräften, dann ist nach dem Gesetz der mechanischen Arbeit

$$\int P \cdot ds \cdot \cos \alpha = \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz),$$

unter X, Y, Z die Resultirenden in den Achsenrichtungen verstanden, und folglich auch

$$\int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}.$$

Umgekehrt kann die „Wirkung“, also „bewegte“ Masse, wieder die „Ursache“ erzeugen. Denn denkt man sich beispielsweise einen ruhenden materiellen Punkt plötzlich mit einem bewegten verbunden, so wird der ruhende Punkt von dem bewegten mitgenommen, was aber selbstredend nur durch Kraftübertragung, also durch Krafterzeugung, bewirkt werden kann.*

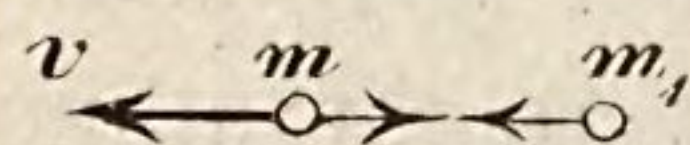


Fig. 102.

Die von der bewegten Masse veranlasste Krafterzeugung besteht nach dem Gesetze der Wechselwirkung in der Hervorbringung von zwei gleich grossen in der geraden Verbindung der materiellen Punkte liegenden Kräften (Fig. 102), von denen die eine auf die bewegte Masse m verzögernd, also negativ wirkt; die mechanische Arbeit derselben ist daher ebenfalls negativ, und es folgt somit aus obiger Gleichung allgemein für Widerstände, welche sich bewegter Masse entgegenstellen

$$-\int P \cdot ds \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2}$$

oder

$$\frac{m \cdot c^2}{2} - \frac{m \cdot v^2}{2} = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

$$= \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz).$$

* Auf Körper übertragen denke man an bewegte Eisenbahnen, welche andere dergleichen fortzubewegen im Stande sind, welche mit anderen Körpern zusammenstossend, Zerstörungen, also Kraftwirkungen hervorbringen.

Durch die verzögernde Wirkung wird

$$v < c$$

und im speciellen Falle

$$v = 0.$$

Hierfür gilt aber

$$\frac{m \cdot c^2}{2} = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha,$$

woraus hervorgeht, dass die ganze der Masse eigenthümliche lebendige Kraft wieder in Arbeit umgesetzt wird. Dieser Umstand war die Veranlassung zu dem Namen „lebendige Kraft“.

Die Beziehungen, welche in vorstehenden Gleichungen zwischen Arbeit, Masse und Geschwindigkeit ausgesprochen sind, nennt man

„das Princip der lebendigen Kräfte“.

Die Kräfte, welche in der Natur vorkommen, sind — meist nach bestimmten Punkten gerichtet — Anziehungs- oder Abstossungskräfte und dabei Functionen der Entfernungen des bewegten Punktes von jenen Punkten.

Sind $A, B, C \dots$ solche Anziehungs- oder Abstossungsmittelpunkte, welche als unbewegt betrachtet werden, sind zur Zeit t die Entfernungen der bewegten Masse m von diesen Punkten

$$r, r_1, r_2, r_3 \dots$$

$$\text{und } P_r = m \cdot p_r, P_{r_1} = m \cdot p_{r_1}, P_{r_2} = m \cdot p_{r_2}, P_{r_3} = m \cdot p_{r_3} \dots$$

die Kräfte, welche von diesen Kraftmittelpunkten aus auf die Masse m übergehen und in den Richtungen $r, r_1, r_2 \dots$ liegen, so ist die Arbeit dieser Kräfte bei einer Verschiebung der Masse um ds

$$dL = (P_r \cdot dr + P_{r_1} \cdot dr_1 + \dots)$$

worin $dr, dr_1, dr_2 \dots$ die Projectionen von ds auf die

Kraftrichtungen $r, r_1 \dots$ sind, und also die ganze Leistung

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2} = m \cdot \int (p_r \cdot dr + p_{r_1} \cdot dr_1 + \dots).$$

Es ist also hier die lebendige Kraft der Masse m an irgend einer Stelle x, y, z vollständig bestimmt, wenn man sie für eine andere Stelle x_0, y_0, z_0 kennt.

Ist eine Kraft P nach Grösse und Richtung constant, und bedeutet s den in der Kraftrichtung zurückgelegten Weg, dann gilt

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = P \cdot s.$$

Wirkt nun die Kraft P auf eine anfänglich in Ruhe befindliche Masse m , ist also

$$c = 0,$$

so folgt

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = P \cdot s,$$

d. h. es wird der Masse m nach der Zurücklegung des Weges s eine Geschwindigkeit v ertheilt.

Wirkt jedoch die Kraft P der Bewegungsrichtung der Masse m entgegengesetzt, welche letztere die anfängliche Geschwindigkeit c besitzt, und wird die schliessliche Geschwindigkeit $v = 0$, so folgt

$$-\frac{m \cdot c^2}{2} = -P \cdot s$$

oder

$$\frac{m \cdot c^2}{2} = P \cdot s.$$

Die Masse m mit der Geschwindigkeit c hat daher — wie schon eingangs bemerkt — das Vermögen eine ihrer Bewegung entgegenwirkende Kraft, einen Widerstand, über einen Weg s fortzuführen.

Für die Rechnung setzt man bequem

$$m = \frac{G}{g},$$

also

$$G \cdot \frac{v^2 - c^2}{2g} = P \cdot s.$$

Es wird ein Körper (materieller Punkt), auf welchem die Schwere wirkt, in beliebiger Richtung (Fig. 103, 104, 105) mit einer Anfangsgeschwindigkeit c abgeworfen und es entsteht die Frage nach der Grösse derjenigen Geschwindigkeit v , welche der Körper besitzt, wenn er sich um das verticale Mass h unter dem Ausgangspunkte befindet.

Es ist hier

$$P = G$$

und

$$s = h,$$

also

$$G \cdot \frac{v^2 - c^2}{2g} = G \cdot h$$

oder

$$v^2 - c^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

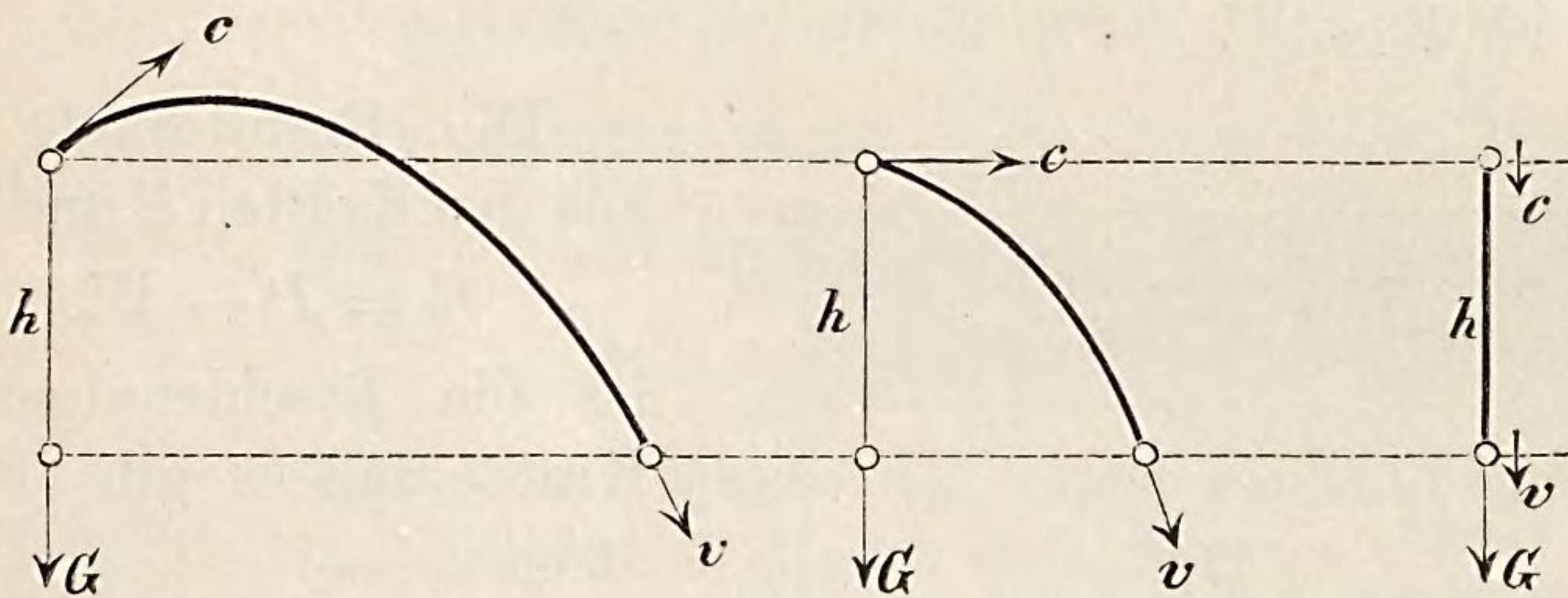


Fig. 103.

Fig. 104.

Fig. 105.

$$v = \sqrt{c^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$$

In einem anderen Beispiele bewege sich der Angriffspunkt einer Kraft in einer krummen Bahn mit einer Anfangsgeschwindigkeit c . Die Kraft P bleibe dabei stets normal zur Bahn gerichtet (Fig. 106), und es werde nach der Endgeschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte der Bahn gefragt.

Da nach Früherem im vorliegenden Falle in der Richtung von P kein Weg zurückgelegt, von dieser Kraft also auch keine Arbeit verrichtet wird, so gilt

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = 0$$

oder

$$v = c,$$

d. h. der Punkt bewegt sich gleichförmig in der krummen Bahn.

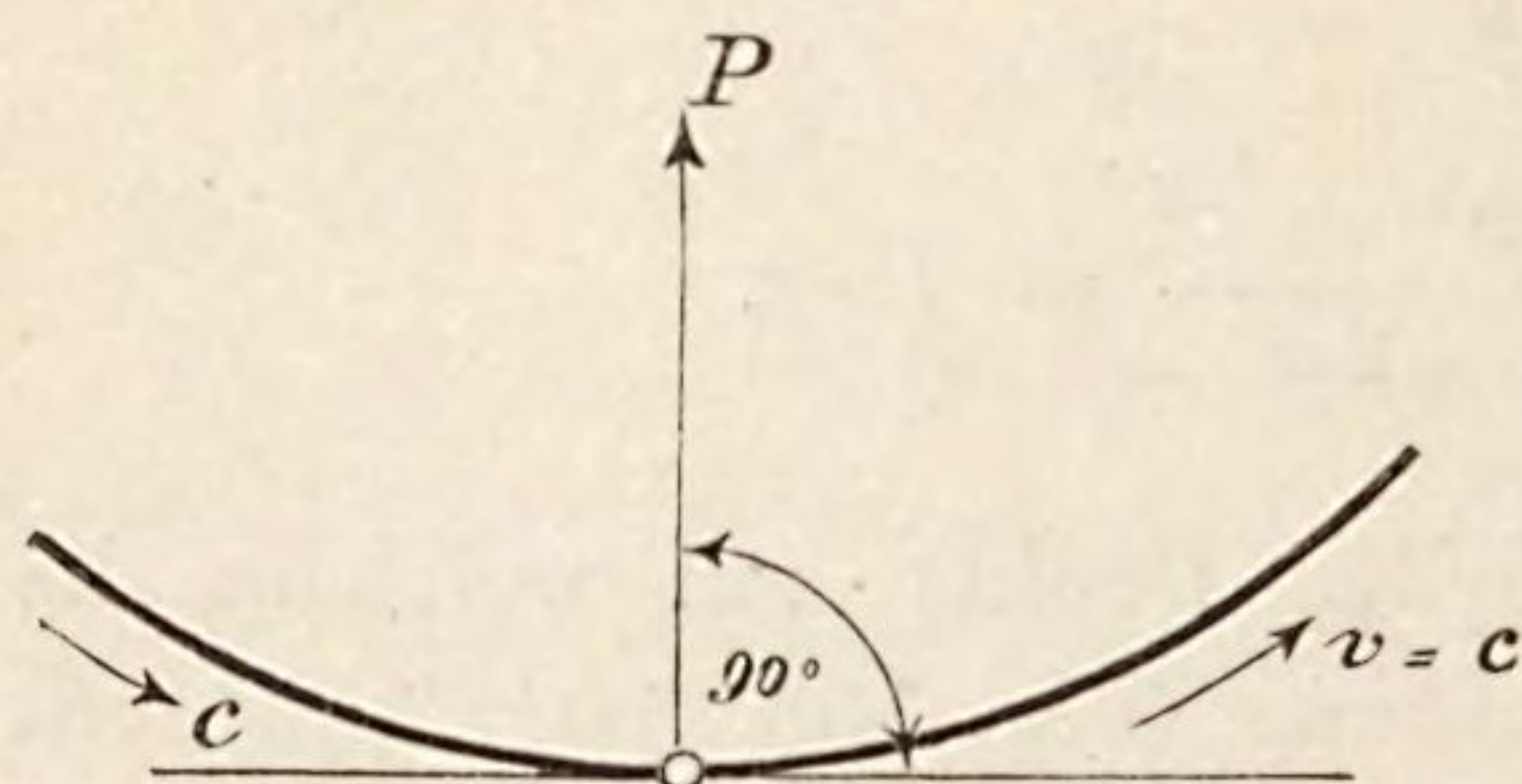


Fig. 106.

Graphische Darstellung von in der Masse m angesammelter lebendiger Kraft.

Einer Kraft P stehe ein Widerstand W gegenüber und es sollen sein

- 1) P und W über einen Weg s constant,
- 2) P und W über einen Weg s veränderlich.

1) Es sind P und W über s constant.

a) $P > W$.

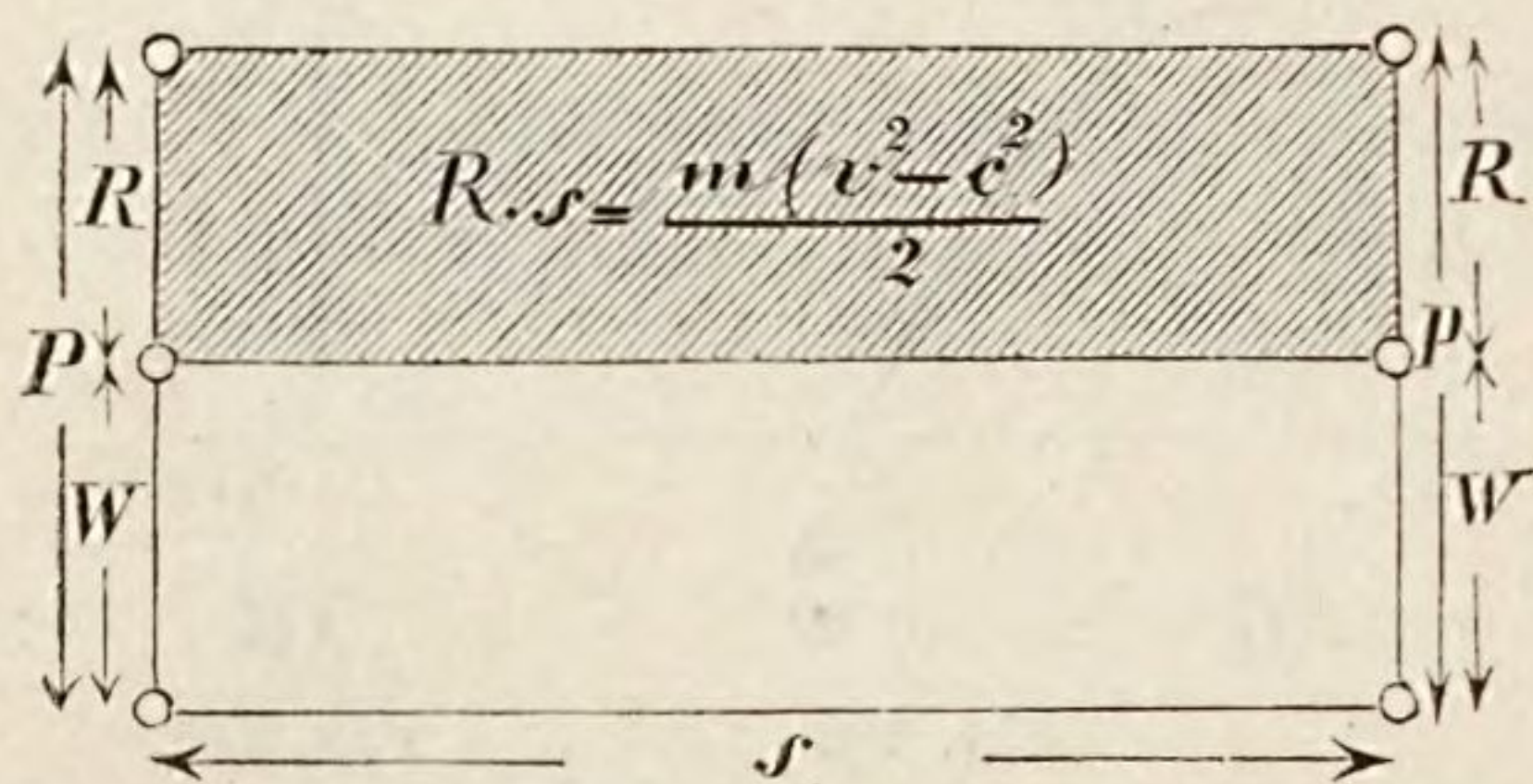


Fig. 107.

Die Resultierende R aus den Kräften P und W ,

$$R = P - W,$$

ist die beschleunigende Kraft, und es gilt (Fig. 107)

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = R \cdot s$$

$$= P \cdot s - W \cdot s.$$

Ein Gewicht G wird durch eine Vertikalkraft P , welche grösser ist als G , über die Höhe h gehoben und hierauf sich selbst überlassen. Was wird sich ereignen, nachdem P aufgehört hat zu wirken?

Es gilt

$$(P - G) \cdot h = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2}$$

oder

$$P \cdot h - G \cdot h = G \cdot \frac{v^2}{2g} - G \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Nun ist v die Geschwindigkeit, nachdem das Gewicht G den Hub h zurückgelegt und P eben aufgehört hat zu wirken, nach Früherem

$$h' = \frac{v^2}{2g},$$

die sogenannte Geschwindigkeitshöhe. Analog werde

$$\frac{c^2}{2g} = h''$$

gesetzt und dann folgt durch Einsetzung

$$P \cdot h - G \cdot h = G \cdot h' - G \cdot h''$$

oder

$$P \cdot h = G \cdot h + G \cdot h' - G \cdot h''.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die anfängliche lebendige Kraft $\frac{m \cdot c^2}{2}$ das Gewicht über die Höhe h'' und dass die schliessliche lebendige Kraft $\frac{m \cdot v^2}{2}$ das Gewicht über die Höhe h' zu heben im Stande ist. Würde die Anfangsgeschwindigkeit c also auch $h'' = 0$ sein, dann folgt

$$P \cdot h = G \cdot h + G \cdot h';$$

das würde heissen: Durch die über die Höhe h wirkende Kraft P wird das Gewicht G nicht nur über h gehoben, sondern auch mit einer lebendigen Kraft $\frac{m \cdot v^2}{2}$ ausgerüstet, vermöge deren das Gewicht noch um eine weitere Höhe h' aufwärts steigt (Fig. 108).

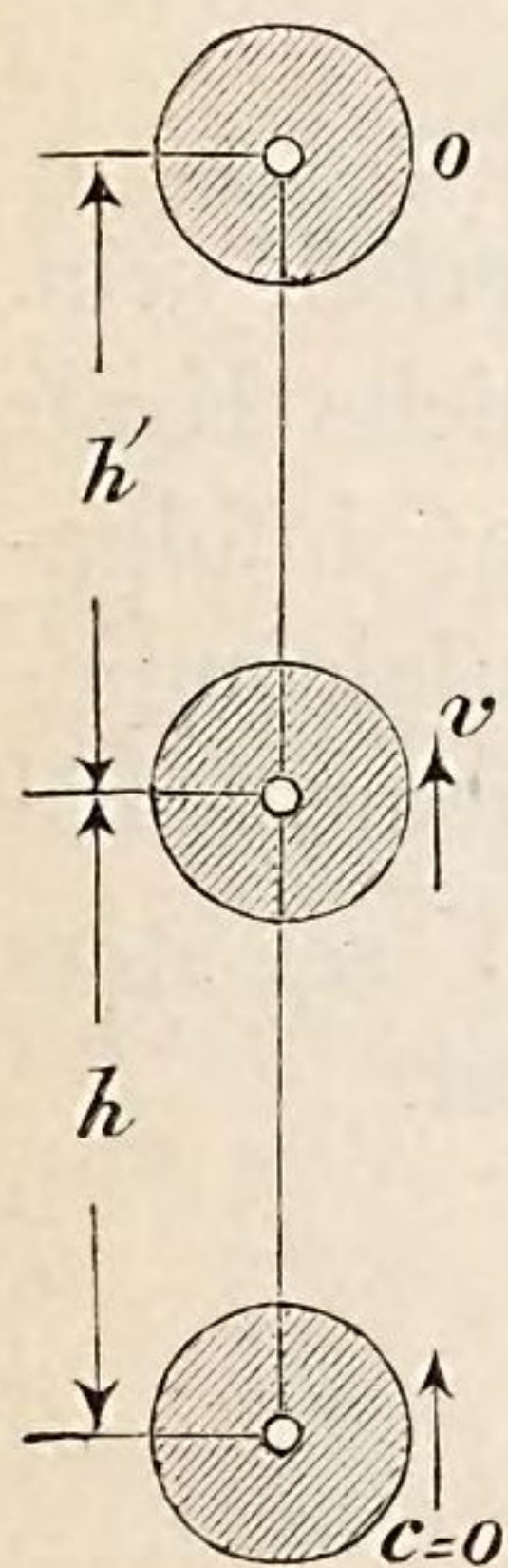


Fig. 108.

b) Ist $P = W$, so ist die Resultirende $R = 0$ und damit die Zunahme an lebendiger Kraft

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = 0,$$

und hieraus folgt

$$v = c,$$

d. h.: Wenn keine beschleunigende Kraft existirt, wenn also die vorhandenen Kräfte im Gleichgewichte stehen, so wird die lebendige Kraft der Masse nicht geändert.

Soll ein Pochstempel vom Gewicht G und der Anfangsgeschwindigkeit $c = 0$ über die Höhe h gehoben werden und ist

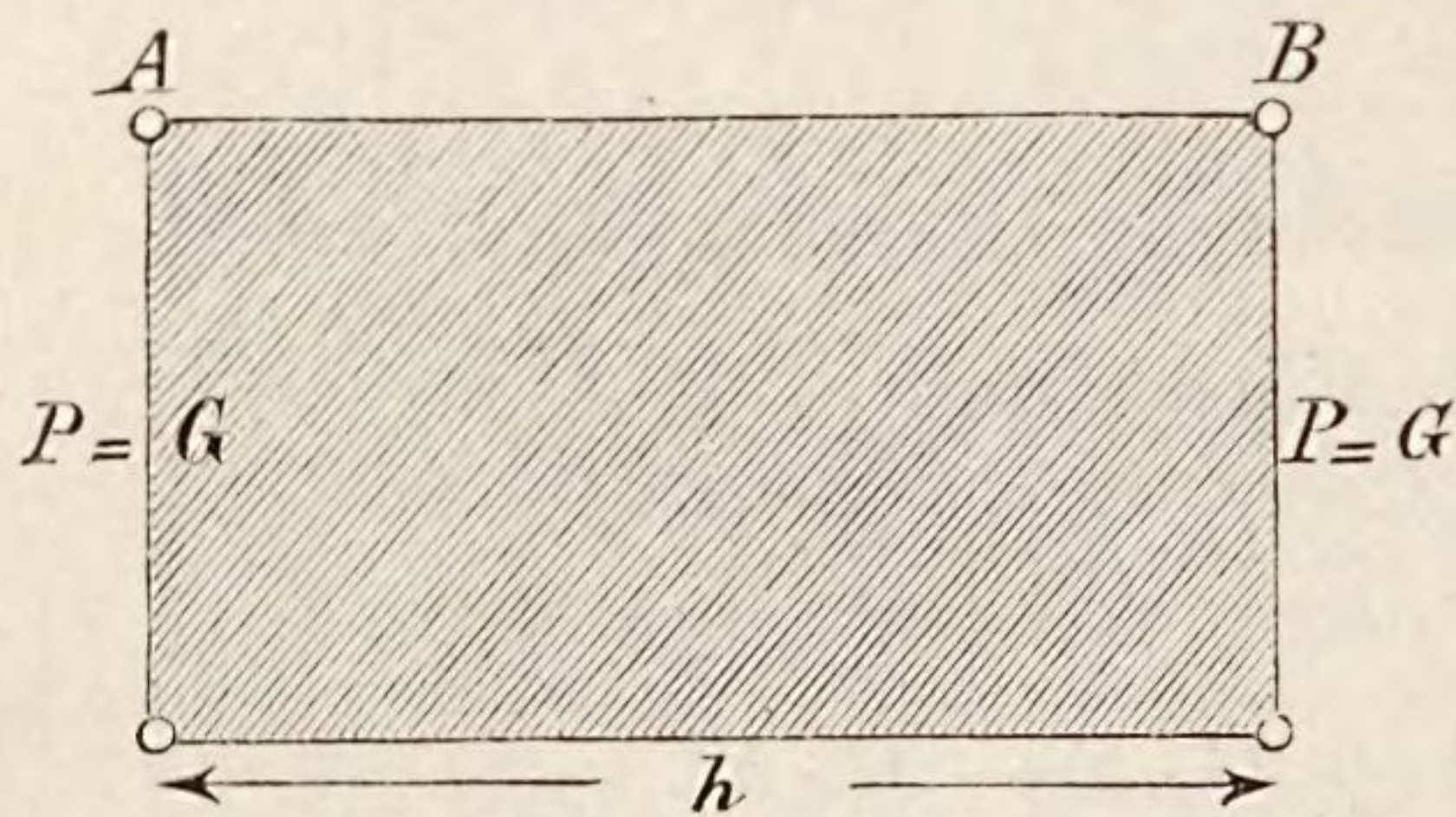


Fig. 109.

$$P = G,$$

so decken sich die Kraft- und Widerstands-Linie AB , d. h. der Pochstempel gelangt in der Höhe h ohne lebendige Kraft an (Fig. 109).

2) P und W sollen über einen Weg s veränderlich sein. P sei eine nach Grösse und Richtung veränderliche Kraft und die Bewegung der Masse eine krummlinige; infolgedessen verrichtet nur die veränderliche Tangentialcomponennte $P_t = P \cdot \cos \alpha$ über den in der Curve gemessenen Weg s Arbeit. Der veränderliche Widerstand W sei stets tangential der Bewegung entgegengesetzt gerichtet.

Hiernach ist

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} &= \int R \cdot ds \\ &= \int (P_t - W) \cdot ds = \int P_t \cdot ds - \int W \cdot ds, \end{aligned}$$

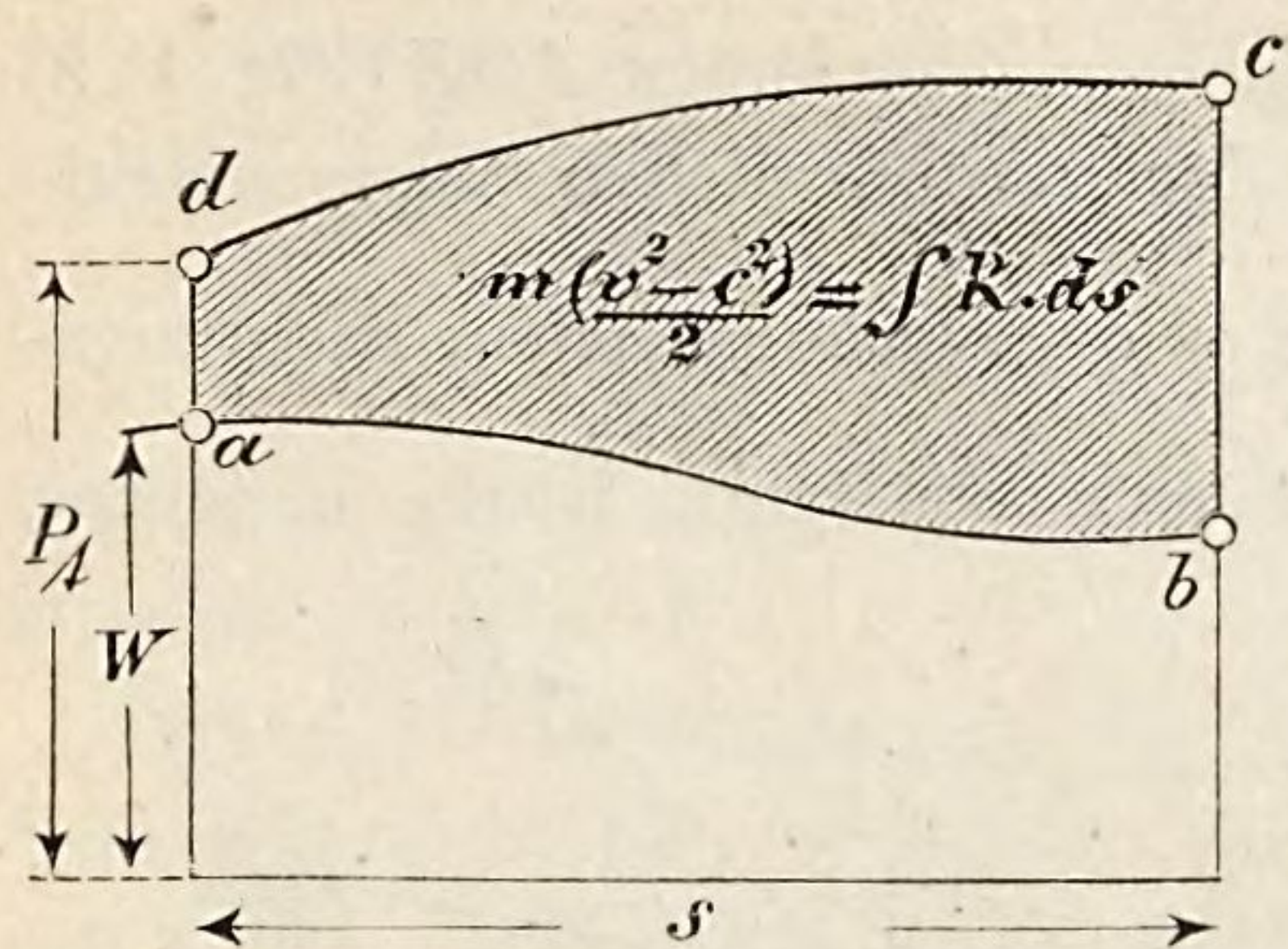


Fig. 110.

welche Gleichung allgemein graphisch dargestellt das Bild 110 liefert.

Die Fläche $abcd$ repräsentirt im vorliegenden Falle die erzeugte lebendige Kraft. Allgemein nennt man die Curve ab die Last- oder Widerstandcurve und cd die Kraftcurve.

Spezieller Fall: Es sei W constant, P_t wachse und nehme wieder ab. Allgemein entsteht dann Fig. 111, in welcher die Lastcurve die Gerade ab und die Curve $cc_1c_2c_3d$ die Kraftcurve bildet. Demnach veranschaulicht

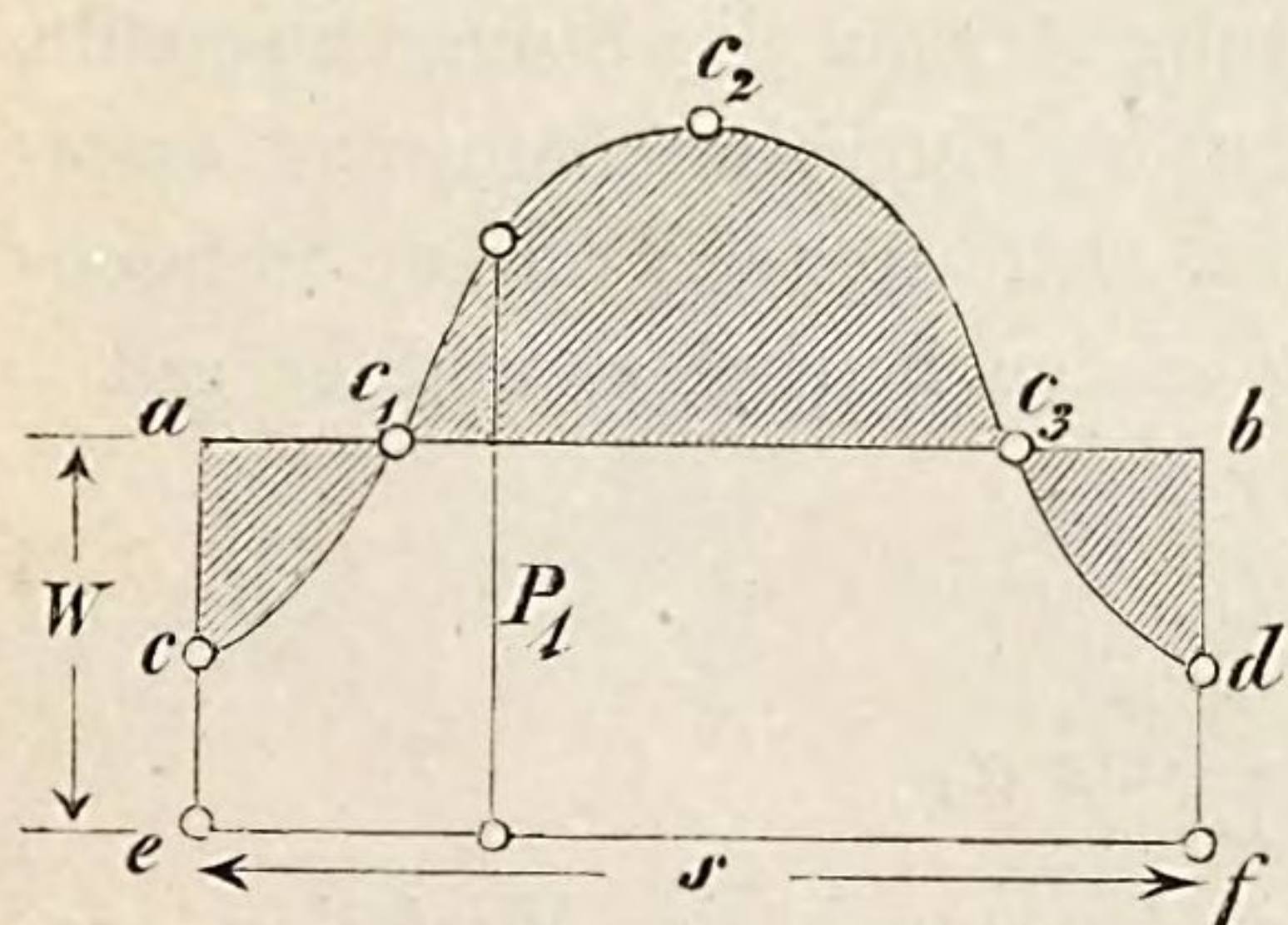


Fig. 111.

die Fläche $ecc_1c_2c_3df = F_1$ die geleistete Arbeit der Kraft, die Fläche $eabf = F_2$ die consumirte Arbeit des Widerstandes, und wenn

$$F_1 > F_2,$$

so ist

$$F_1 - F_2 = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2},$$

die in der Masse m während der Bewegungsdauer angesammelte lebendige Kraft.

Hieraus ergibt sich aber, dass wenn nach zurückgelegtem Wege s die angesammelte lebendige Kraft gleich Null sein soll,

$$F_1 - F_2 = 0$$

oder

$$F_1 = F_2$$

sein muss, d. h.

$$\text{Fläche } acc_1 + \text{Fläche } bc_3d = \text{Fläche } c_1c_2c_3.$$

Der Kurbelzapfen Z eines Kurbelmechanismus AOZ (Fig. 112) erleidet von der Stange L in der veränderlichen Stangenrichtung einen Druck $\frac{P}{\cos \varphi}$, sofern φ den veränderlichen Richtungswinkel der Stange L und P eine constante Kraft bedeutet,

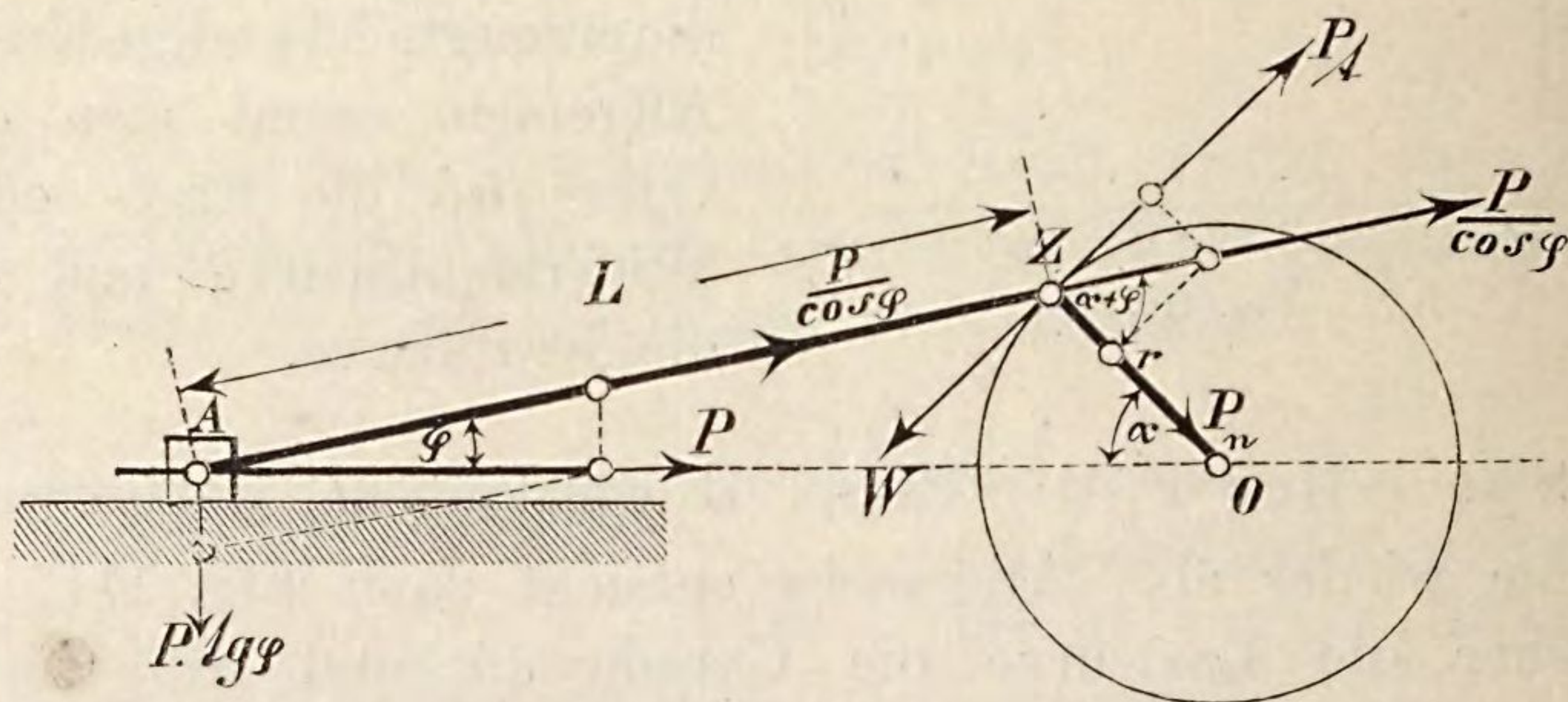


Fig. 112.

welche letztere stets in der Richtung AO auf die Stange ausgeübt wird. (Die Berechtigung zu der im Kurbelmechanismus angenommenen Kraftzerlegung ergibt sich später.) Der Stangenrichtung entspricht die Richtung α der Kurbel r , und es gilt

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{r}{L}$$

$$\text{oder} \quad \sin \varphi = \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha,$$

woraus für jede Kurbelstellung α der zugehörige Winkel φ ausgerechnet werden kann.

Für die Tangentialkraft P_t ergibt sich

$$P_t = \frac{P}{\cos \varphi} \cdot \sin (\alpha + \varphi),$$

$$P_t = \frac{P}{\cos \varphi} \cdot (\sin \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \alpha \cdot \sin \varphi),$$

$$P_t = P \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi).$$

$$\text{Nun ist} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{r}{L} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi},$$

$$\text{demnach} \quad P_t = P \cdot \sin \alpha \cdot \left(1 + \frac{r}{L} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \right).$$

Würde man $L = \infty$ machen, d. h. die Stange L stets parallel zu AO laufen lassen, dann gäbe die Gleichung den Werth

$$P_t = P \cdot \sin \alpha,$$

welcher wegen seiner Einfachheit zur Darstellung der Kraftcurve benutzt werden soll.

Wie aus der Gleichung hervorgeht, ist die Kraftcurve eine Sinuslinie, und da der tangentielle Widerstand W constant sein soll, die Lastcurve abb_1 eine Gerade. Zur Verzeichnung (Fig. 113) macht man die Abscisse cde dem Kreisumfang $2r\pi$ gleich und mögen die wichtigsten Kraftkoordinaten gerechnet werden:

$$\alpha = 0^\circ \text{ giebt } P_t = 0,$$

$$\alpha = 90^\circ \text{ „ } P_t = P,$$

$$\alpha = 180^\circ \text{ „ } P_t = 0,$$

$$\alpha = 270^\circ \text{ „ } P_t = P,$$

$$\alpha = 360^\circ \text{ „ } P_t = 0.$$

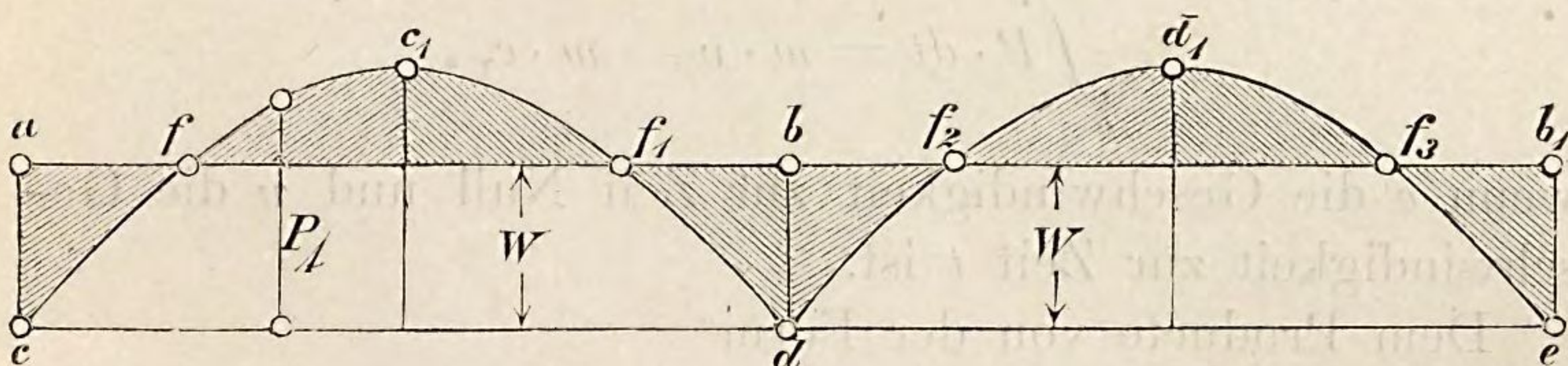


Fig. 113.

Soll nun die Summe der positiven und negativen Leistung nach einer Umdrehung gleich Null sein, so muss $W \cdot r \cdot \pi = P \cdot 2 \cdot r$ oder der Widerstand $W = \frac{2}{\pi} \cdot P$ resp. Fläche $(fc_1f_1 + f_2d_1f_3)$ gleich Fläche $(acf + df_1f_2 + b_1ef_3)$ sein, und es ist aus der Darstellung ersichtlich, dass die erstgenannte Fläche lebendige Kraft repräsentirt, welche zur Ueberwindung der durch die letztgenannte Fläche gekennzeichneten Widerstandsarbeit verbraucht wird.

7.

Der Antrieb einer Kraft.

Die Geschwindigkeitsänderung einer Masse ist von der Grösse der Kraft und von der Zeit abhängig, während welcher die Kraft auf die Masse einwirkt, und es sollen im Folgenden die directen Beziehungen zwischen Kraft, Zeit, Masse und Geschwindigkeit dargelegt werden.

Für eine auf eine Masse m wirkende veränderliche Kraft P , deren Angriffspunkt in der Richtung der Kraft geradlinig fortschreitet, galt

$$\begin{aligned} P &= m \cdot p \\ &= m \cdot \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

worin p die erzeugte Beschleunigung und v die veränderliche Geschwindigkeit bedeutet.

Durch Reduction und Integration ergibt sich

$$\int_0^t P \cdot dt = m \cdot v - m \cdot c,$$

wenn c die Geschwindigkeit zur Zeit Null und v die Geschwindigkeit zur Zeit t ist.

Dem Producte von der Form

$$m \cdot v$$

hat man den Namen „Bewegungsgrösse“ oder „Grösse der Bewegung“ gegeben, während man das Product

$$P \cdot dt$$

„den Antrieb der Kraft P in der Zeit dt “ und die Summe

$$\int_0^t P \cdot dt$$

„den Antrieb der Kraft P in der Zeit t “ nennt.

Hiernach lässt sich aber das erhaltene Resultat folgendermassen aussprechen:

„Die Zunahme der Grösse der Bewegung in einer Zeit t ist gleich dem Antriebe der Kraft in dieser Zeit.“

Specieller Fall: Es sei die Kraft P constant, dann folgt

$$P \cdot t = m \cdot v - m \cdot c.$$

Reducirt man diese Gleichung auf P , so folgt

$$P = \frac{m \cdot (v - c)}{t} = \frac{G}{g} \cdot \frac{v - c}{t}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich diejenige Kraft P ausrechnen, welche bei geradliniger Bewegung die Anfangsgeschwindigkeit c eines Körpers (materiellen Punktes) in t Secunden in die Geschwindigkeit v umwandelt.

Wäre beispielsweise

$$1) \quad t = 1 \text{ Secunde,}$$

$$\text{so ist} \quad P = m \cdot (v - c)$$

und setzt man

$$c = 0,$$

so ergiebt sich

$$P = m \cdot v.$$

Würde jedoch

$$v = 0 \text{ gesetzt, so wäre}$$

$$P = - m \cdot c$$

die Kraft negativ, d. h. ein Widerstand.

Aus den beiden letzten Werthen ist zu erkennen, dass Bewegungsgrössen durch Kräfte resp. durch Gewichte ausgedrückt werden können.

2) Für

$$t = 0,$$

folgt aus

$$P = \frac{m \cdot (v - c)}{t}$$

$$P = \infty,$$

wodurch ausgesprochen wird, dass eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung nur unter der Wirkung einer unendlich grossen Kraft möglich, d. h. überhaupt unmöglich ist.

Ist die Bewegung eine krummlinig geänderte, erzeugt durch eine nach Grösse und Richtung veränderliche mit einer anfänglichen geradlinig gleichförmigen Bewegung nicht zusammenfallende Kraft P , dann ist (Fig. 101)

$$P = m \cdot \frac{dV}{dt}$$

und — wie schon gezeigt wurde —

$$dV = \frac{dv}{\cos \alpha},$$

worin V die Geschwindigkeit des materiellen Punktes in der Richtung der Kraft P , v aber die Tangentialgeschwindigkeit bedeutet.

Hiernach ist

$$P = \frac{m}{\cos \alpha} \cdot \frac{dv}{dt}$$

oder

$$P \cdot \cos \alpha \cdot dt = m \cdot dv.$$

Für die ganze Bewegungsdauer ist aber der Antrieb der Kraft P

$$\int_0^t P \cdot \cos \alpha \cdot dt = m \cdot v - m \cdot c,$$

wenn c die Anfangsgeschwindigkeit, also zur Zeit Null, und v die Endgeschwindigkeit, also zur Zeit t ist.

Spezieller Fall: Ist die Tangentialkomponente

$$P_t = P \cdot \cos \alpha \text{ constant,}$$

so folgt der Antrieb während der Zeit t ,

$$P \cdot \cos \alpha \cdot t = m \cdot v - m \cdot c.$$

Graphische Darstellung des Antriebes einer Kraft.

Ist die Kraft P bei geradliniger oder P_t bei krummliniger Bewegung constant, so wird der Antrieb

$$A = P \cdot t \text{ oder } A = P_t \cdot t$$

durch die Rechteckfläche $abcd$ (Fig. 114) geometrisch dargestellt.

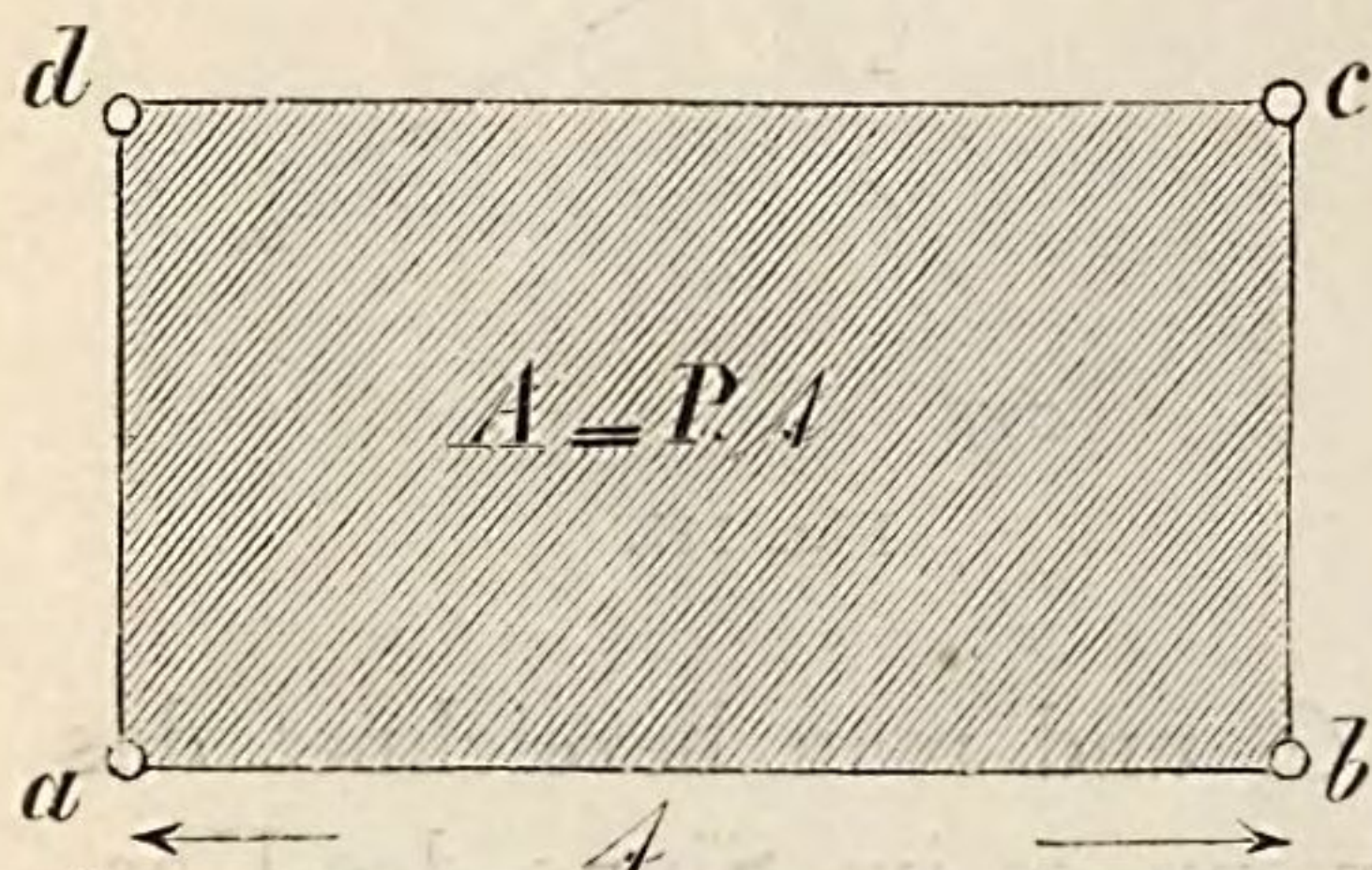


Fig. 114.

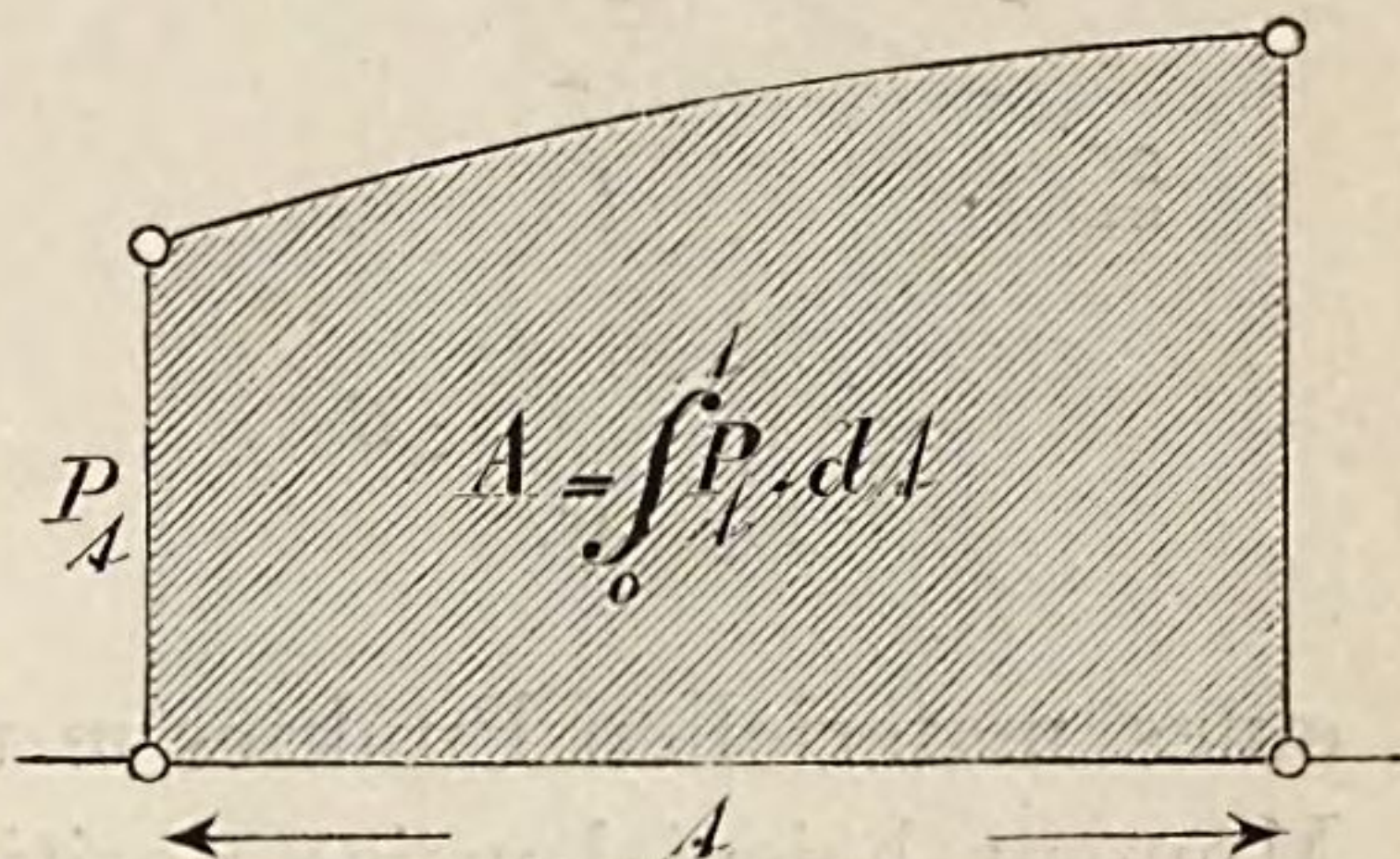


Fig. 115.

Ist die Kraft P oder P_t veränderlich, dann wird der Antrieb in der Zeit t

$$A = \int_0^t P_t \cdot dt$$

durch die Fig. 115 allgemein veranschaulicht.

8.

Das statische Moment einer Kraft und das Gesetz
der statischen Momente.

Unter dem statischen Moment einer Kraft oder dem Kraftmoment versteht man das Product aus einer Kraft und ihrem kürzesten, d. i. dem senkrechten Abstände von einem im speciellen Falle gegebenen Punkte O . Bedeutet beispielsweise (Fig. 116 oder Fig. 117) P eine in der Bildebene liegende Kraft, l den ebenfalls in der Bildebene ge-

messenen senkrechten Abstand der Kraft P von einem in der Bildebene liegenden Punkte O , so ist

$$\mathfrak{M} = P \cdot l$$

„das statische Moment der Kraft P bezogen auf den Punkt O “. Die Wirkung dieses Momentes besteht in einer Verdrehung

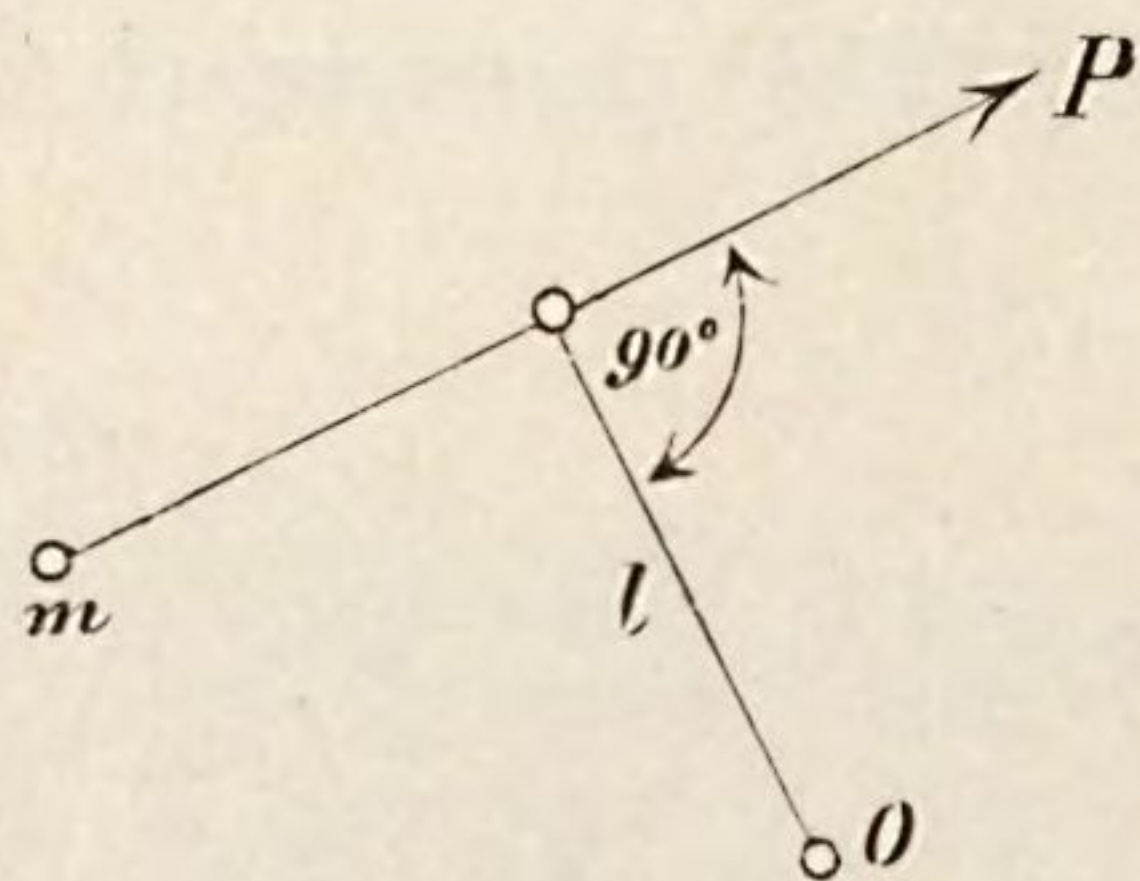


Fig. 116.

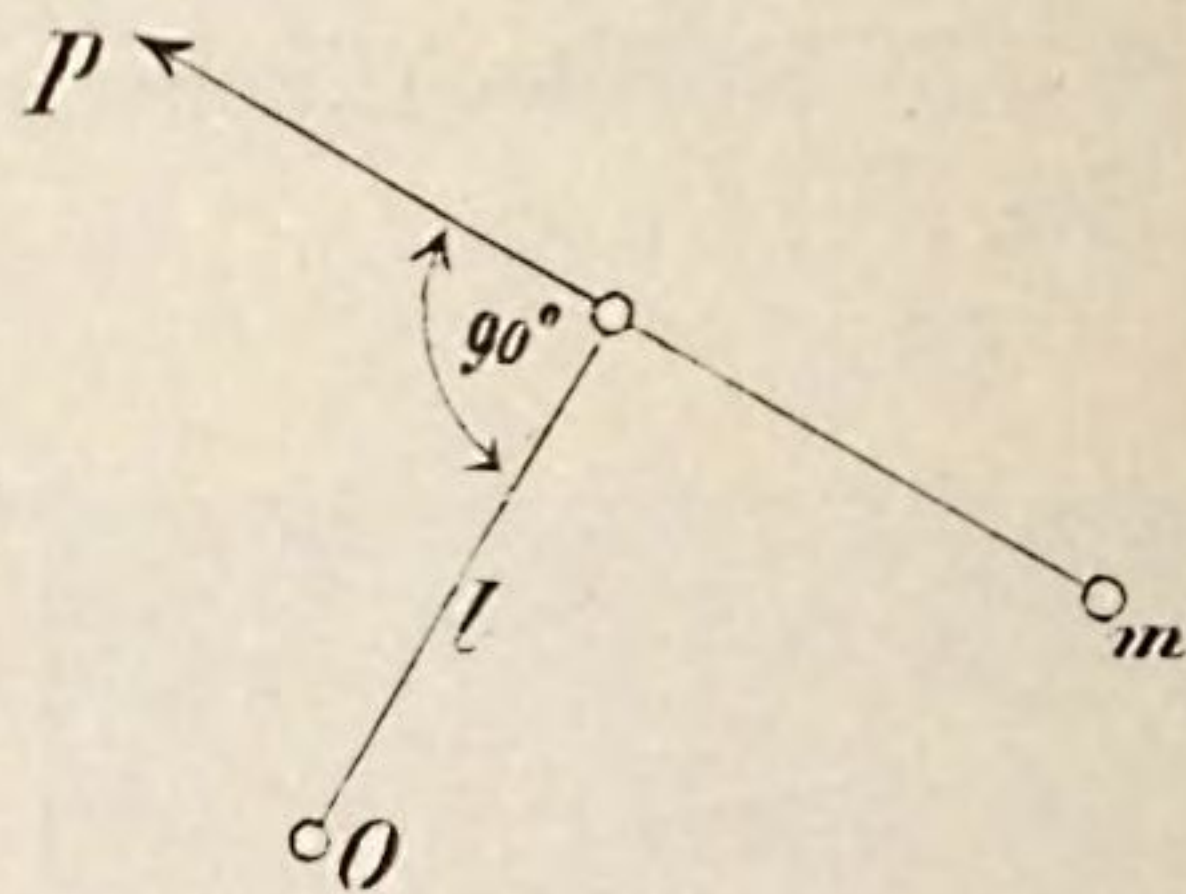


Fig. 117.

eines materiellen Punktes m um O , und man bezeichnet das Moment beispielsweise positiv, wenn es im Sinne des Uhrzeigers (Fig. 116), hingegen negativ, wenn es demselben entgegengesetzt (Fig. 117) dreht, oder umgekehrt. Den senkrechten Abstand l nennt man den „Hebelarm der Kraft“.

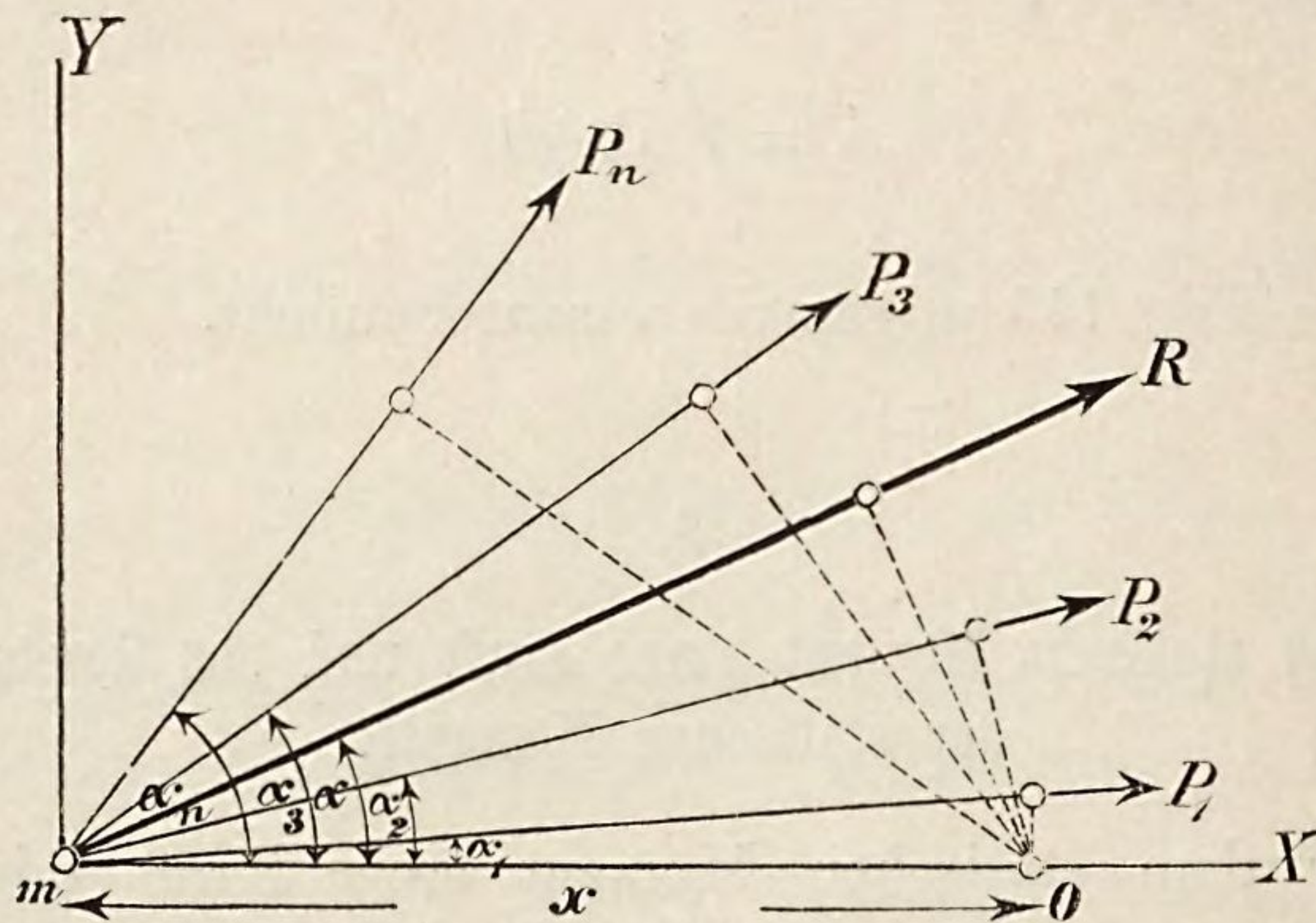


Fig. 118.

Wirken gleichzeitig mehrere in derselben Ebene (beispielsweise der Bildebene) liegende Kräfte P_1 bis P_n , welche ihrer Grösse und Richtung nach gegeben sind (Fig. 118),

auf einen materiellen Punkt, so bestimmt sich das auf einen beliebigen Punkt O bezogene Kraftmoment unter Benutzung des Parallelogrammgesetzes folgendermassen:

Man bestimmt zunächst die Resultirende R aus allen Kräften nach Grösse und Richtung nach bekannter Weise und fällt hierauf von dem gewählten oder im speciellen Falle gegebenen Punkte O die Lothe r, l_1, l_2 u. s. w. auf die Kräfte R, P_1, P_2 u. s. w., deren Richtungen durch $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ u. s. w. bestimmt sind. Die Projection der Kräfte in die Y -Achse, welche senkrecht zur X -Achse liegt, liefert nach üblicher Bezeichnung

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots = \Sigma(Y)$$

oder

$$R \cdot \sin \alpha = P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 + \dots$$

Nun ist aber nach Fig. 118 $mO = x$ und $\sin \alpha = \frac{r}{x}$,
 $\sin \alpha_1 = \frac{l_1}{x}$, $\sin \alpha_2 = \frac{l_2}{x}$ u. s. w., weshalb sich nach Einsetzung dieser Werthe ergibt

$$R \cdot r = P_1 \cdot l_1 + P_2 \cdot l_2 + \dots$$

oder allgemein

$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot l).$$

Das hierin ausgesprochene Gesetz nennt man das

„Gesetz der statischen Momente“

und es lautet:

„Das statische Moment der Resultirenden ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte.“

Mit Hilfe dieses Gesetzes kann entweder die Grösse des resultirenden Momentes ermittelt oder auch, bei bereits bestimmter Resultante R , der Hebelarm

$$r = \frac{\Sigma(P \cdot l)}{R}$$

derselben gefunden werden.

Erweiterung für den Raum.

Stellt OO (Fig. 119) eine Drehachse dar, und ist P eine im Raum beliebig liegende auf einen materiellen Punkt m wirkende Kraft, so ist das statische Moment der Kraft P bezogen auf die Achse OO wie folgt zu ermitteln:

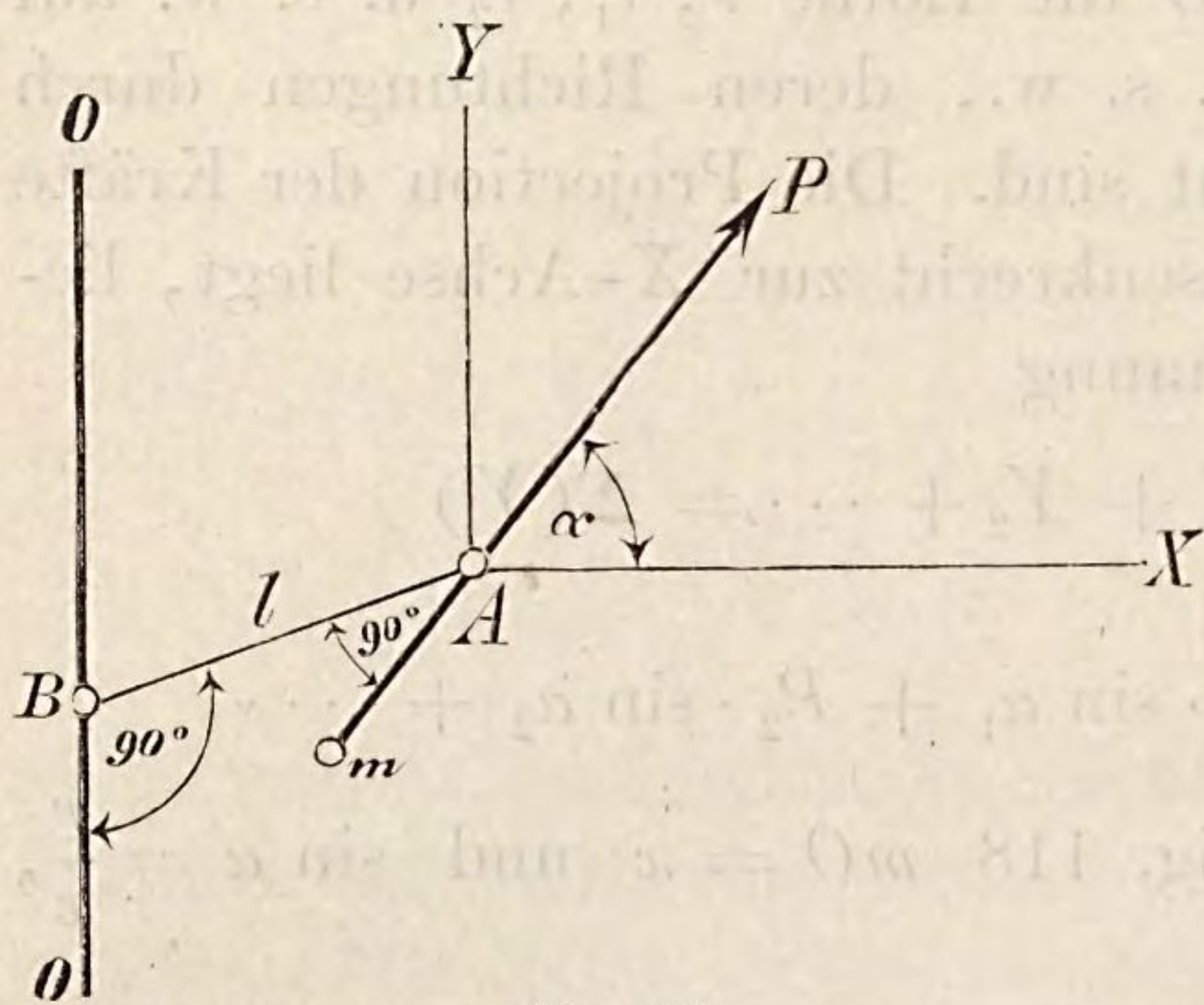


Fig. 119.

Man bestimmt zwischen der Richtung der Kraft P und der Achse OO den kürzesten Abstand l (Fig. 119), welcher sowohl auf der ersteren als auch auf der letzteren senkrecht steht*, legt hierauf eine den Abstand l aufnehmende auf der Drehachse senkrecht stehende Ebene, nimmt in der letz-

teren senkrecht zu l in A eine X -Achse und ferner senkrecht zu l und X , also parallel zur Drehachse, in A eine Y -Achse an.

Zerlegt man nun die in der XY -Ebene befindliche Kraft P in die Achsenrichtungen, so ergeben sich, wenn α der Neigungswinkel von P zur X -Achse ist, die Componenten

$$X = P \cdot \cos \alpha$$

und

$$Y = P \cdot \sin \alpha,$$

* Zwei sich kreuzende Gerade besitzen an einer bestimmten Stelle einen kürzesten Abstand, welchem auf der Linie L der Punkt A , auf der Linie L_1 der Punkt B entspricht. Ist nun B und ausserdem die Lage von L bekannt, so ist unter allen Verbindungslinien die von B auf L gefällte Senkrechte die kürzeste. Ist umgekehrt A und die Lage von L gegeben, so ist die Senkrechte von A nach L die kürzeste Verbindungslinie; woraus sich ergibt, dass die kürzeste Entfernung der sich kreuzenden Linien L und L_1 senkrecht auf „beiden Linien“ steht.

von denen nur die Componente X das Bestreben hat, in Bezug auf die Achse OO am Hebelarm l eine Drehwirkung zu erzeugen. Es ist daher das statische Moment der Kraft P

$$\mathfrak{M} = X \cdot l = P \cdot l \cdot \cos \alpha.$$

Ein Minimum wird das statische Moment der Kraft P , wenn $\alpha = 90^\circ$ oder wenn sich die Drehachse und die Richtung der Kraft nicht kreuzen, sondern „schneiden“, d. h. wenn $l = 0$ wird. In beiden Fällen wird

$$\mathfrak{M} = 0.$$

Seinen Maximalwerth würde das Moment erhalten für $\alpha = 0$, d. h. für den Fall, in welchem die durch den Punkt B laufende Drehachse eine solche Lage erhält, dass die auf ihr senkrecht stehende Ebene nicht nur den kürzesten Abstand l , sondern auch die Kraft P in sich aufnimmt.

„Hiernach giebt es aber für jede beliebig im Raum liegende Kraft eine durch einen gegebenen Punkt B laufende Drehachse, auf welche bezogen das statische Moment ein Maximum wird.“

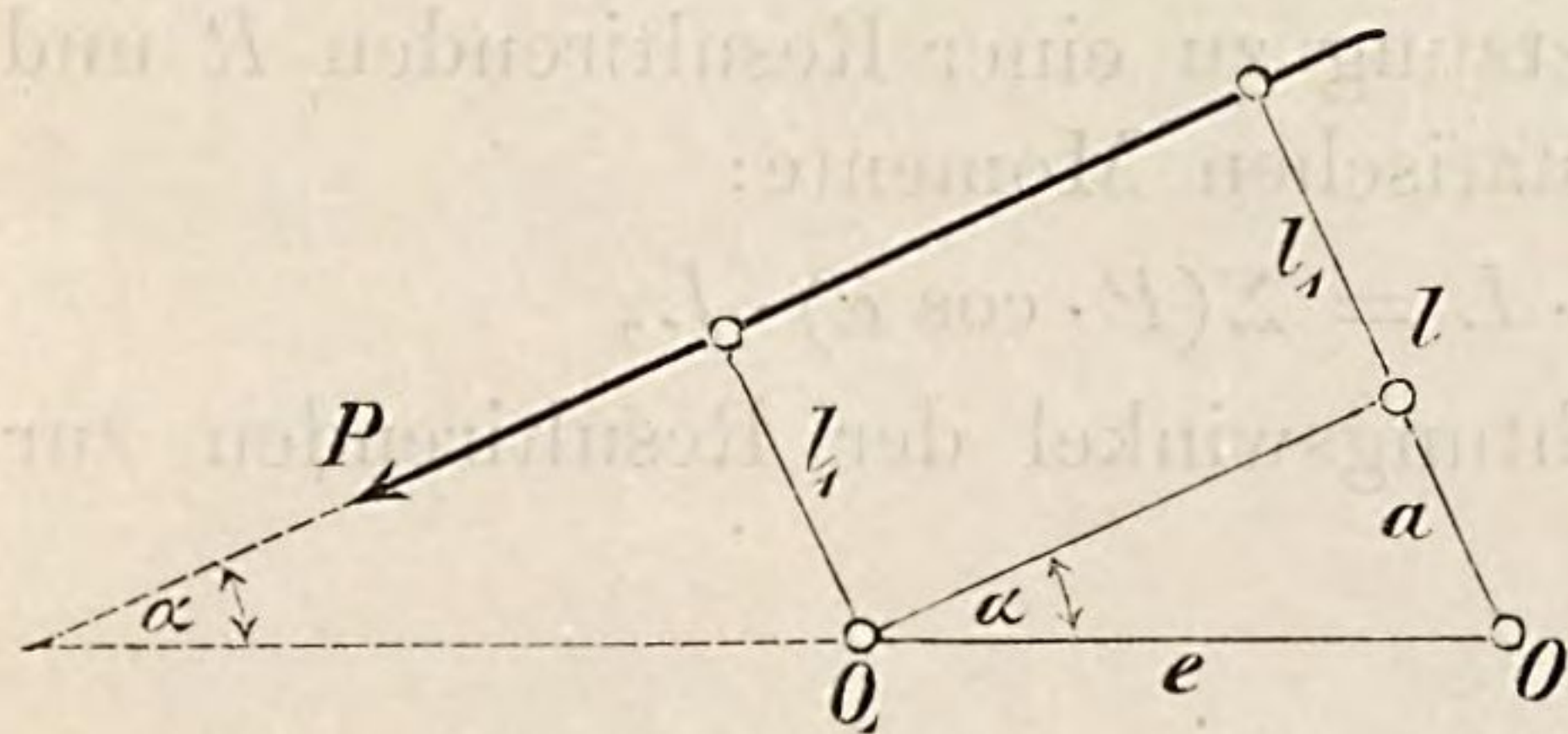


Fig. 120.

Ist ein statisches Moment einer Kraft P

$$\mathfrak{M}_o = P \cdot l$$

bezogen auf eine Achse O gegeben und soll mit Hilfe desselben das statische Moment derselben Kraft bezo-

gen auf eine parallele O_1 -Achse berechnet werden, so gilt mit Rücksicht auf Fig. 120

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{o_1} &= P \cdot l_1 = P \cdot (l - a) \\ &= P \cdot l - P \cdot a, \end{aligned}$$

$$\text{also} \quad \mathfrak{M}_{o_1} = \mathfrak{M}_o - P \cdot a.$$

Statt des kürzesten Abstandes l der Kraft P von der Drehachse OO kann man auch den senkrechten Abstand L des materiellen Punktes m (Fig. 121) von derselben einführen, wo-

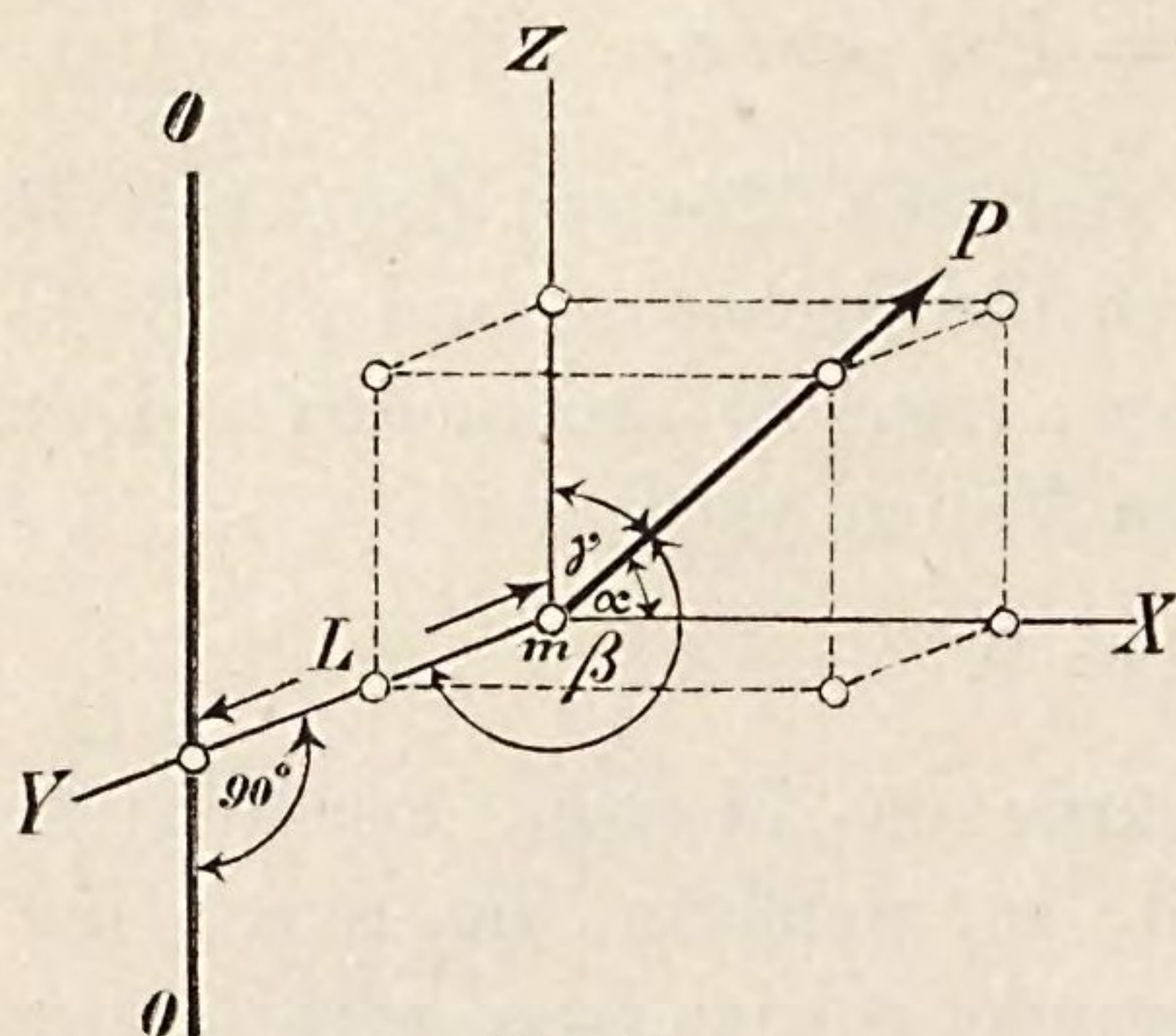


Fig. 121.

durch jedoch P selbst in den Raum XYZ zu liegen kommt und durch Zerlegung in die Achsen die Componenten

$$X = P \cdot \cos \alpha,$$

$$Y = P \cdot \cos \beta,$$

$$Z = P \cdot \cos \gamma$$

liefert, von denen nur $P \cdot \cos \alpha$ in die zur OO -Achse normale XY -Ebene und zwar in derselben senkrecht zu L fällt, also allein

Drehwirkung in Bezug auf die Achse OO hervorbringt. Das statische Moment der Kraft P ist deshalb hier zu schreiben

$$\mathfrak{M} = P \cdot \cos \alpha \cdot L.$$

Wirken gleichzeitig mehrere verschieden grosse und verschieden gerichtete Kräfte am materiellen Punkte m , so ergibt sich nach ihrer Zerlegung in die Achsen X , Y , Z resp. ihrer Zusammensetzung zu einer Resultirenden R und nach dem Gesetz der statischen Momente:

$$R \cdot \cos \alpha \cdot L = \Sigma(P \cdot \cos \alpha) \cdot L,$$

links unter α den Richtungswinkel der Resultirenden zur X -Achse verstanden.

Graphische Darstellung der statischen Momente.

Ein statisches Moment stellt man praktisch brauchbar durch eine gerade Linie dar, indem man das Product aus Kraft und Hebelarm ausrechnet und das Resultat nach

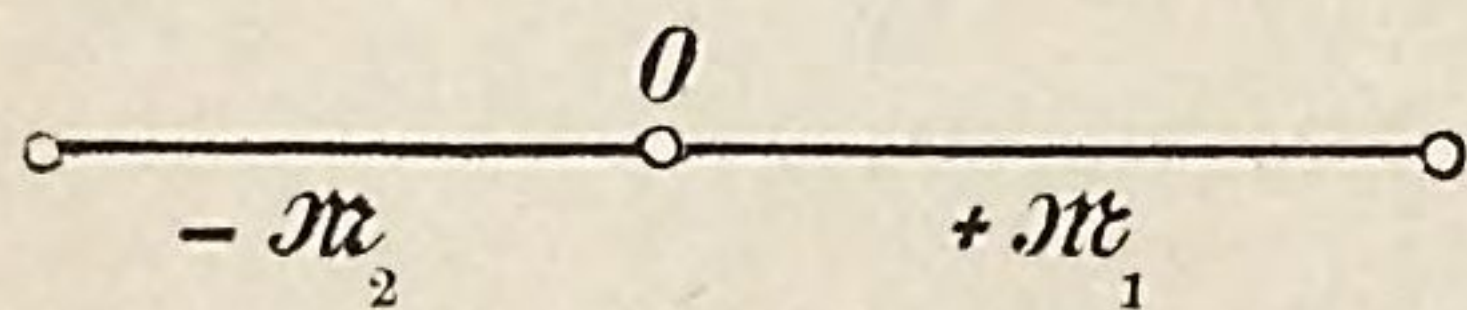


Fig. 122.

einem beliebig zu wählenden Massstab (Momentenmassstab) auf der „gegebenen“ Drehachse von O (Fig. 122) aus aufträgt

und zwar nach rechts, wenn das Resultat positiv und nach links, wenn dasselbe negativ ist.

$$\mathfrak{M} = \Sigma(\mathfrak{M}) = + \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$$

ist dann diejenige Gerade, welche dem resultirenden statischen Momente entspricht.

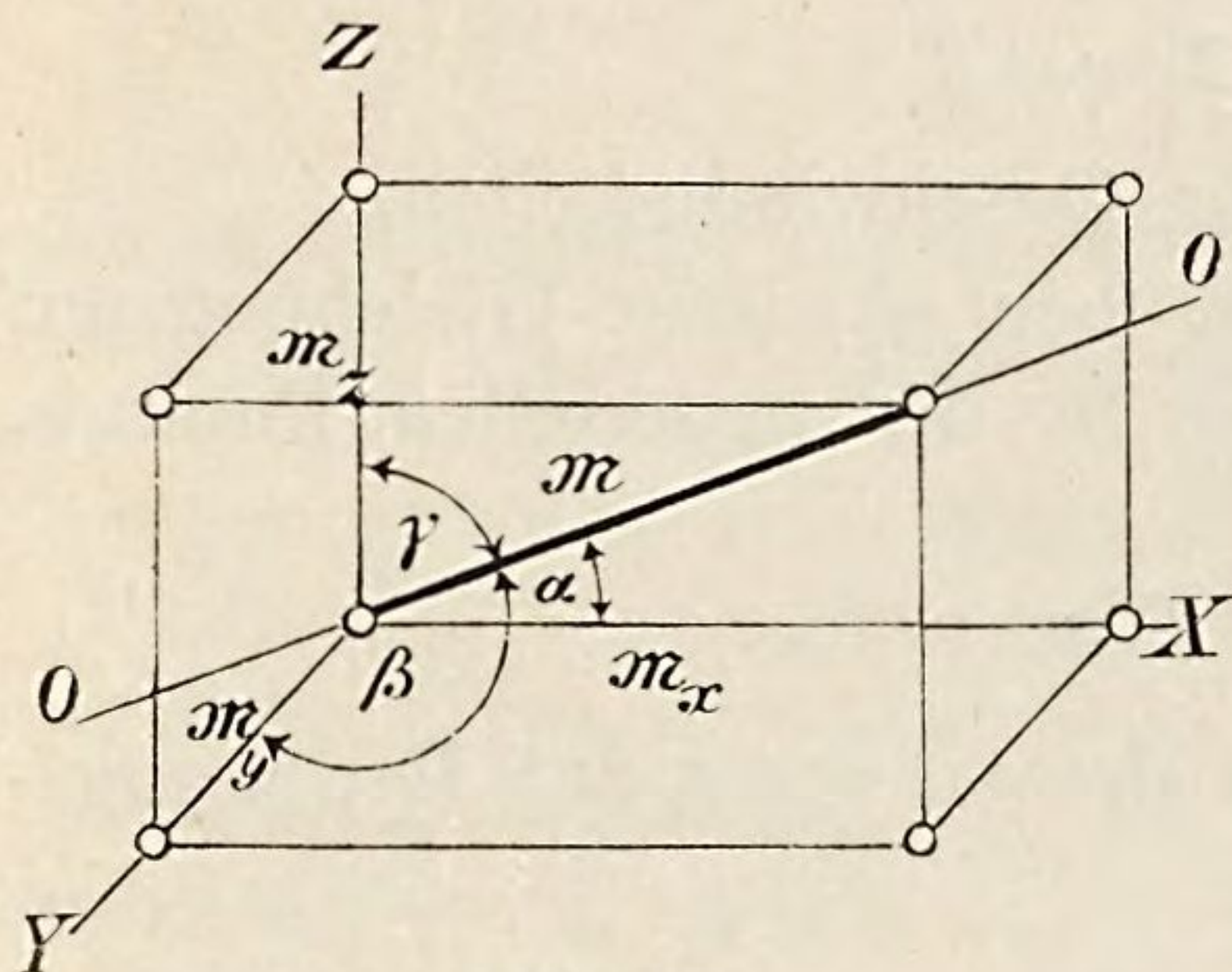


Fig. 123.

Man nennt die den einzelnen Momenten entsprechenden Geraden „Momentenachsen“ und behandelt sie analog den Kräften nach dem Parallelogrammgesetz.

Ist beispielsweise OO die Drehachse und $\mathfrak{M}$ die zugehörige Momentenachse (Fig. 123), so kann man dieselbe nach den durch O

gelegten rechtwinkelig aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z zerlegen in die Momentenachsen

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M} \cdot \cos \alpha,$$

$$\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M} \cdot \cos \beta,$$

$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M} \cdot \cos \gamma$$

oder man kann schreiben

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

Weitere Verallgemeinerung des Gesetzes der statischen Momente.

Es kann geschrieben werden (Fig. 118)

$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot l),$$

und wenn man die Masse m des materiellen Punktes und die Beschleunigungen $p, p_1 \dots$ einführt

$$m \cdot p \cdot r = m \cdot \Sigma(p \cdot l)$$

oder

$$p \cdot r = \Sigma(p \cdot l),$$

woraus sich ergibt, dass das Gesetz auch für Beschleunigungen Giltigkeit hat.

Die letzte Gleichung kann aber auch geschrieben werden

$$\frac{dv}{dt} \cdot r = \Sigma \left(\frac{dv}{dt} \cdot l \right)$$

oder

$$v \cdot r = \Sigma(v \cdot l).$$

Das Gesetz gilt also auch für Geschwindigkeiten.

Multipliziert man noch die eben erhaltene Gleichung auf beiden Seiten mit der Masse m des materiellen Punktes, so ergibt sich

$$m \cdot v \cdot r = \Sigma(m \cdot v \cdot l),$$

also auch die Anwendbarkeit des Gesetzes auf Bewegungsgrößen.

9.

Flächengeschwindigkeit und das Princip der Flächen.

In einer XY - (Bild-) Ebene (Fig. 124) bewege sich ein materieller Punkt m unter dem Einfluss einer nach Grösse und Richtung veränderlichen in derselben Ebene liegenden

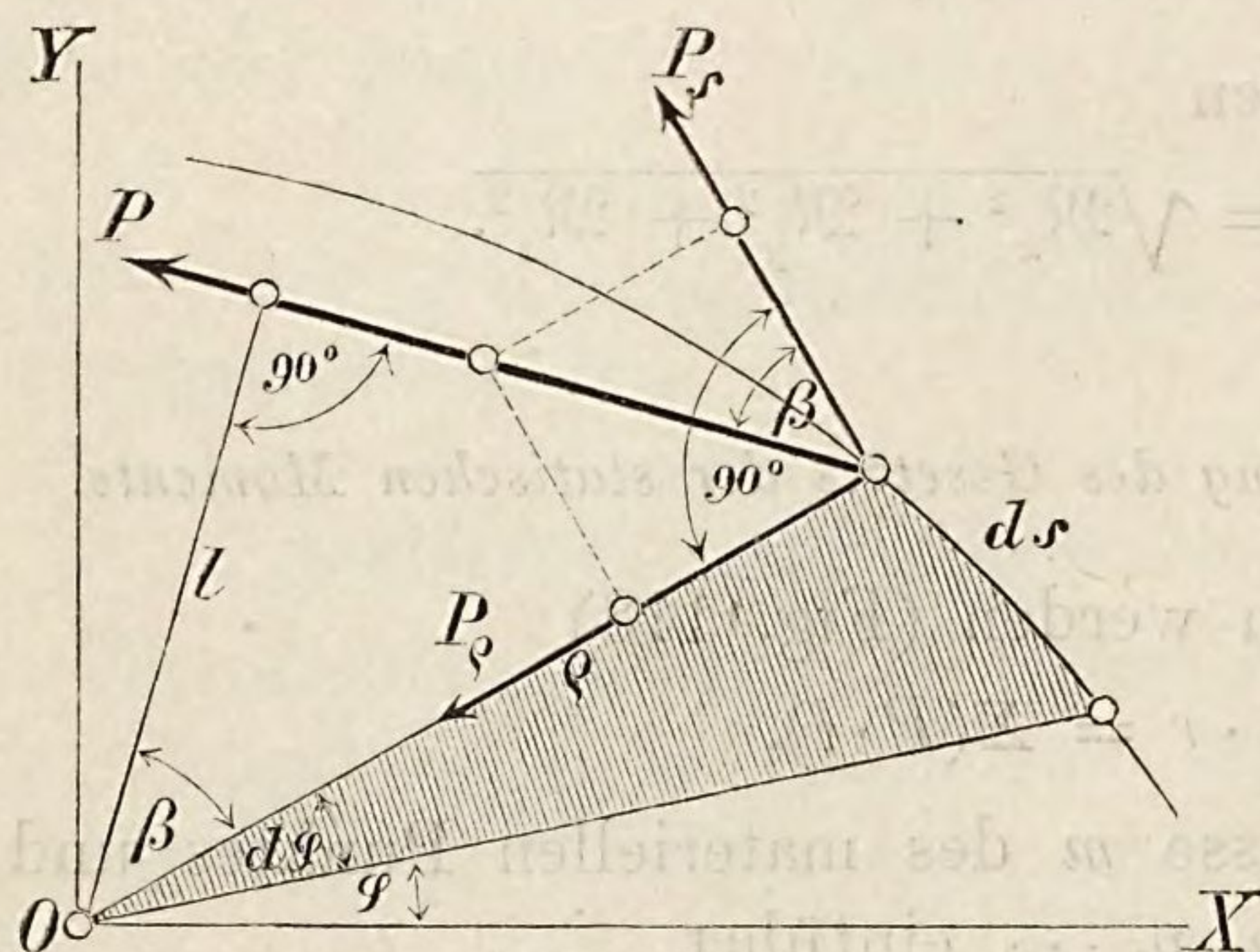


Fig. 124.

Kraft P in einer krummen Bahn, deren Punkte durch Polarkoordinaten, den veränderlichen Radiusvektor ρ und die Anomalie φ , bezeichnet werden. β bedeute den Winkel zwischen der Kraft P und einer Senkrechten zum Radiusvektor ρ in der

XY -Ebene. ρ , P und β werden im allgemeinen veränderlich sein, während der Zeit dt jedoch, also während sich

der materielle Punkt über den unendlich kleinen Weg ds bewegt, dürfen diese Grössen als constant angesehen werden. Zerlegt man die Kraft P in die Richtung des Radiusvector und senkrecht zu demselben, so ergeben sich mit Rücksicht auf Fig. 124 die Componenten

$$\begin{aligned} P_\rho &= P \cdot \sin \beta, \\ P_s &= P \cdot \cos \beta, \end{aligned}$$

und unter Anwendung des Gesetzes der statischen Momente

$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot l)$$

bezogen auf den Drehpunkt O folgt

$$P \cdot l = P_s \cdot \varrho,$$

wenn l den Hebelarm der Kraft P bedeutet, und weil das Moment von P_ρ gleich Null ist.

Für P_s den oben angeführten Werth geschrieben, gilt

$$P \cdot l = P \cdot \varrho \cdot \cos \beta,$$

was auch mit der Figur übereinstimmt, und setzt man

$$\begin{aligned} P_s &= P \cdot \cos \beta = m \cdot p_s \\ &= m \cdot \frac{dv_s}{dt}, \end{aligned}$$

wobei p_s die Beschleunigung und v_s die Geschwindigkeit des materiellen Punktes senkrecht zum Radiusvector ϱ bedeutet, so ist auch

$$P \cdot l = m \cdot \frac{dv_s}{dt} \cdot \varrho = \frac{d(m \cdot v_s \cdot \varrho)}{dt}.$$

Nun ist, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und $d\varphi$ der Bogen ist, welcher in der Entfernung Eins vom Drehpunkt in der Zeit dt beschrieben wird,

$$\begin{aligned} v_s &= \varrho \cdot \omega \\ \text{und} \\ \omega &= \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

folglich ist auch

$$P \cdot l = m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

und

$$\int_0^t (P \cdot dt) \cdot l = m \left\{ \left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) - \left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 \right\}.$$

Das Integral links nennt man das Moment des Antriebes, während man in dem Werthe rechts unter der Grösse

$$\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)_0$$

die „Flächengeschwindigkeit des materiellen Punktes zur Zeit Null“ und unter $\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)$ die Flächengeschwindigkeit zur Zeit t versteht.

Es ist nämlich nach Fig. 125

$$\varrho^2 \cdot d\varphi = 2 \cdot df$$

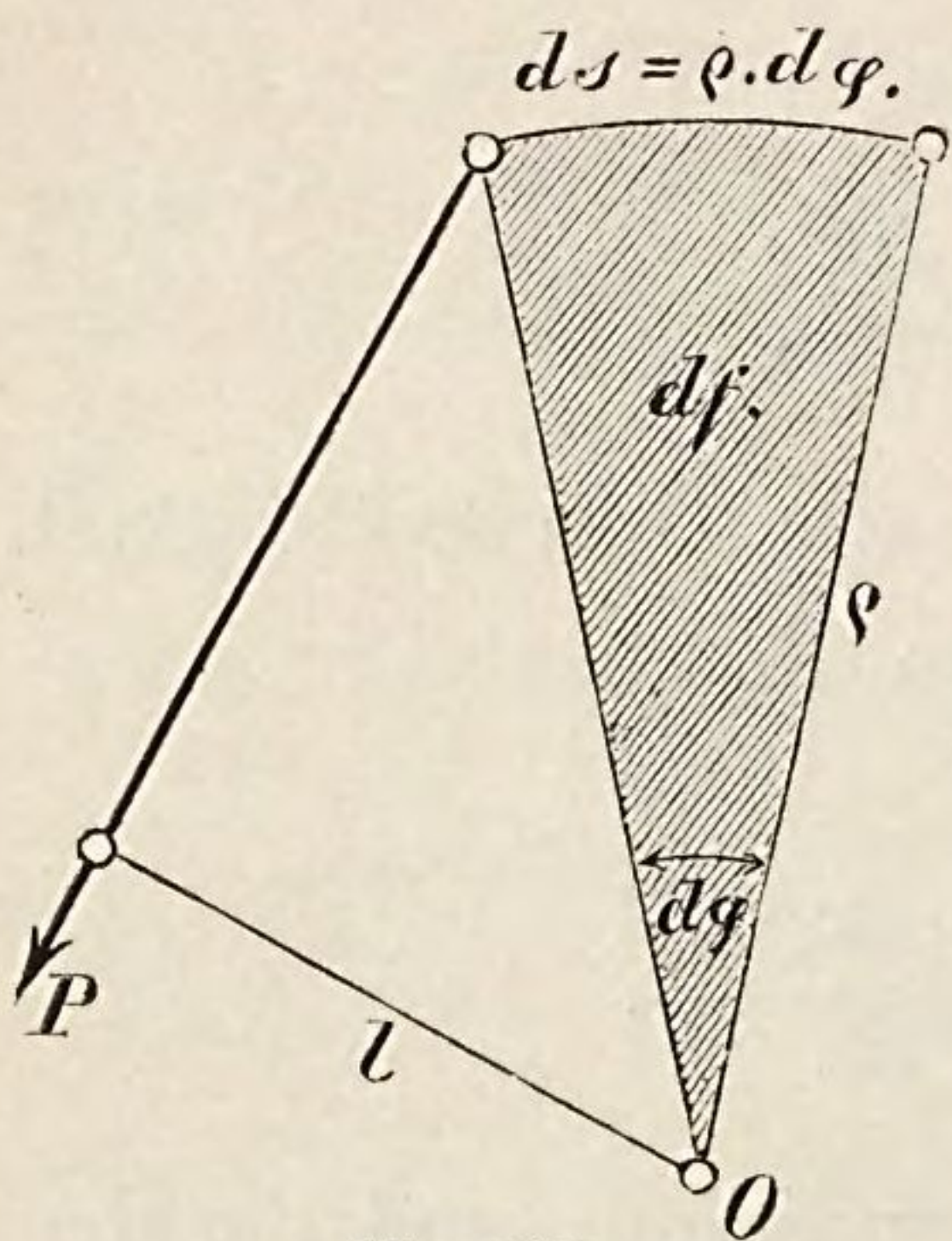


Fig. 125.

die doppelte Fläche, welche der Radiusvector ϱ in der Zeit dt beschreibt. Diese doppelte Fläche durch dt dividirt, liefert

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \frac{df}{dt}$$

diejenige Fläche doppelt genommen, welche der Radiusvector ϱ in der Zeiteinheit beschreibt, die sogenannte „Flächengeschwindigkeit“ in der

Ebene ϱ, φ . (Besser wird man $\frac{df}{dt}$,

also die vom Radiusvector in der Zeiteinheit wirklich beschriebene Fläche mit dem Namen Flächengeschwindigkeit belegen, wie es von manchen Schriftstellern auch geschieht.)

Den Differentialquotienten der Flächengeschwindigkeit nach der Zeit pflegt man früheren Bezeichnungen analog die

„Flächenbeschleunigung“
zu nennen, sie ist

$$\frac{d\left(\varrho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}.$$

Hiernach lassen sich die Gleichungen für $P \cdot l$ und für $\int_0^t (P \cdot dt) \cdot l$ folgendermassen definiren:

„Das statische Moment einer Kraft P ist gleich dem Producte aus der Masse und der Flächenbeschleunigung“
und

„das Moment des Antriebes während der Zeit t ist gleich dem Producte der Masse und der Zunahme der Flächen-
geschwindigkeit während dieser Zeit“.

Den Ausdruck

$$m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

nennt man auch „Flächenbewegung“.

Specieller Fall: $l = 0$.

Ist der Hebelarm der Kraft P gleich Null, d. h. läuft die Kraft P durch den festen Punkt O , so wird die entstehende Bewegung eine sogenannte

„Centralbewegung“.

Es wird

$$P \cdot l = 0$$

oder

$$0 = m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \frac{d(m \cdot v \cdot \varrho)}{dt},$$

$$\text{also} \quad \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \frac{df}{dt}$$

constant, d. h.: „Geht die Kraft, unter deren Einwirkung der materielle Punkt eine Bewegung ausführt, von einem unbeweglichen Punkte aus, fällt die Kraft also stets mit dem Radiusvector zusammen, so wächst die von dem

letzteren beschriebene Fläche mit constanter Geschwindigkeit; sie nimmt also in gleichen Zeiten um gleichviel zu.“

Dieser Satz heisst

„das Princip der Flächen“.

Die Componenten P_ρ und P_s der Kraft P , welche letztere eine beliebige Lage in der XY -Ebene (Fig. 126) haben kann, mögen im Folgenden durch m , t , ϱ und φ ausgedrückt werden:

Es ist nach Fig. 126

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi,$$

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi,$$

der Winkel zwischen P und P_s

$$\beta = \gamma + \varphi,$$

$$P_\rho = P \cdot \sin(\gamma + \varphi),$$

$$P_s = P \cdot \cos(\gamma + \varphi),$$

und nach Zerlegung der Kraft P in die Richtung der X - und Y -Achse auch

$$X = P \cdot \sin \gamma$$

und

$$Y = P \cdot \cos \gamma.$$

Weiter folgt nun

$$P_\rho = P \cdot \sin \gamma \cdot \cos \varphi + P \cdot \cos \gamma \cdot \sin \varphi,$$

$$P_\rho = X \cdot \cos \varphi + Y \cdot \sin \varphi,$$

$$P_\rho = m \cdot \left\{ \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \cos \varphi + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \sin \varphi \right\}$$

und

$$P_s = P \cdot \cos \gamma \cdot \cos \varphi - P \cdot \sin \gamma \cdot \sin \varphi,$$

$$P_s = Y \cdot \cos \varphi - X \cdot \sin \varphi,$$

$$P_s = m \cdot \left\{ \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \cos \varphi - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \sin \varphi \right\}.$$

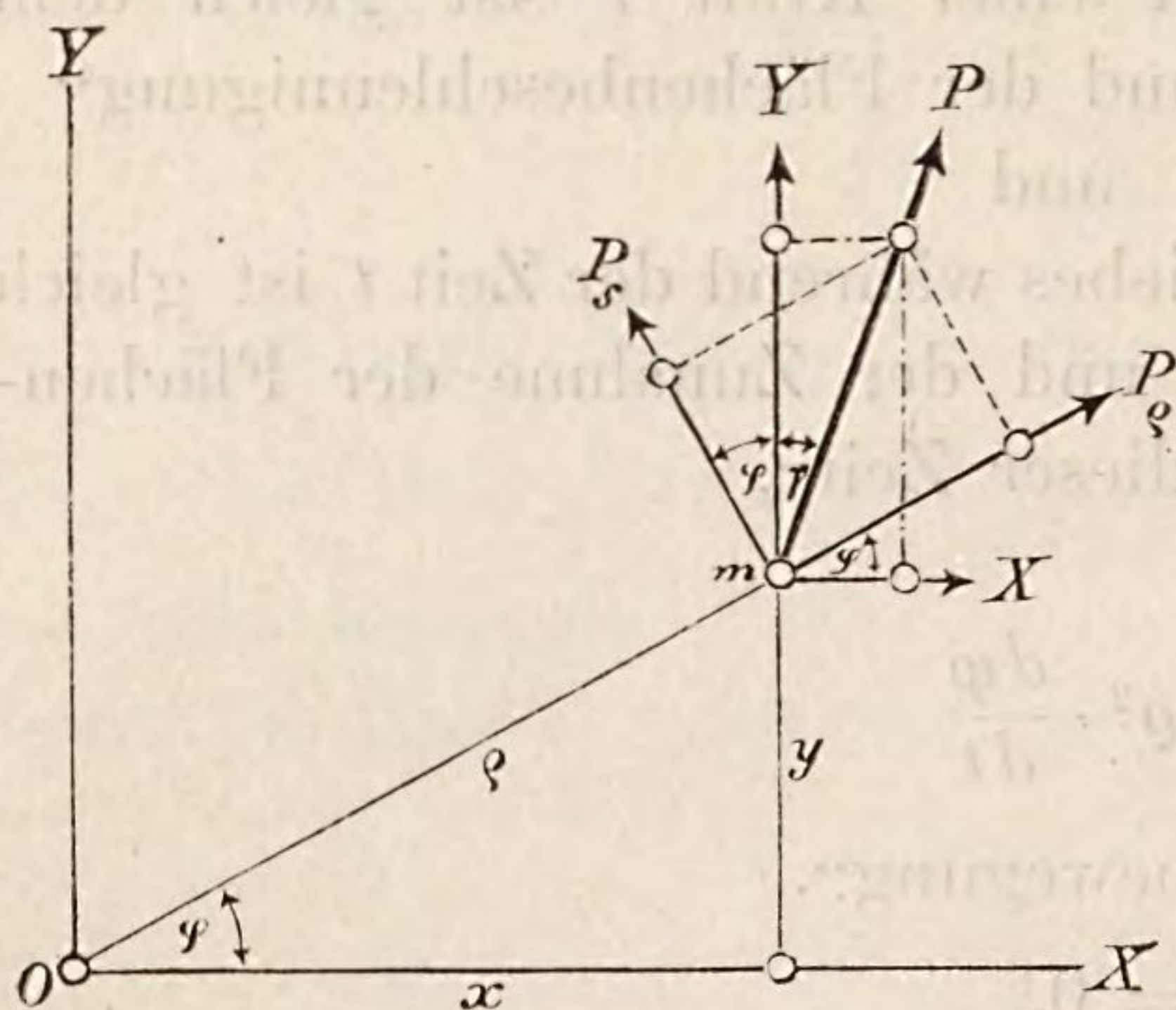


Fig. 126.

Durch zweimalige Differentiation der Werthe für

x und y

ergiebt sich aber

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \cdot \cos \varphi - 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \rho \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \rho \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

und

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\rho}{dt^2} \cdot \sin \varphi + 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} - \rho \cdot \sin \varphi \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \rho \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Werden diese Werthe in die obigen Gleichungen für

P_ρ und P_s eingesetzt, so folgt

$$P_\rho = m \cdot \left\{ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \right\}$$

und

$$P_s = m \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \rho \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right\}.$$

Dieselben Werthe gelten auch noch, wenn die Kraft P beliebig im Raum X, Y, Z liegt und die zur XY -Ebene senkrecht stehende Z -Achse als Drehachse betrachtet wird. Durch Zerlegung der Kraft P nach ρ, s und Z ergeben sich dann die Componenten

$$P_\rho, P_s \text{ und } P_z,$$

für welche letztere zu schreiben ist

$$P_z = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Multipliziert man die Gleichung für P_s mit ρ , dann ergibt sich wieder

$$P \cdot l = m \cdot \frac{d\left(\rho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt},$$

das statische Moment der Kraft P bezogen auf O , von welchem anfangs ausgegangen wurde.

II.

Freie Bewegung eines materiellen Punktes.

Unter der freien Bewegung eines materiellen Punktes resp. eines Körpers versteht man diejenige Bewegung, welche ein Körper selbstständig im Weltraum ausführt, ohne mit anderen Körpern (vorgeschriebenen Bahnen) dabei in Berührung zu kommen. So ist z. B. die Bewegung eines abgeworfenen Steines nur so lange eine freie, als der Stein die Erdoberfläche nicht berührt, während die Bewegungen der Weltkörper stets freie sind.

Der allgemeinste Fall freier Bewegung ist nach den bisherigen Lehren „ungleichförmig krummlinige Bewegung“ des materiellen Punktes, erzeugt durch eine Anfangsgeschwindigkeit und eine nach Grösse und Richtung veränderliche Kraft, welche letztere auch als die Resultirende von beliebig vielen nach Grösse und Richtung verschiedenen und veränderlichen Kräften angesehen werden kann.

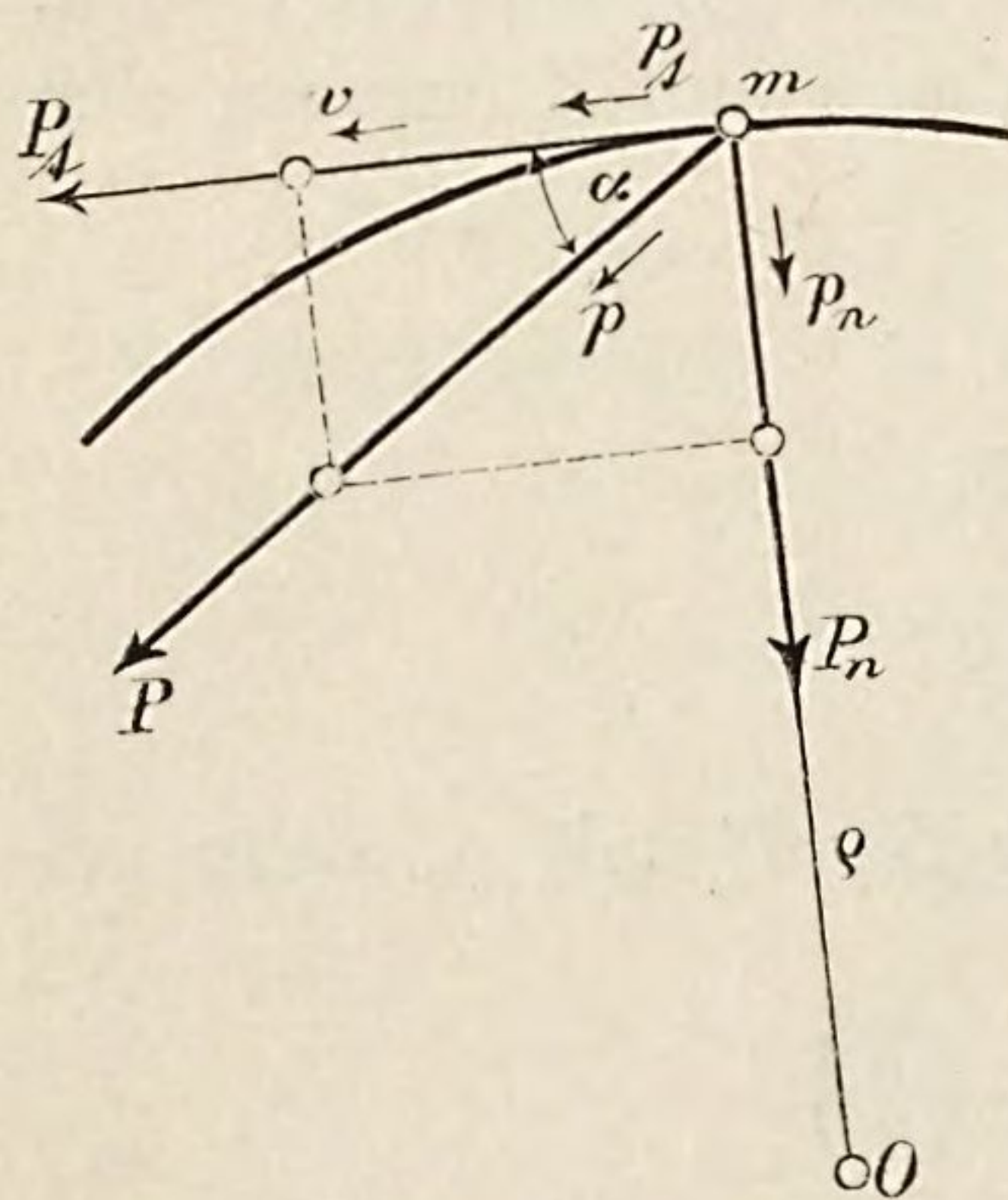


Fig. 127.

Es wurde gezeigt, dass die Tangentialkomponente P_t der Kraft P (Fig. 127) die Tangentialbeschleunigung p_t und damit die Veränderung der Tangentialgeschwindigkeit v hervorbringt; während die Normalkomponente P_n , welche mit dem Krümmungshalbmesser ρ zusammenfällt, die Normalbeschleunigung p_n , also die Normalbewegung resp. die Bewegungsrichtungsänderung des materiellen Punktes erzeugt.

Auch konnte geschrieben werden

$$p_t = \frac{dv}{dt}$$

und
$$p_n = \frac{v^2}{\varrho},$$

folglich ist

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

und
$$P_n = m \cdot \frac{v^2}{\varrho},$$

wobei die letzte Gleichung die allgemeinste Form der „Centripetalkraft“ liefert.

Alle möglichen denkbaren freien Bewegungen werden sich — unter Voraussetzung einer Anfangsgeschwindigkeit — durch P resp. P_n und P_t erzeugen lassen, in jedem Einzelfalle werden diese Kräfte aber bestimmte Eigenschaften und Werthe annehmen müssen:

1.

Ungleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes
in einer Curve,

für welche der Krümmungshalbmesser durch ein Gesetz $\varrho = F(t)$ gegeben ist. Zur Berechnung der Kräfte dienen dann die ganz allgemeinen Gleichungen

$$\varrho = F(t),$$

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt},$$

$$P_n = m \cdot \frac{v^2}{\varrho}.$$

Es ist

$$v = \frac{ds}{dt},$$

$$s = f(t),$$

also

$$v = f'(t),$$

folglich sind auch P_t und P_n Functionen der Zeit.

Ferner ergiebt sich die wahre Kraft der Grösse nach durch

$$P = \sqrt{P_n^2 + P_t^2} = \varphi(t),$$

und ihre Richtung bestimmt sich mit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_n}{P_t}.$$

Würde jedoch die Normalcomponente P_n , die Masse m und die Geschwindigkeit v in einem Augenblicke der Bewegung bekannt sein, so liesse sich der Krümmungshalbmesser ϱ bestimmen durch

$$\varrho = \frac{m \cdot v^2}{P_n},$$

welcher Werth übereinstimmend ist mit dem früher gegebenen

$$\varrho = \frac{v^2}{p_n}.$$

2.

Ungleichförmig geänderte Kreisbewegung des materiellen Punktes.

Hier muss sein

$$\varrho = r \text{ constant}$$

und

$$p_t = \frac{dv}{dt} \text{ veränderlich,}$$

also die Geschwindigkeit v durchaus veränderlich.

Demnach ist aber

$$P_t \text{ veränderlich}$$

und

$$P_n = m \cdot \frac{v^2}{r} \text{ veränderlich.}$$

3.

Gleichförmig geänderte Kreisbewegung des materiellen Punktes.

Es sind

$$\varrho = r \text{ constant,}$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ constant,}$$

also v stetig veränderlich

und P_t constant,

übrigens $P_n = m \cdot \frac{v^2}{r}$ veränderlich.

4.

Gleichförmige Kreisbewegung des materiellen Punktes.

Es gilt

$$\varrho = r \text{ constant,}$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

also $v = c$ constant,

$$P_t = 0,$$

und $P_n = m \cdot \frac{c^2}{r}$

bildet die constante Centripetalkraft.

5.

Ungleichförmig geänderte geradlinige Bewegung des materiellen Punktes.

Hier muss sein

$$\varrho = \infty,$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} \text{ veränderlich,}$$

also v allgemein veränderlich,

P_t veränderlich

und $P_n = 0.$

6.

Gleichförmig geänderte geradlinige Bewegung des materiellen Punktes.

Es ist

$$\varrho = \infty,$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ constant,}$$

folglich v stetig veränderlich,

$$P_t \text{ constant}$$

und $P_n = 0.$

7.

Gleichförmig geradlinige Bewegung und Ruhezustand des materiellen Punktes.

Hier gilt

$$\varrho = \infty,$$

$$p_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

also $v = c \text{ constant,}$

ferner $P_t = 0$

und $P_n = 0,$

d. h. auch

$$P = \sqrt{P_t^2 + P_n^2} = 0.$$

Spezieller Fall: $c = 0.$

Wird die Geschwindigkeit c des materiellen Punktes gleich Null, so ergibt sich

„der Ruhezustand“

des materiellen Punktes.

Der vorliegende Fall

$$P = 0$$

liefert

„die Statik oder die Lehre vom Gleichgewicht von beliebig vielen Kräften an einem materiellen Punkte“.

Man kann die Kraft P allgemein ansehen als eine Resultierende R von beliebig vielen auf den materiellen Punkt wirkenden Kräften, welche letzteren sich nothwendigerweise, wenn

$$P = R = 0$$

ist, in ihren Wirkungen aufheben, sich — wie man sagt — das Gleichgewicht halten müssen.

Liegen nun

a) sämtliche Kräfte in derselben Ebene (Fig. 128) und bedeuten allgemein X und Y die Componenten der Resultirenden in einer X - und einer senkrecht zu derselben stehenden Y -Achse, dann gilt für's Gleichgewicht der Kräfte

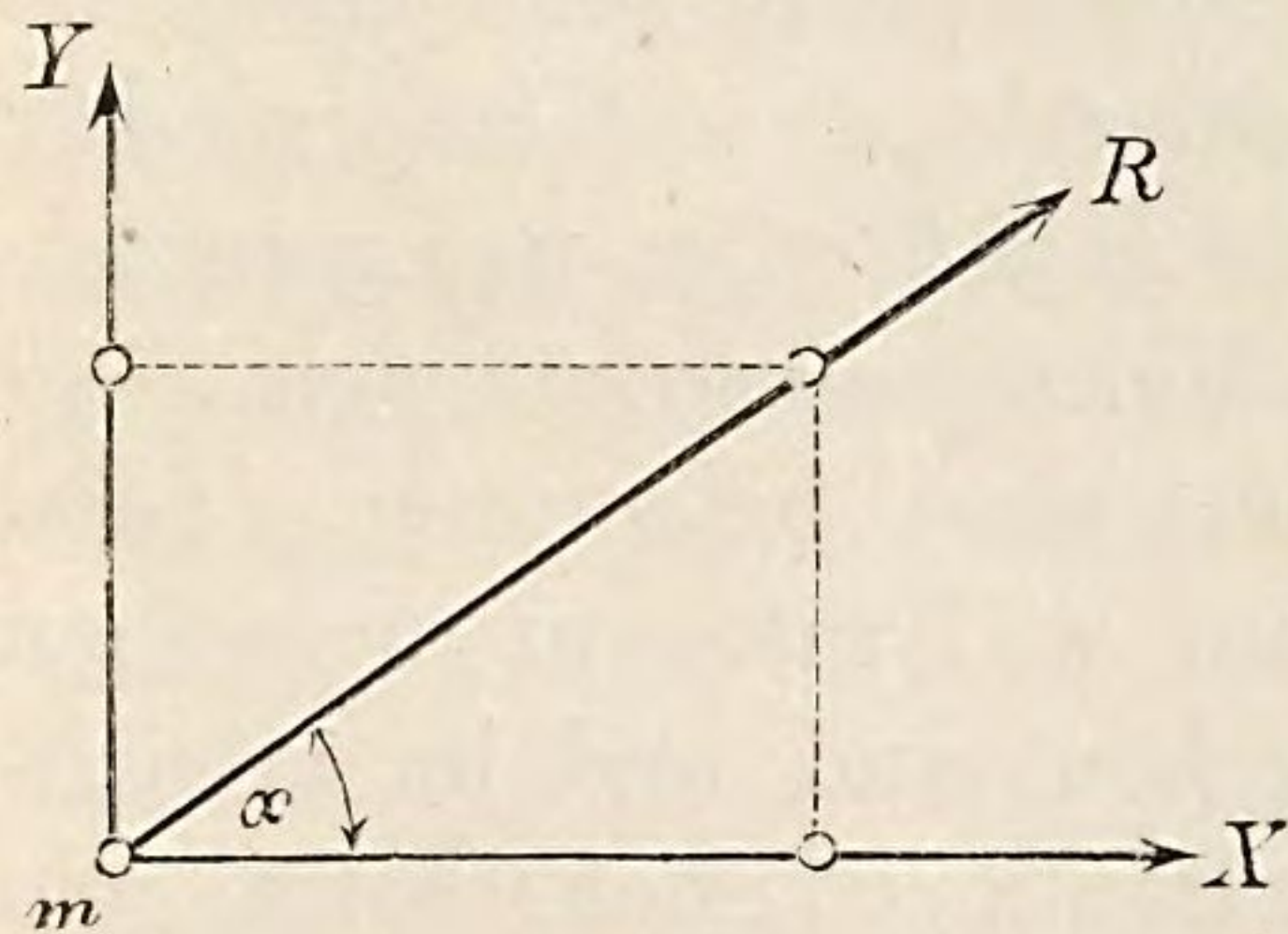


Fig. 128.

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 0,$$

d. h. aber

$$X = \Sigma(P \cdot \cos \alpha) = 0$$

und

$$Y = \Sigma(P \cdot \sin \alpha) = 0.$$

„Ergeben sich in einer Untersuchung X und Y gleich Null, dann ist R gleich Null, es stehen die Kräfte in der Ebene am materiellen Punkte im Gleichgewicht und derselbe befindet sich entweder in Ruhe oder in gleichförmig geradliniger Bewegung.“

Befinden sich nun an einem materiellen Punkt zwei gleich grosse Kräfte in geradlinig entgegengesetzter Lage,

dann ist ihre Resultirende $R = 0$ und die Kräfte sind im Gleichgewicht. Wird aber weiter von drei in derselben Ebene liegenden an einem materiellen Punkte angreifenden Kräften P_1, P_2, P_3 gefordert, dass sie im Gleichgewichte stehen, dann müssen, nach dem Vorigen, immer je zwei Kräfte mit einander vereinigt, eine Resultirende geben, welche der dritten Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist. Demnach gilt mit Bezug auf Fig. 129

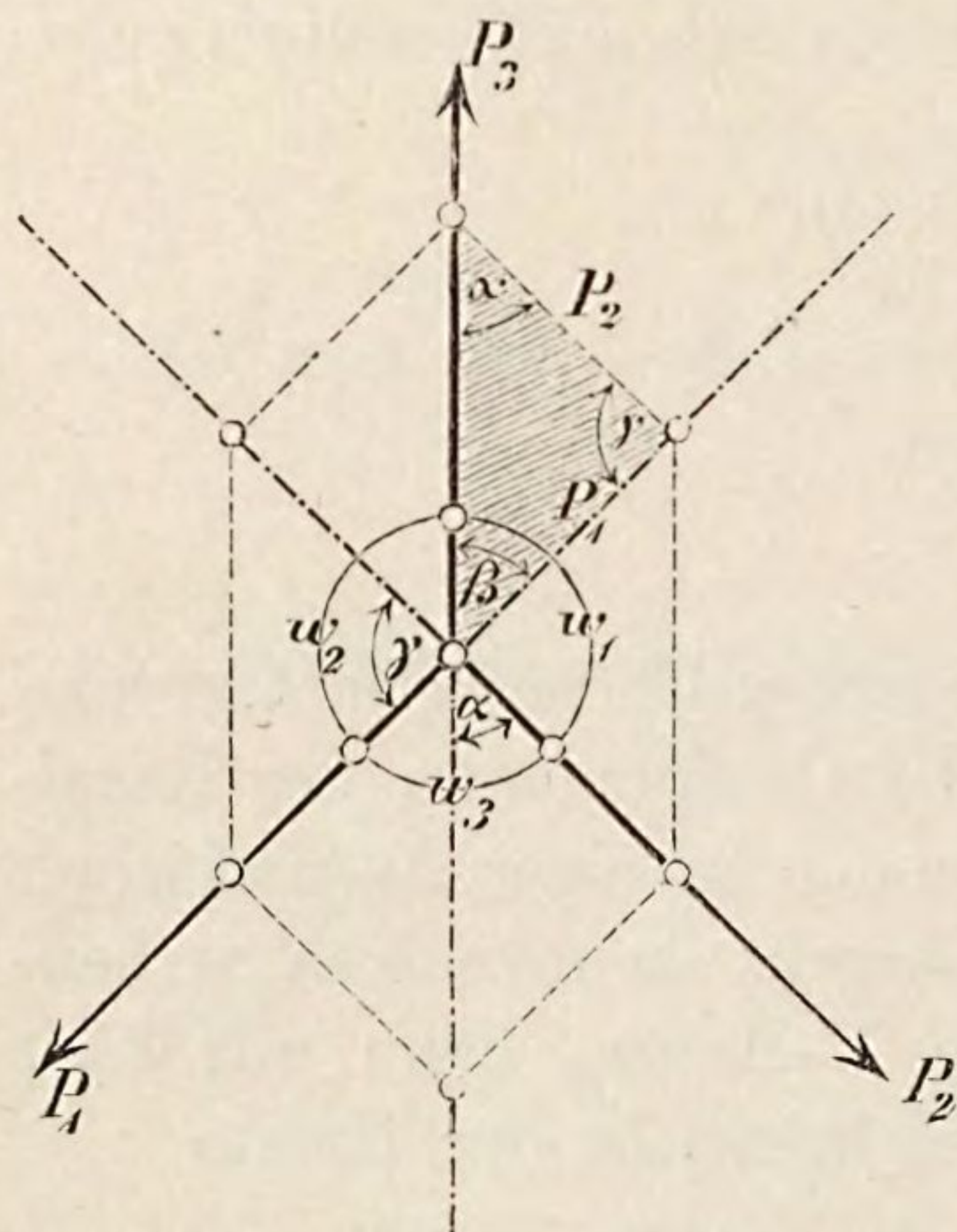


Fig. 129.

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \\ = \sin(180^\circ - \alpha) : \sin(180^\circ - \beta) : \sin(180^\circ - \gamma) \text{ oder}$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin w_1 : \sin w_2 : \sin w_3, \\ \text{d. h.}$$

„die Kräfte müssen sich verhalten wie die Sinus der den Kräften gegenüberliegenden Winkel“.

Man pflegt das erhaltene Resultat „das Gesetz der drei Kräfte zu nennen“.

Verallgemeinert man, so kann man behaupten, dass, wenn n Kräfte in derselben

Ebene an demselben Punkte gegeben sind und im Gleichgewichte stehen, je $(n - 1)$ Kräfte zusammengesetzt eine Resultirende geben müssen, welche der n^{ten} Kraft gleich gross und geradlinig entgegengesetzt gerichtet ist.

b) Liegen die am materiellen Punkte wirkenden Kräfte beliebig im Raum und bedeuten allgemein X, Y, Z die Componenten der Resultirenden R in den drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen X, Y, Z , dann gilt, sofern die Kräfte im Gleichgewicht stehen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0,$$

d. h. aber nach früherer Bezeichnung

$$X = \Sigma(P \cdot \cos \alpha) = 0,$$

$$Y = \Sigma(P \cdot \cos \beta) = 0,$$

$$Z = \Sigma(P \cdot \cos \gamma) = 0.$$

„Ergeben sich also in einer Untersuchung die drei Componenten, also auch ihre Resultirende R gleich Null, dann stehen die Kräfte im Gleichgewicht und der materielle Punkt ist in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung.“

Würden nun beispielsweise an einem materiellen Punkte vier im Raum liegende Kräfte angreifen und im Gleichgewichte sein, dann müsste ihre Resultirende gleich Null werden, d. h. die Zusammensetzung von je drei Kräften eine Resultirende ergeben, welche der vierten Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist.

Ebenso werden, wenn n Kräfte im Raum im Gleichgewicht sind, $(n - 1)$ Kräfte eine Resultirende geben, welche der n^{ten} Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist.

Durch diese Darlegung ist gezeigt worden, dass „die Statik oder die Lehre von dem Gleichgewichte der Kräfte an einem materiellen Punkte“ nur „ein specieller Fall der Bewegungslehre des materiellen Punktes“ ist, und im Uebrigen darf nun behauptet werden, dass sofern die Kräfte nicht im Gleichgewichte stehen, d. h. sofern dieselben eine Resultirende geben, welche grösser ist als Null, am materiellen Punkte neue Bewegung erzeugt wird.

Princip der virtuellen Geschwindigkeit.

Sind beliebig viele Kräfte P_1 bis P_n an einem materiellen Punkte im Gleichgewichte, so ist nach dem Obigen

$$X = \Sigma(P \cdot \cos \alpha) = 0,$$

$$Y = \Sigma(P \cdot \cos \beta) = 0,$$

$$Z = \Sigma(P \cdot \cos \gamma) = 0.$$

Durchläuft nun der materielle Punkt m einen geradlinigen, wirklichen oder gedachten Weg von der Länge Δs , dessen Neigungen zu den drei rechtwinkelig aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z heissen: α', β', γ' , so sind die Projectionen dieses Weges in die Achsen

$$\Delta x = s \cdot \cos \alpha',$$

$$\Delta y = s \cdot \cos \beta',$$

$$\Delta z = s \cdot \cos \gamma'.$$

Bildet man $X \cdot \Delta x, Y \cdot \Delta y, Z \cdot \Delta z$ und addirt man, so ergibt sich nach dem Gesetz der mechanischen Arbeit

$$X \cdot \Delta x + Y \cdot \Delta y + Z \cdot \Delta z = 0$$

oder was dasselbe ist,

$$R \cdot \Delta s \cdot \cos \varphi = 0,$$

sofern R allgemein die Resultirende aus allen Kräften und $\Delta s \cdot \cos \varphi$ die Projection des Weges Δs auf die Resultirende ist.

Hieraus aber ergibt sich der Satz:

„Sind Kräfte an einem materiellen Punkt im Gleichgewicht, so ist die Summe ihrer Arbeiten für jede beliebige geradlinige wirkliche oder gedachte Verschiebung des Punktes gleich Null.“

Dieser Satz ist auch noch gültig, wenn man sich den im Gleichgewicht befindlichen Punkt in irgend einem beliebigen Bewegungszustand begriffen denkt. Berechnet man in diesem Falle die mechanische Arbeit, welche jede einzelne Kraft während des nächstfolgenden unendlich kleinen Theiles dieser fingirten Bewegung verrichten würde, so muss für die algebraische Summe der von sämtlichen

Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten stets die Grösse Null sich ergeben, also allgemein

$$R \cdot \delta s \cdot \cos \varphi = (X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z) = 0,$$

sofern hier δs eine unendlich kleine krummlinige fingirte Verschiebung ist und δx , δy , δz ihre Projectionen in die Achsen bedeuten.

Der ausgesprochene Satz wird das „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten“ genannt, insofern die jenem fingirten Bewegungszustande entsprechenden Geschwindigkeiten des materiellen Punktes nicht als wirkliche, sondern nur als gedachte, d. h. als „virtuelle“ Geschwindigkeiten aufzufassen sind.

Das Gesetz der Beschleunigung (siehe dasselbe), welches durch die Gleichung

$$P = m \cdot p$$

ausgesprochen wurde, kann in einer dem Gleichgewicht von Kräften entsprechenden Form durch

$$P - m \cdot p = 0$$

ausgedrückt werden.

Bei dieser Schreibweise erscheint $m \cdot p$ als ein der Kraft P entgegenwirkender Widerstand, welchen man

„Trägheitswiderstand“

zu nennen pflegt; und es würde hiernach auch zu lesen sein: „Die beschleunigende Kraft und der Trägheitswiderstand stehen im Gleichgewicht“.

Freie parabolische Bewegung eines materiellen Punktes.

Ein materieller Punkt m bewege sich in einer Ebene XY unter dem Einfluss einer stets parallel zur Y -Achse gerichteten

Aus dem Werthe für a ist nun aber ersichtlich, dass sich der Parameter bei derselben Masse m umgekehrt mit der Grösse der Kraft P und direct mit dem Quadrate der Geschwindigkeit c ändert, weshalb sich je nach der Grösse dieser Werthe Parabeln mit demselben Scheitel, derselben Hauptachse, aber mit verschiedenen Parametern ergeben.

Die veränderliche Geschwindigkeit v_y in der Richtung der Y-Achse nach Verlauf der Zeit t ergibt sich durch

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(\frac{p \cdot t^2}{2}\right)}{dt} = p \cdot t = \frac{P}{m} \cdot t,$$

und die Tangentialgeschwindigkeit v nach Verlauf der Zeit t ist der Grösse nach

$$v = \sqrt{c^2 + (p \cdot t)^2},$$

während sich ihre Richtung durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{c}{p \cdot t}$$

bestimmen lässt.

Die Tangential- und Normalcomponenten der Kraft P resp. der Beschleunigung p ergeben sich nach Fig. 131 zu

$$\begin{aligned} P_t &= P \cdot \cos \alpha, \\ P_n &= P \cdot \sin \alpha; \\ p_t &= p \cdot \cos \alpha, \\ p_n &= p \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

und es ist ersichtlich, da der Winkel α sich mit der Zeit t ändert, dass diese Grössen ebenfalls Functionen der Zeit t sind.

Nun ist weiter allgemein der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{m \cdot v^2}{P_n} = \frac{v^2}{p_n},$$

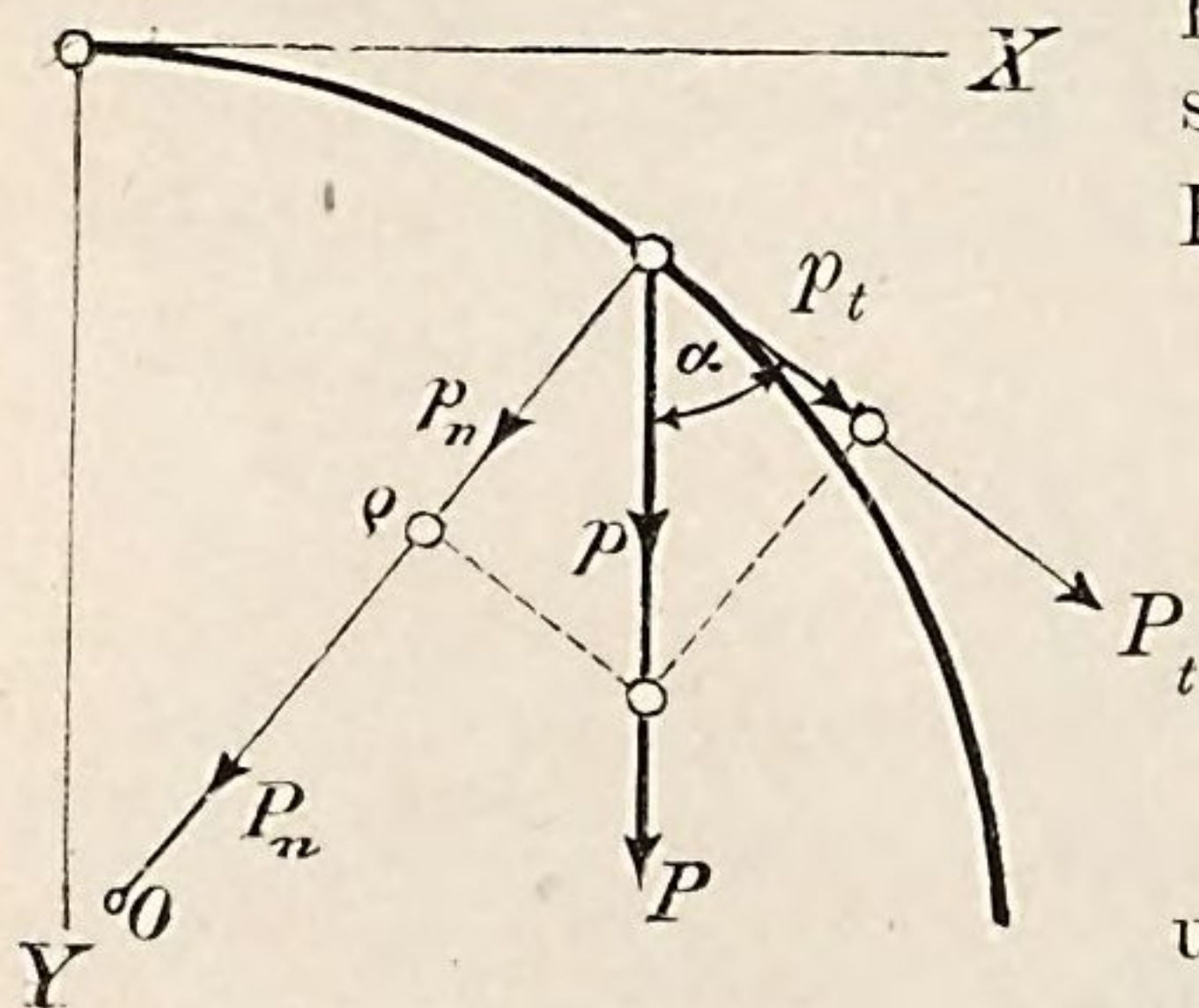


Fig. 131.

folglich hier nach Ablauf der Zeit t

$$\varrho = \frac{c^2 + (p \cdot t)^2}{p \cdot \sin \alpha}.$$

Spezieller Fall:

Würde ϱ für $t = 0$, also für $x = 0$ und $y = 0$ zu bestimmen sein, so folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \infty; \quad \alpha = 90^\circ$$

und

$$\varrho_0 = \frac{c^2}{p} = \frac{m \cdot c^2}{P}.$$

Setzt man in den erhaltenen Gleichungen

$$P = G \text{ dem Gewichte des materiellen Punktes,}$$

$$\text{also auch } p = g,$$

dann kommt die Y -Achse vertical, die X -Achse horizontal zu liegen und die Resultate gelten dann für den horizontalen Wurf im luftleeren Raume.

Es folgt:

$$x = \pm \sqrt{a \cdot y},$$

$$a = \frac{2 \cdot c^2}{g},$$

$$v = \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{g \cdot t},$$

$$P_t = G \cdot \cos \alpha,$$

$$P_n = G \cdot \sin \alpha,$$

$$p_t = g \cdot \cos \alpha,$$

$$p_n = g \cdot \sin \alpha,$$

$$\varrho = \frac{c^2 + (g \cdot t)^2}{g \cdot \sin \alpha},$$

und für $t = 0$, $\alpha = 90^\circ$

$$\varrho_0 = \frac{c^2}{g}.$$

Für die Tangentialgeschwindigkeit v lässt sich nun noch eine andere Form finden.

Es ist (Fig. 132)

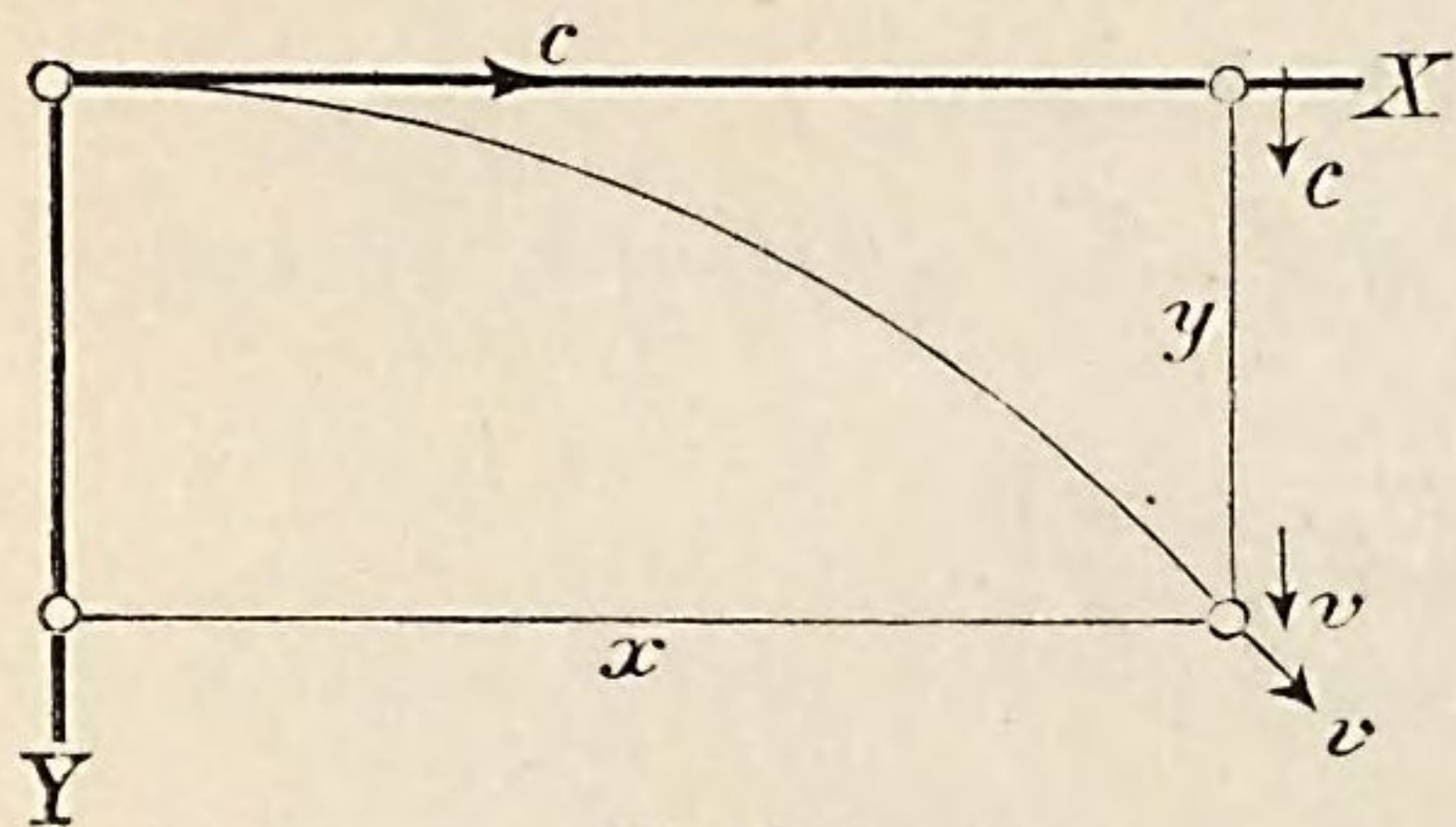


Fig. 132.

$$y = \frac{g \cdot t^2}{2},$$

$$2 \cdot y = g \cdot t^2$$

und

$$(g \cdot t)^2 = 2 \cdot g \cdot y.$$

Setzt man diesen Werth ein in die Gleichung für v , so folgt

$$v = \sqrt{c^2 + 2 \cdot g \cdot y};$$

das würde aber unter Berücksichtigung früherer Resultate heissen, dass die Endgeschwindigkeit v beim senkrechten Fallen über die Höhe y ebenso gross ist, als beim Fallen über dieselbe Höhe in einer Parabel.

Würde nun der materielle Punkt m ein Wassertropfen eines Wasserstrahles sein und ersterer unter einem Winkel α zur horizontalen X -Achse aus einem Gefässe mit einer Geschwindigkeit v_0 austreten, so würde derselbe nach erfolgtem Austritt erstens dem Einfluss der Geschwindigkeit v_0 , zweitens aber auch dem Einfluss seines Gewichtes G ausgesetzt sein.

Zur Untersuchung der Form des Wasserstrahles werde die anfängliche Geschwindigkeit v_0 in die Richtung der X - und Y -Achse zerlegt in

$$c_1 = v_0 \cdot \cos \alpha$$

$$\text{und } c_2 = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Da nun ausserdem das Gewicht G stets in der Richtung der Y -Achse wirkt und in dieser Richtung die Beschleunigung g erzeugt, so ergibt sich in der erwähnten Richtung nach Ablauf der Zeit t ein Weg

$$y = c_2 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$$

und in der Richtung der X -Achse bei der herrschenden constanten Geschwindigkeit c_1 der Weg

$$x = c_1 \cdot t.$$

$$x = c \cdot t \cdot \cos \beta$$

und $y + s_2 = c \cdot t \cdot \sin \beta$

oder $y = c \cdot t \cdot \sin \beta - \frac{g \cdot t^2}{2}.$

Aus der Gleichung für x folgt

$$t = \frac{x}{c \cdot \cos \beta},$$

mit welchem Werth sich die Gleichung der Wurfbahn

$$y = \operatorname{tg} \beta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

findet.

Zur Abkürzung werde gesetzt

$$\operatorname{tg} \beta = m,$$

$$\frac{g}{2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \beta} = n,$$

also

$$y = m \cdot x - n \cdot x^2.$$

Bestimmung des höchsten Punktes der Wurflinie,

für welchen $x = a$ und $y = b$

ist.

Setzt man

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

also

$$\frac{d(m \cdot x - n \cdot x^2)}{dx} = 0,$$

$$m - 2 \cdot n \cdot x = 0,$$

so folgt $x = a = \frac{m}{2n} = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\beta,$

und setzt man diesen Werth in die letzte Gleichung für y ein, so findet man

$$y = \frac{m^2}{2n} - \frac{m^2}{4n}$$

oder $y = b = \frac{m^2}{4n} = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \beta.$

Der durch a und b bestimmte höchste Punkt O , werde nun als ein neuer Coordinatenanfang angesehen, und es mögen die neuen Coordinaten von P in der Richtung von b mit ξ und senkrecht dazu mit η bezeichnet werden; dann gilt

$$\xi = b - y = \frac{m^2}{4n} - m \cdot x + n \cdot x^2,$$

$$\eta = a - x = \frac{m}{2n} - x.$$

Quadriert man den letzten Werth, so folgt

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{m^2}{4n^2} - \frac{m \cdot x}{n} + x^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{m^2}{4n} - m \cdot x + n \cdot x^2 \right) \end{aligned}$$

oder $\eta^2 = \frac{\xi}{n}$

und $\eta = \pm \sqrt{\frac{\xi}{n}},$

welche Gleichung nach der allgemeinen Form

$$(y = \sqrt{2 \cdot p \cdot x})$$

die Scheitelgleichung einer Parabel mit dem Parameter

$$2p = \frac{1}{n} = \frac{2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \beta}{g}$$

ist. Die Wurfbahn ist deshalb eine Parabel, deren Scheitel O , und deren Hauptachse b ist.

Die ganze Wurfweite berechnet sich durch

$$x = 2a = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\beta.$$

Derselbe Werth wird gefunden, wenn man

$$y = m \cdot x - n \cdot x^2 = 0$$

setzt, oder

$$m \cdot x = n \cdot x^2,$$

d. h.

$$x = \frac{m}{n} = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\beta = 2a.$$

Bestimmung der grössten Wurfhöhe b_{max} und der grössten Wurfweite $2a_{max}$.

Es muss sein

$$\frac{db}{d\beta} = 0,$$

$$\frac{d\left(\frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \beta\right)}{d\beta} = 0,$$

$$\text{also} \quad \cos \beta = 0,$$

$$\text{d. h.} \quad \beta = 90^\circ$$

$$\text{oder} \quad b_{max} = \frac{c^2}{2g}.$$

Ferner muss sein

$$\frac{da}{d\beta} = \frac{d\left(\frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\beta\right)}{d\beta} = 0,$$

$$\text{also} \quad \cos 2\beta = 0$$

$$\text{oder} \quad \beta = 45^\circ,$$

und die grösste Wurfweite

$$2a_{max} = \frac{c^2}{g}.$$

Die letzten Resultate ergeben sich auch ohne Weiteres aus dem Umstande, dass der sinus für $\beta = 90^\circ$ Eins wird.

Die der grössten Wurfweite $2a_{max}$ entsprechende Wurfhöhe ergibt sich durch die Einsetzung von $\beta = 45^\circ$ in

$$b = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin^2 \beta;$$

$$\text{es wird} \quad b = \frac{c^2}{2g} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}^2 = \frac{c^2}{4g}.$$

Bedeutet $\angle$ eine Winkelzunahme über 45° resp. eine gleich grosse Winkelabnahme unter 45° , dann folgen aus

$$2a = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\beta$$

$$\begin{aligned} \text{für} \quad & 2\beta = 2 \cdot 45^\circ + \Delta = 90^\circ + \Delta \\ \text{und} \quad & 2\beta = 2 \cdot 45^\circ - \Delta = 90^\circ - \Delta \end{aligned}$$

gleich grosse Wurfweiten (Fig. 134), weil die Sinus-Zahlen dieser Winkel gleich gross sind.

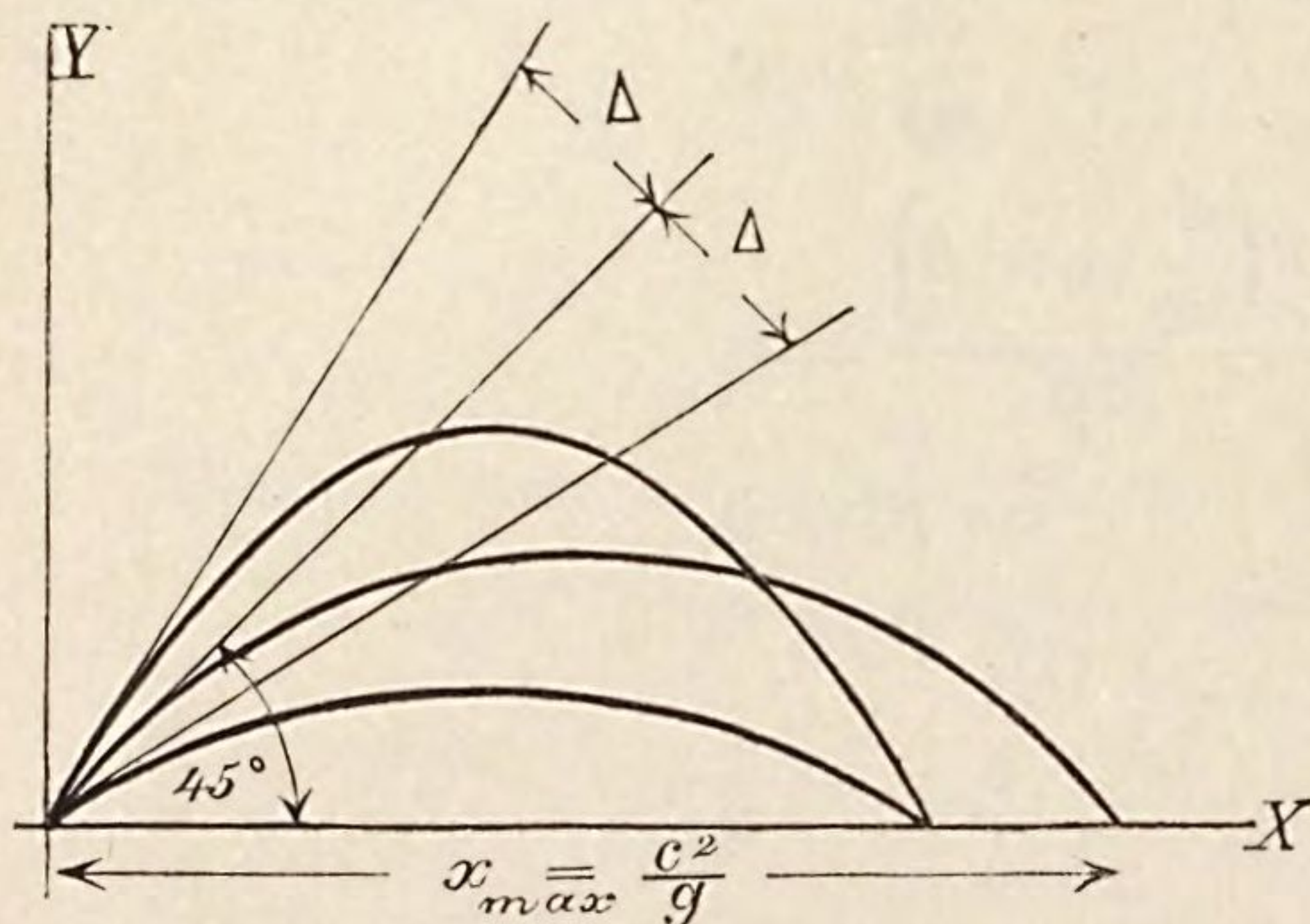


Fig. 134.

Es werde nunmehr nach demjenigen Winkel β gefragt, unter welchem bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c abgeworfen werden muss, um ein in der horizontalen Entfernung x gegebenes Ziel zu erreichen.

Zu dem Zweck muss die Gleichung

$$y = \operatorname{tg} \beta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot c^2 \cdot \cos^2 \beta} \cdot x^2$$

auf β reducirt werden:

$$y = \operatorname{tg} \beta \cdot x - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot c^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \beta),$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta - \frac{2 \cdot c^2}{g \cdot x} \operatorname{tg} \beta = - \left(\frac{2 \cdot c^2 \cdot y}{g \cdot x^2} + 1 \right)$$

oder

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{c^2}{g \cdot x} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g \cdot x} - \left(1 + \frac{2 \cdot c^2 \cdot y}{g \cdot x^2} \right)}.$$

Berechnung der Tangentialgeschwindigkeit v in einem beliebigen Punkte P der Wurfbahn.

Gegeben ist die unter β zur X -Achse geneigte constante Geschwindigkeit c und die vertical abwärts gerichtete Geschwindigkeit

$$v_1 = g \cdot t$$

des freien Falles.

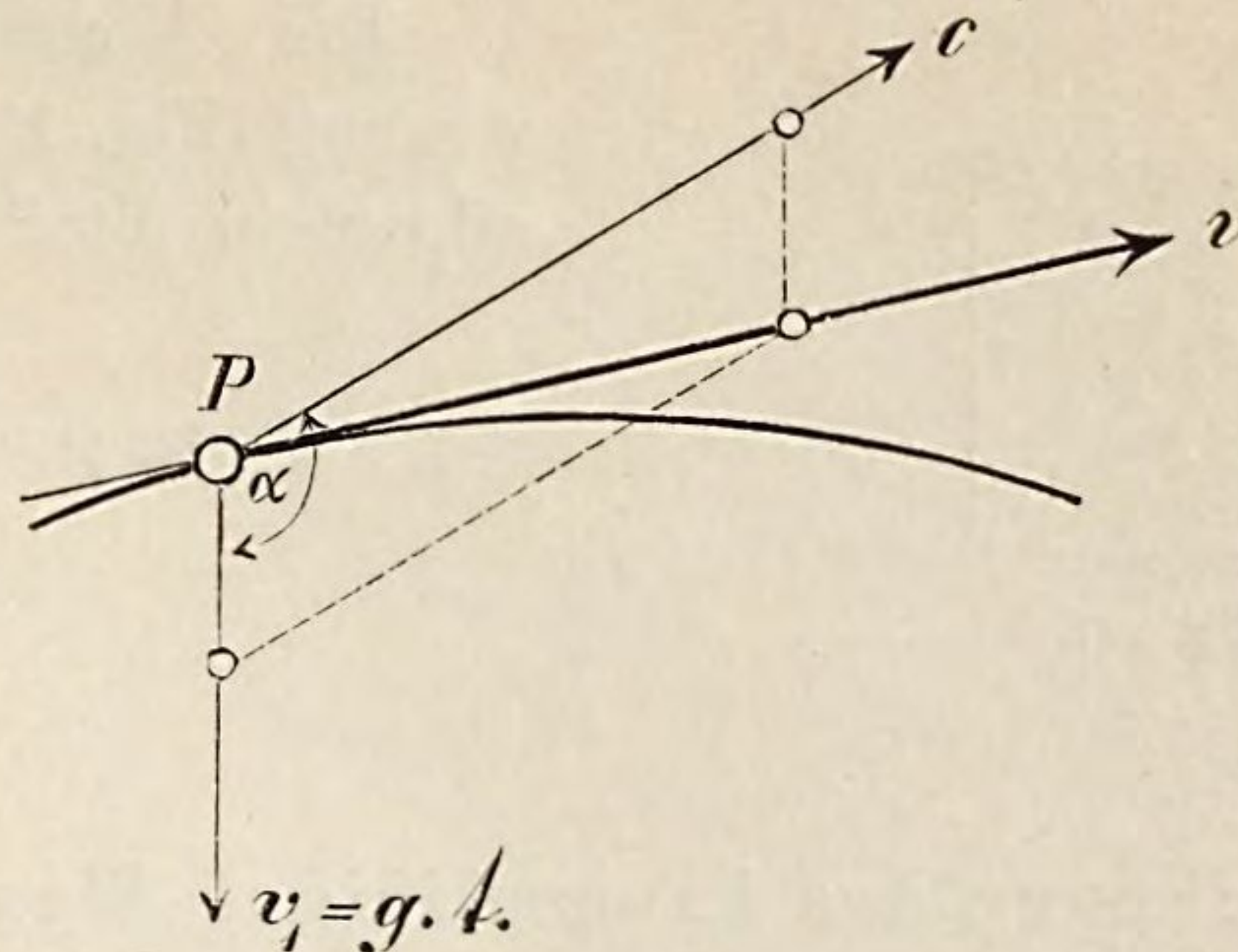


Fig. 135.

Es ist (Fig. 135) $\alpha = 90^\circ + \beta$ und nach Früherem

$$v = \sqrt{c^2 + v_1^2 + 2 \cdot c \cdot v_1 \cdot \cos \alpha}$$

oder

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{c^2 + g^2 \cdot t^2 + 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \cos(90^\circ + \beta)} \\ &= \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta}. \end{aligned}$$

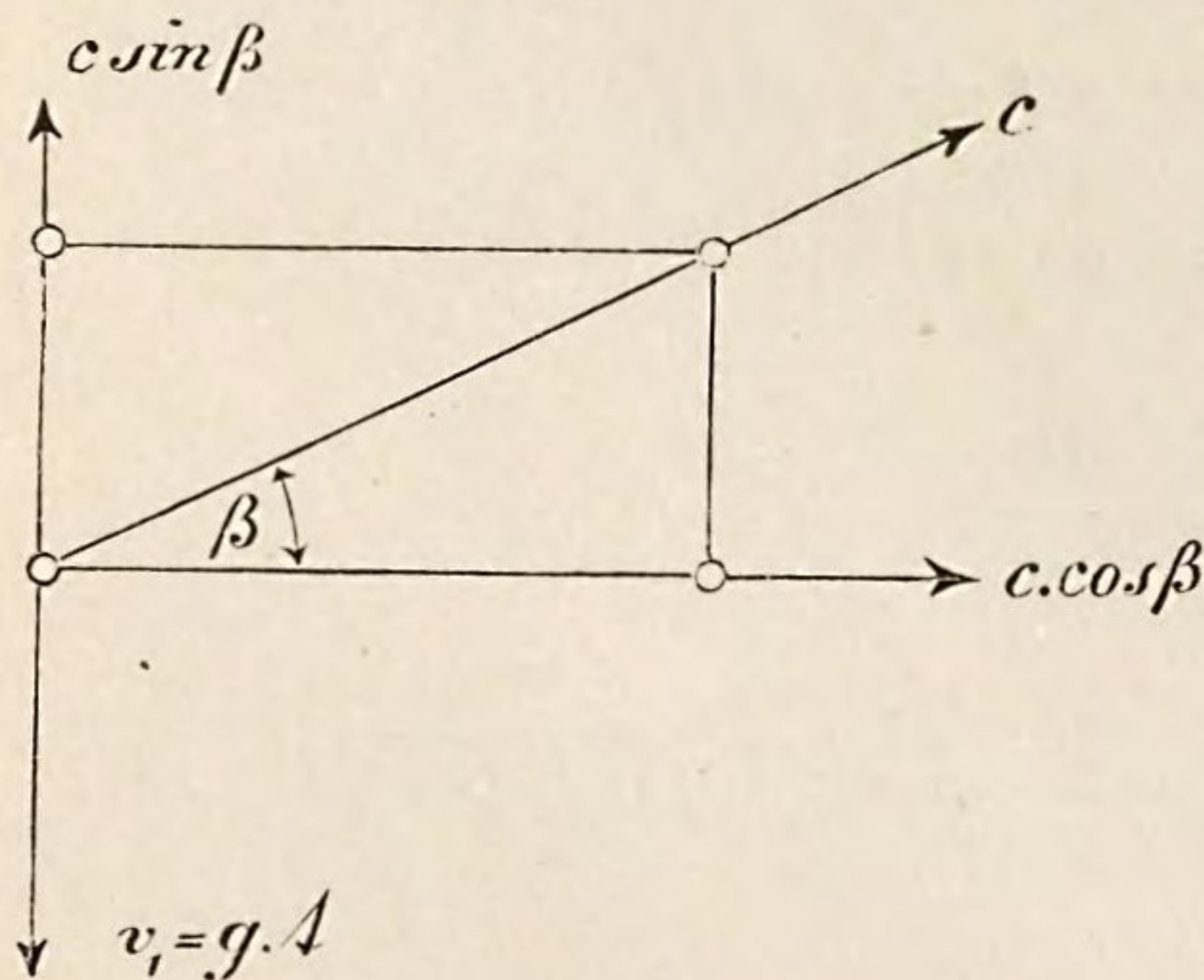


Fig. 136.

Auch kann man zur Bestimmung von v folgendermassen verfahren (Fig. 136).

Man zerlegt die gegebenen Geschwindigkeiten c und v_1 in die Richtung der X - und Y -Achse, in die Componenten v_x und v_y , wodurch sich

$$v_x = c \cdot \cos \beta,$$

$$v_y = g \cdot t - c \cdot \sin \beta,$$

und

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta} \end{aligned}$$

ergibt.

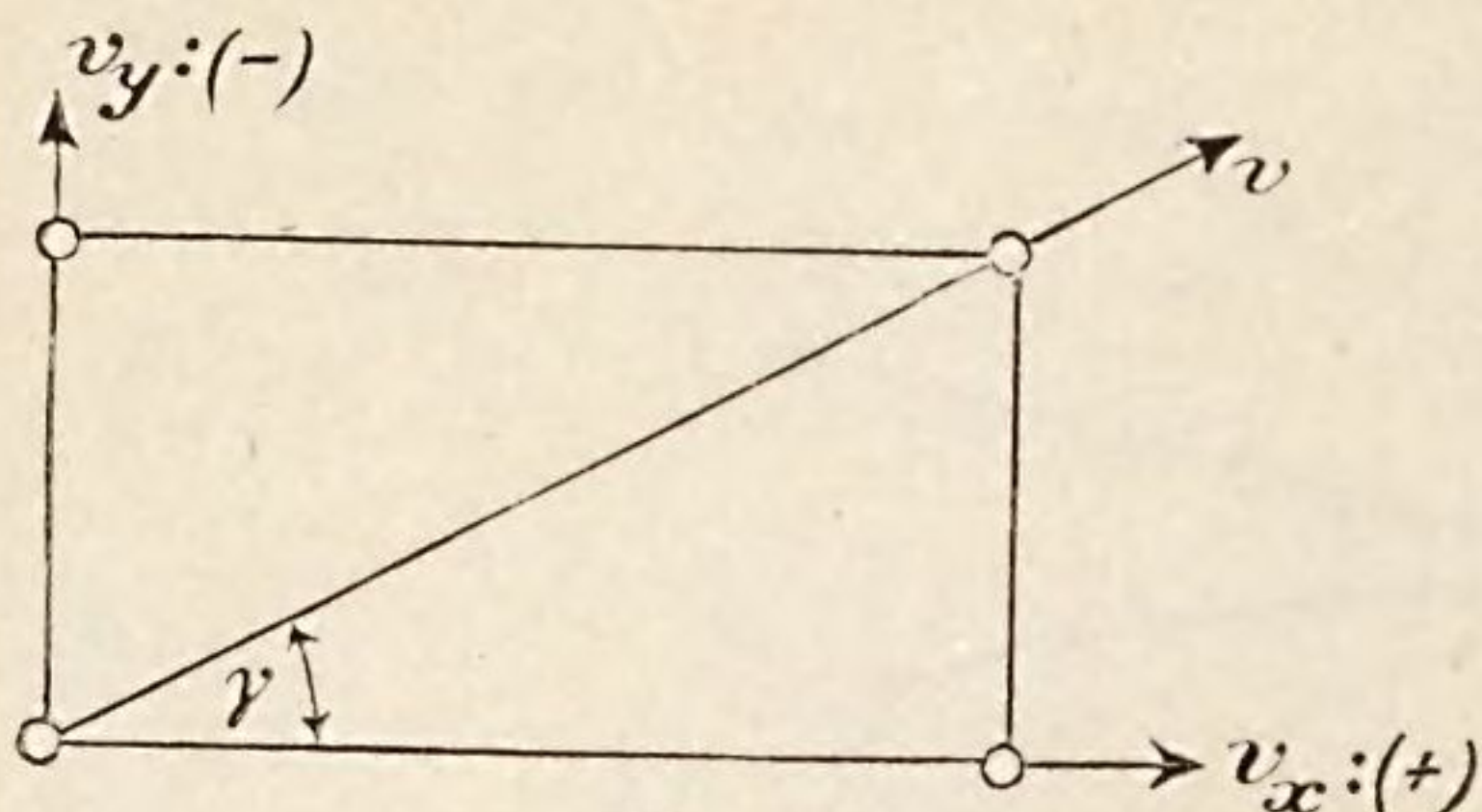


Fig. 137.

Die Richtung der Bewegung (Fig. 137) findet sich allgemein durch

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_y}{v_x}.$$

Berechnung des krummlinigen Weges s .

Allgemein ist

$$v = \frac{ds}{dt}$$

oder

$$s = \int v \cdot dt.$$

Setzt man hierin

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und für dt folgenden sich ergebenden Werth

$$v_y = g \cdot t - c \cdot \sin \beta,$$

$$dv_y = g \cdot dt$$

oder

$$dt = \frac{dv_y}{g},$$

dann folgt

$$s = \frac{1}{g} \cdot \int dv_y \cdot \sqrt{v_y^2 + v_x^2}.$$

Nun gilt allgemein

$$\int dx \cdot \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \log \operatorname{nat} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) + C,$$

demnach ist im vorliegenden Falle

$$s = \frac{1}{g} \cdot \left\{ \frac{v_y}{2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + \frac{v_x^2}{2} \cdot \log \operatorname{nat} \left(\frac{v_y + \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x} \right) \right\} + C.$$

Bestimmung der Constanten C :

Für $t = 0$ ist $s = 0$ und folgt aus

$$v_y = g \cdot t - c \cdot \sin \beta,$$

$$v_y = -c \cdot \sin \beta,$$

was nach Fig. 137 gleichbedeutend mit

$$v_y = -\sqrt{v^2 - v_x^2} \text{ ist;}$$

$$\text{aus} \quad v = \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta}$$

$$\text{wird} \quad v = c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Nach Einsetzung der Werthe in die Gleichung für s folgt

$$0 = -\frac{c}{2g} \cdot \sqrt{c^2 - v_x^2} + \frac{v_x^2}{2g} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - v_x^2}}{v_x} \right) + C$$

oder

$$C = \frac{c}{2g} \cdot \sqrt{c^2 - v_x^2} - \frac{v_x^2}{2g} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - v_x^2}}{v_x} \right);$$

daher ergibt sich schliesslich

$$s = \frac{v_y}{2g} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + \frac{v_x^2}{2g} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{v_y + \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x} \right)$$

$$+ \frac{c}{2g} \cdot \sqrt{c^2 - v_x^2} - \frac{v_x^2}{2g} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - v_x^2}}{v_x} \right)$$

oder

$$s = \frac{1}{2g} \cdot \left\{ v_y \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2} + c \cdot \sqrt{c^2 - v_x^2} + v_x^2 \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{v_y + \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{c - \sqrt{c^2 - v_x^2}} \right) \right\}.$$

Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt nach der Durchlaufung der Wurfbahn wieder in der horizontalen X -Achse eintrifft.

Im Culminationspunkt O_1 der Parabel (Fig. 133) ist die Tangentialgeschwindigkeit v horizontal gerichtet, also nach Fig. 137

$$\begin{aligned} \gamma &= 0, \\ v &= v_x = c \cdot \cos \beta, \\ v_y &= 0 = g \cdot t - c \cdot \sin \beta; \end{aligned}$$

oder es ist
$$t = \frac{c \cdot \sin \beta}{g} = t_a$$

die Zeit, welche erforderlich ist, um die halbe Parabel zu durchlaufen.

Folglich ist die Zeit für die Durchlaufung der ganzen Parabel, also für den Punkt O'' (Fig. 133)

$$t = 2t_a = \frac{2 \cdot c \cdot \sin \beta}{g}.$$

Diese Zeit eingesetzt in die Gleichung

$$v = \sqrt{c^2 + (g \cdot t)^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta}$$

gibt

$$v = c.$$

Der Punkt trifft demnach mit derselben Geschwindigkeit wieder in der Horizontalen ein, mit welcher er abgeworfen wurde.

Untersuchung der Beschleunigung p_t in der Richtung der Tangente in einem beliebigen Punkte der Wurflinie.

Es ist

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{dv}{dt}, \\ &= \frac{d\sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta + g^2 \cdot t^2}}{dt}. \end{aligned}$$

Nun ist allgemein

$$\frac{d\sqrt{a + b \cdot x + c \cdot x^2}}{dx} = \frac{b + 2 \cdot c \cdot x}{2 \cdot \sqrt{a + b \cdot x + c \cdot x^2}},$$

demnach

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{-2 \cdot c \cdot g \cdot \sin \beta + 2 \cdot g^2 \cdot t}{2\sqrt{c^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta + (g \cdot t)^2}} \\ &= \frac{g \cdot (g \cdot t - c \cdot \sin \beta)}{\sqrt{c^2 + g^2 \cdot t^2 - 2 \cdot c \cdot g \cdot t \cdot \sin \beta}} \end{aligned}$$

oder übersichtlicher

$$p_t = \frac{g \cdot (v_1 - c \cdot \sin \beta)}{v}.$$

Hiernach ist

$$1) \text{ für } O, \text{ also für } t = 0, \quad p_t = -g \cdot \sin \beta,$$

$$2) \text{ für } O', \text{ also für } t = t_a = \frac{c \cdot \sin \beta}{g},$$

$$p_t = 0$$

$$\text{und } 3) \text{ für } O'', \text{ also für } t = 2t_a = \frac{2 \cdot c \cdot \sin \beta}{g},$$

$$p_t = +g \cdot \sin \beta.$$

Noch kann gefragt werden nach der Beschleunigung p_x des Punktes in der Richtung der X -Achse und nach p_y in der Richtung der Y -Achse. Da die Richtung von v und p_t dieselbe ist, so gilt nach Fig. 136

$$p_x = p \cdot \cos \gamma$$

$$\text{und} \quad p_y = p \cdot \sin \gamma,$$

in welchen Gleichungen γ nach $\operatorname{tg} \gamma = \frac{v_y}{v_x}$ zu bestimmen ist.

Spezielle Fälle der Wurfbewegung:

1) Senkrecht aufwärts gerichteter Wurf: $\beta = 90^\circ$.

2) Horizontaler Wurf: $\beta = 0$.

3) Abwärts geneigter Wurf: $\beta : -$

4) Senkrecht abwärts gerichteter Wurf: $\beta = -90^\circ$.

Freie gleichförmige Kreisbewegung eines materiellen Punktes.

Für die gleichförmige Kreisbewegung war der

Krümmungshalbmesser $\varrho = r$ constant,

die Tangentialbeschleunigung $p_t = \frac{dv}{dt} = 0$,

also $v = c$ constant;

ferner die Tangentialkraft

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$

und die Normalkraft, die Centripetalkraft,

$$P_n = m \cdot \frac{v^2}{\rho} = m \cdot \frac{c^2}{r} \text{ constant.}$$

Bedeutet ω die constante Winkelgeschwindigkeit, dann ist

$$c = r \cdot \omega$$

und

$$P_n = m \cdot r \cdot \omega^2.$$

Würden ferner die Anzahl Umdrehungen n pro 1 Minute des materiellen Punktes gegeben sein, dann wäre die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$$

und die Centripetalkraft

$$P_n = m \cdot r \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2.$$

Auch unter der Einwirkung mehrerer Kräfte auf den materiellen Punkt kann gleichförmige Kreisbewegung erzeugt werden, wenn nur die Resultirende derselben die Centripetalkraft P_n ergibt.

Wirken beispielsweise auf den Punkt m (Fig. 138) sein Gewicht G und ein Zug Z , welcher die gegebene Drehachse OO in dem Punkte a unter einem Winkel α schneidet, und besitzt der Punkt in einer zur Drehachse senkrechten Ebene eine constante auf dem Abstände r senkrechte Geschwindigkeit c , so wird, wenn G und Z zusammengesetzt die Centripetalkraft P_n liefern, gleichförmige Drehbewegung entstehen.

Es wird nun nach der Grösse und Richtung des Zuges Z gefragt. Da G und P_n nach Grösse und Richtung gegeben sind, ist

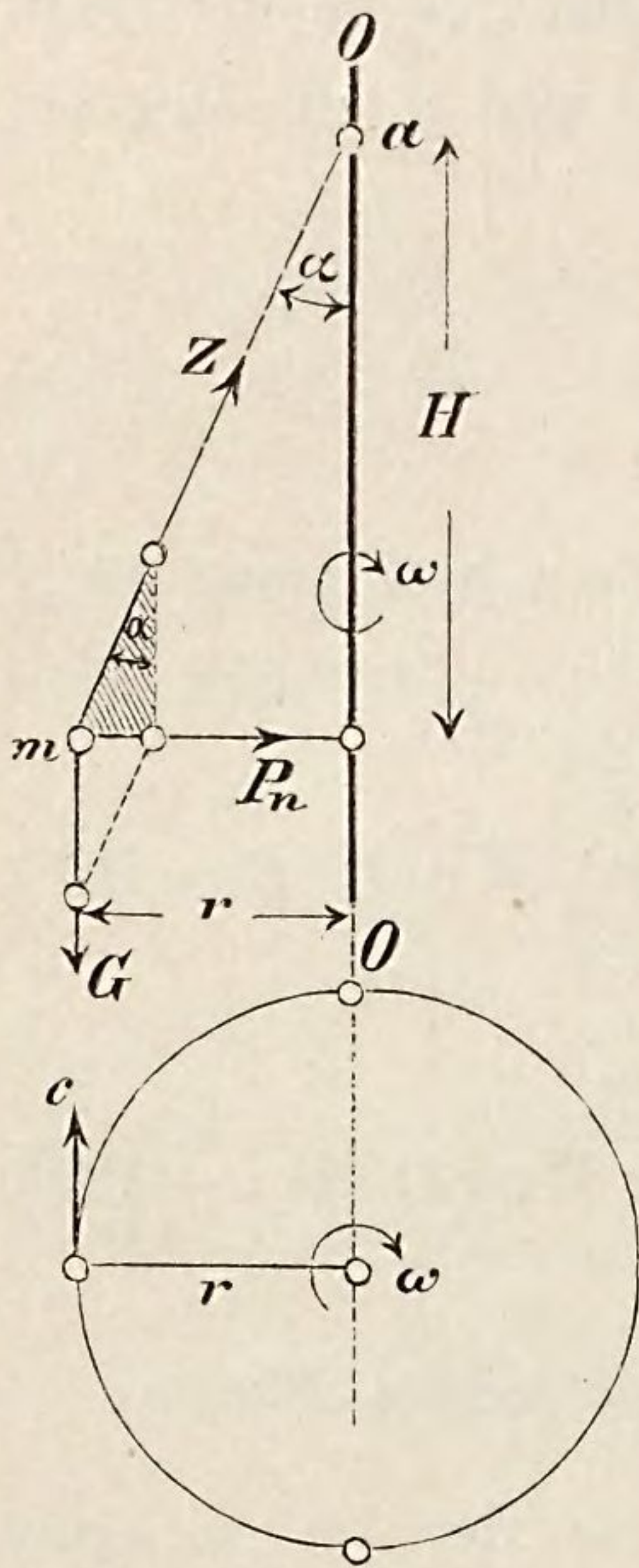


Fig. 138.

$$\begin{aligned}
 Z &= \sqrt{G^2 + P_n^2} \\
 &= \sqrt{(m \cdot g)^2 + \left(\frac{m \cdot c}{r}\right)^2} \\
 \text{oder} \quad &= m \cdot \sqrt{g^2 + \frac{c^4}{r^2}} = \frac{G}{g} \cdot \sqrt{g^2 + \frac{c^4}{r^2}}.
 \end{aligned}$$

Ferner ist die Richtung von Z bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_n}{G} = \frac{\frac{m \cdot c^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{c^2}{g \cdot r};$$

der Weg für einen Umlauf ist

$$s = c \cdot t,$$

$$\text{auch} \quad s = 2 \cdot r \cdot \pi,$$

und aus diesen beiden Gleichungen findet sich die Umlaufszeit

$$t = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{c} = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{r}{c}\right).$$

Da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c^2}{g \cdot r},$$

$$\text{auch} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{H} \text{ ist,}$$

$$\text{so folgt} \quad \frac{H}{r} = \frac{g \cdot r}{c^2} \text{ oder}$$

$$\sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{r}{c}.$$

Setzt man diesen Werth in die Zeitgleichung ein, dann folgt

$$t = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{H}{g}} = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass für alle materiellen Punkte m , welche in derselben Ebene, in der Tiefe H unter dem Punkte α liegen, die Umlaufszeit dieselbe ist. Die Umlaufszeit ist also nicht abhängig von dem Horizontalabstande r , sondern nur von der Winkelgeschwindigkeit ω .

Die einzig wirkende Kraft resp. die Resultirende aus allen auf den materiellen Punkt m wirkenden Kräften ist bei der gleichförmigen Kreisbewegung stets nach dem Kreismittelpunkt gerichtet, sie liegt also stets in der Richtung des Radius, weshalb diese Bewegung (Fig. 139) eine

„Centralbewegung“

bildet.

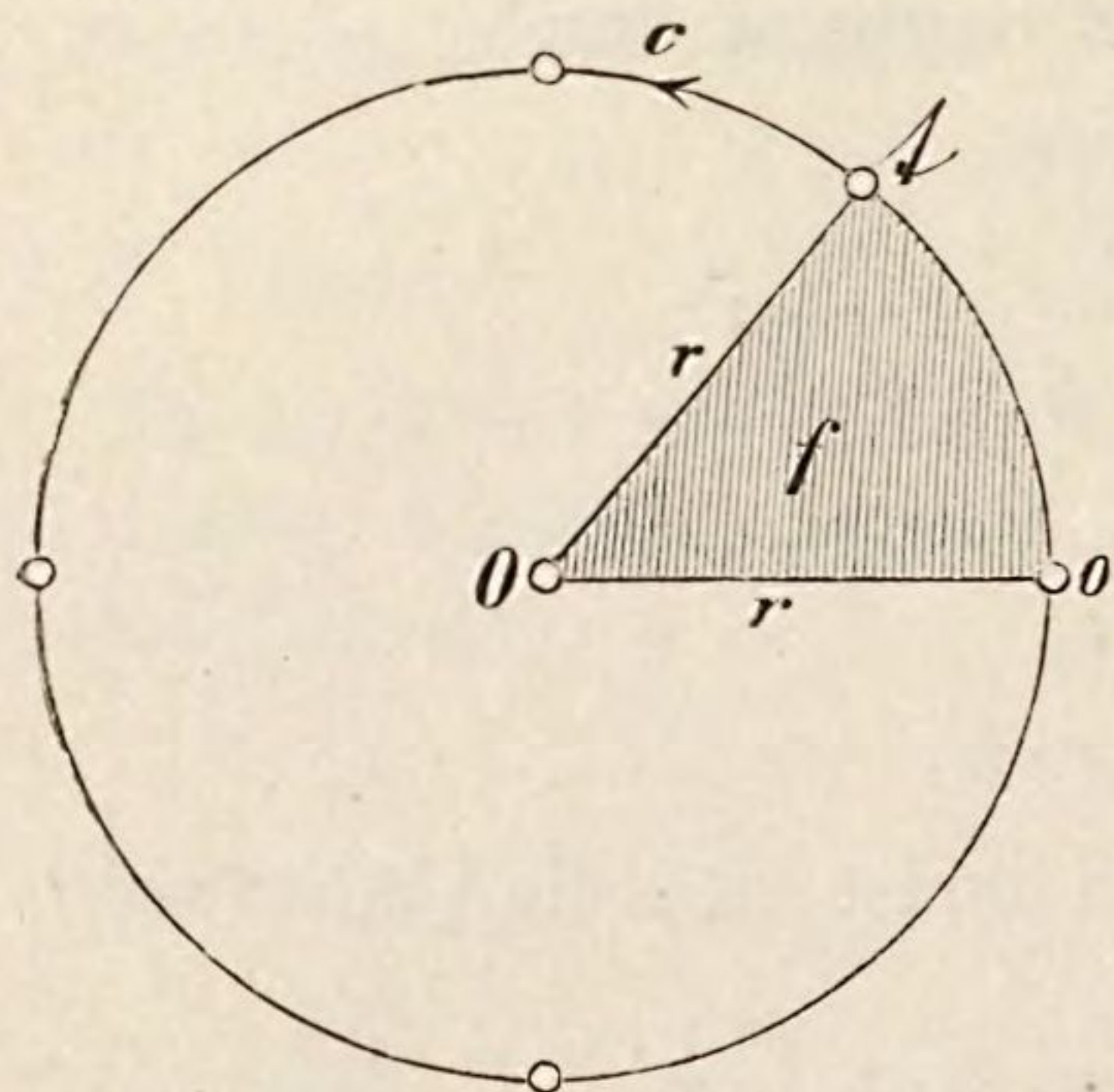


Fig. 139.

Für diese galt allgemein

$$P \cdot l = m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = 0,$$

d. h., da $\varrho = r$ constant,

$$r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \frac{df}{dt} \text{ constant}$$

oder

$$df = \frac{r^2 \cdot d\varphi}{2}.$$

Nun ist $\varphi = \omega \cdot t$, also $df = \frac{r^2 \cdot \omega}{2} \cdot dt$;

und da $\frac{r^2 \cdot \omega}{2} \text{ constant} = a$ ist, so folgt

$$f = a \cdot t,$$

d. h. die vom Radius r beschriebene Fläche f ist direct proportional der Zeit t .

Der Mond beschreibt bei seiner Bewegung um die Erde eine Bahnlinie, welche annähernd als eine Kreislinie angesehen werden kann, gleichförmig durchlaufen wird und deren Mittelpunkt mit dem Erdmittelpunkt zusammenfällt.

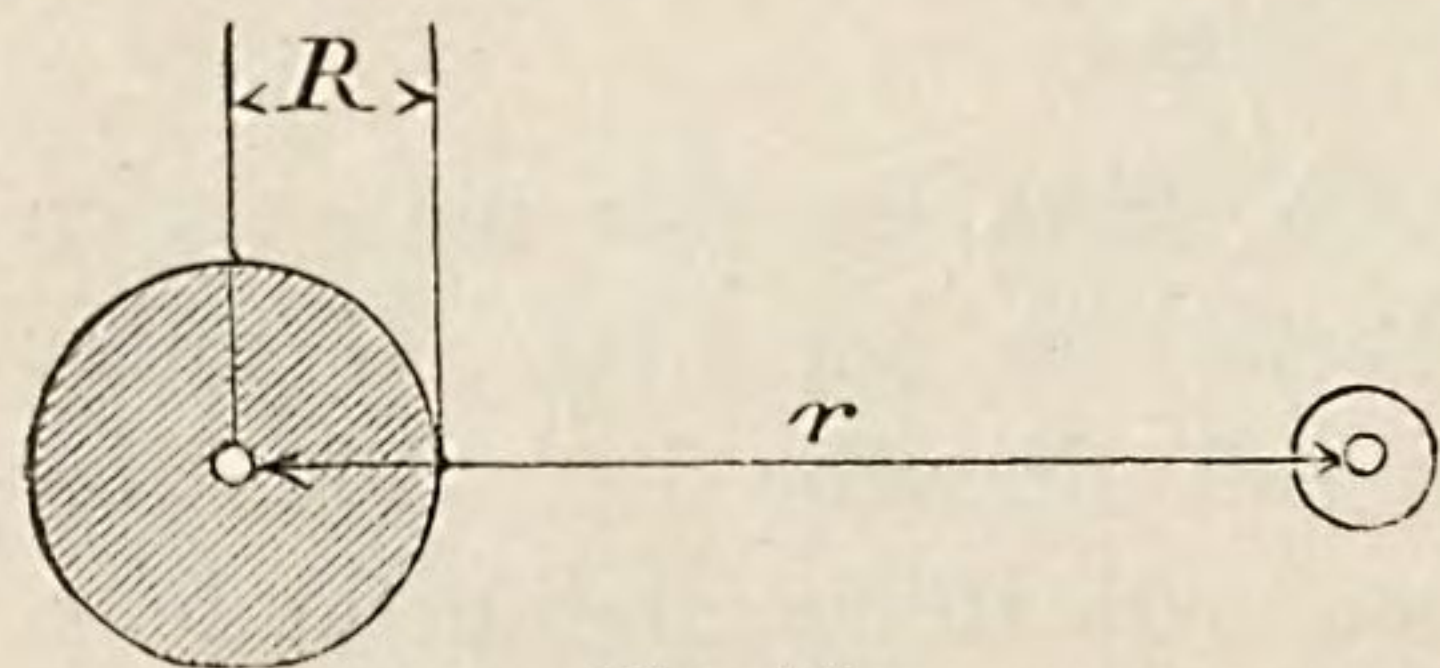


Fig. 140.

Der Halbmesser dieses Kreises ist ungefähr das 60fache des Erdhalbmessers, also mit Bezug auf Fig. 140

$$\begin{aligned} r &= 60 \cdot R \\ &= 60 \cdot 6366000 \\ &= 381960000 \text{ Meter,} \end{aligned}$$

während die Umlaufszeit des Mondes um die Erde

$$t = 27 \text{ Tage } 7 \text{ Stunden } 43 \text{ Minuten } 11,7 \text{ Sekunden,} \\ \text{rund } 2360000 \text{ Sekunden}$$

beträgt.

Es ist der Umlauf

$$s = c \cdot t,$$

$$\text{auch} \quad s = 2 \cdot r \cdot \pi,$$

also die Tangentialgeschwindigkeit

$$c = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{t} = 1020 \text{ Meter pro 1 Sekunde.}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{t},$$

die Centripetalkraft hingegen durch

$$P_n = \frac{m \cdot c^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{t} \right)^2$$

und die Centripetalbeschleunigung durch

$$p_n = \frac{c^2}{r} = \frac{1020^2}{381960000} = 0,0027 \text{ Meter.}$$

Man kann auch schreiben

$$P_n = m \cdot p_n = m \cdot r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{t} \right)^2$$

$$\text{oder} \quad p_n = r \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{t} \right)^2 = 381960000 \cdot \left(\frac{2 \cdot 3,14}{2360000} \right)^2 \\ = 0,0027 \text{ Meter.}$$

Ferner kann die Centripetalbeschleunigung des Mondes auch mit dem bereits angeführten Newtonschen Gravitationsgesetz bestimmt werden, nach welchem sich die Körper im Weltall einander anziehen.

Bedeutet

M die Masse der Erde,

m die Masse des Mondes,

G das Gewicht des Mondes, welches derselbe an der Erdoberfläche besitzen würde,

dann ist

$$P_n = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

oder $m \cdot p_n = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2},$

und

$$G = k \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

oder $m \cdot g = k \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}.$

Durch Division der beiden Werthe ergibt sich

$$\frac{p_n}{g} = \frac{R^2}{r^2}$$

oder $p_n = g \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^2.$

Nun ist $\frac{R}{r} = \frac{1}{60}, \quad g = 9,81 \text{ Meter}$

mithin

$$p_n = \frac{9,81}{3600} = 0,0027 \text{ Meter}$$

wie oben.

Geradlinige Schwingungen des materiellen Punktes.

Bereits wurden in der geometrischen Bewegungslehre die geradlinig schwingende Bewegung besprochen und ihre Gesetze aus der gleichförmigen Kreisbewegung durch Projection derselben in einen ihrer Durchmesser abgeleitet. Die Ableitung mag hier unter Berücksichtigung der Centripetalkraft P_n durch directe Zerlegung geführt werden.

Es sind die Centripetalkraft

$$P_n = m \cdot r \cdot \omega^2$$

und die Componenten dieser Kraft parallel zur X- und Y-Achse

$$X = - P_n \cdot \cos \varphi$$

und $Y = - P_n \cdot \sin \varphi,$

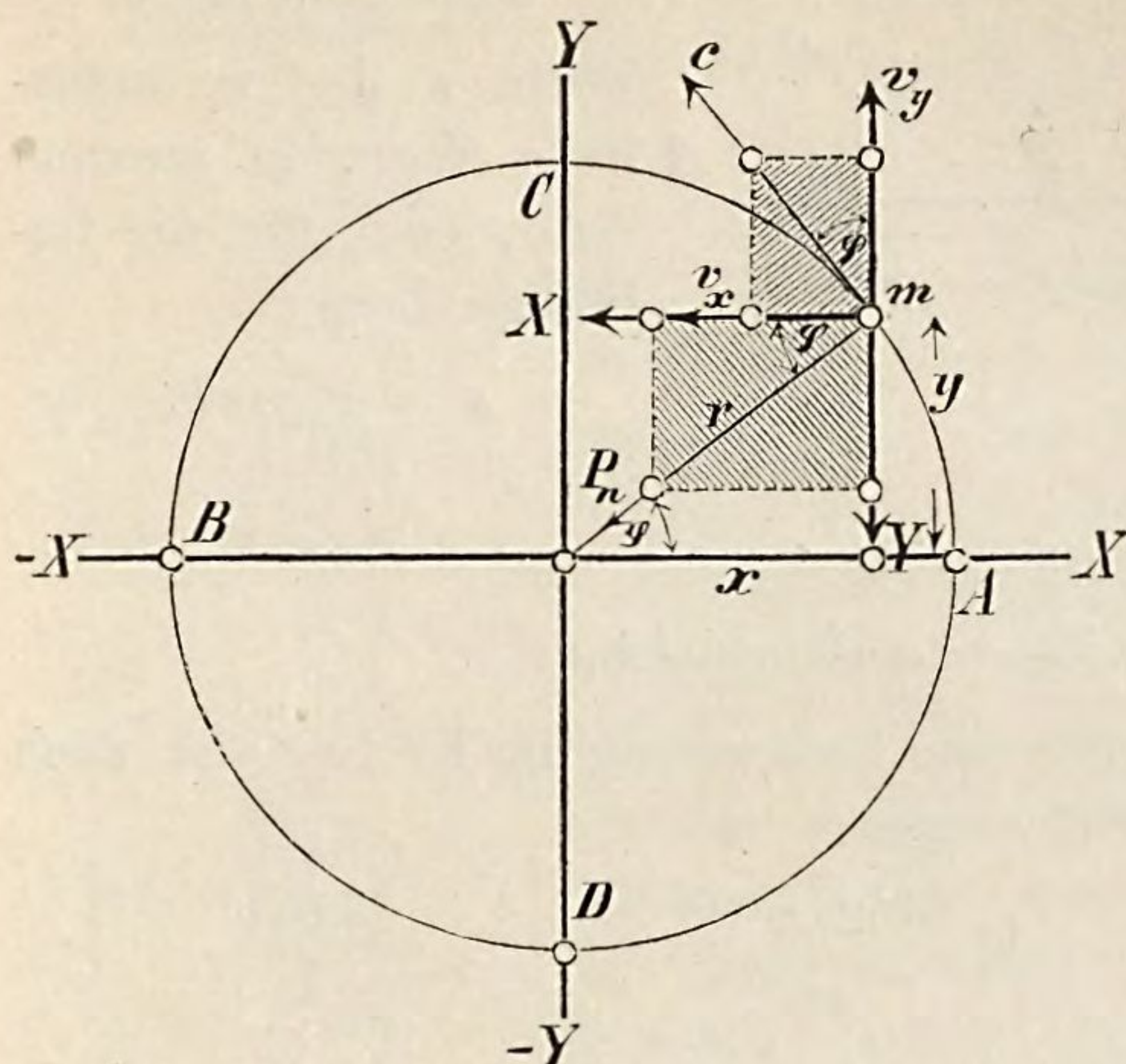


Fig. 141.

während die Komponenten der Tangentialgeschwindigkeit c nach diesen Richtungen

$$v_x = -c \cdot \sin \varphi$$

und

$$v_y = +c \cdot \cos \varphi$$

sind.

Auch ergeben sich die Wege in den Richtungen der Achsen nach Fig. 141 zu

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

und

$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

Aus den letzten Gleichungen ergibt sich

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}$$

und $\sin \varphi = \frac{y}{r},$

welche Werthe in die Kräfte- und Geschwindigkeits-Gleichungen eingesetzt, folgende Ausdrücke liefern

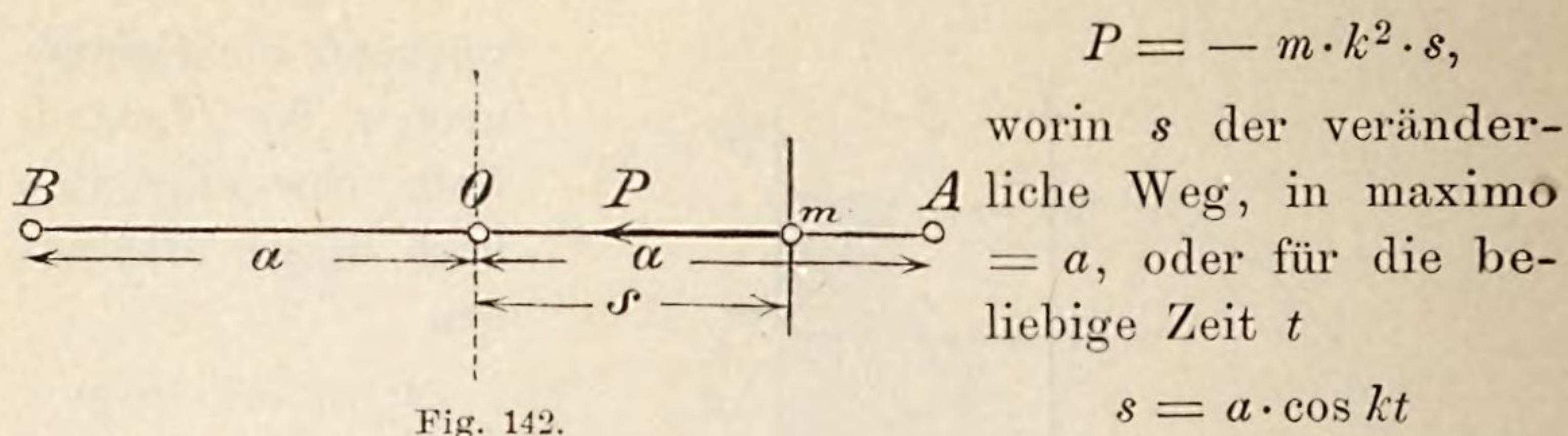
$$X = -m \cdot \omega^2 \cdot x,$$

$$Y = -m \cdot \omega^2 \cdot y,$$

$$v_x = -c \cdot \frac{y}{r} = -\omega \cdot y,$$

$$v_y = +c \cdot \frac{x}{r} = +\omega \cdot x.$$

Setzt man nun $\varphi = \omega \cdot t$ oder allgemein $\varphi = k \cdot t$, worin k eine Constante bedeutet, und benutzt man den Punkt A als Anfang der Bewegung, dann ergeben sich die Gesetze der geradlinig schwingenden Bewegung aus den Grössen in der X-Achse allgemein durch folgende Ausdrücke (Fig. 142):



ist.

Die Geschwindigkeit zur Zeit t wird ausgedrückt durch

$$v = -a \cdot k \cdot \sin kt.$$

Weiter ist die Zeit für eine Umdrehung im Kreise, also auch für ein Hin- und Her-Schwingen

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

oder
$$T = \frac{2 \cdot \pi}{k},$$

resp. für ein Hin- oder ein Her-Schwingen

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{k}.$$

Die Schwingungszeit ist also unabhängig von der Schwingungsweite a .

Bedeutet schliesslich noch

n die Anzahl Umdrehungen eines Punktes im Kreise resp. die Anzahl Doppelschwingungen, dann ist

$$2 \cdot \pi : 2 \cdot \pi \cdot n = T : 60$$

oder
$$n = \frac{60}{T};$$

oder den Werth für T eingesetzt

$$n = \frac{60 \cdot k}{2 \cdot \pi} = \frac{30 \cdot k}{\pi}.$$

Die Gleichungen der geradlinigen Schwingungen lassen sich auf gespannte Federn anwenden, bei denen erfahrungsgemäss die Spannkraft, welche die Feder in ihre ursprüngliche Form zurückführen will, direct proportional der Verlängerung der Feder ist.

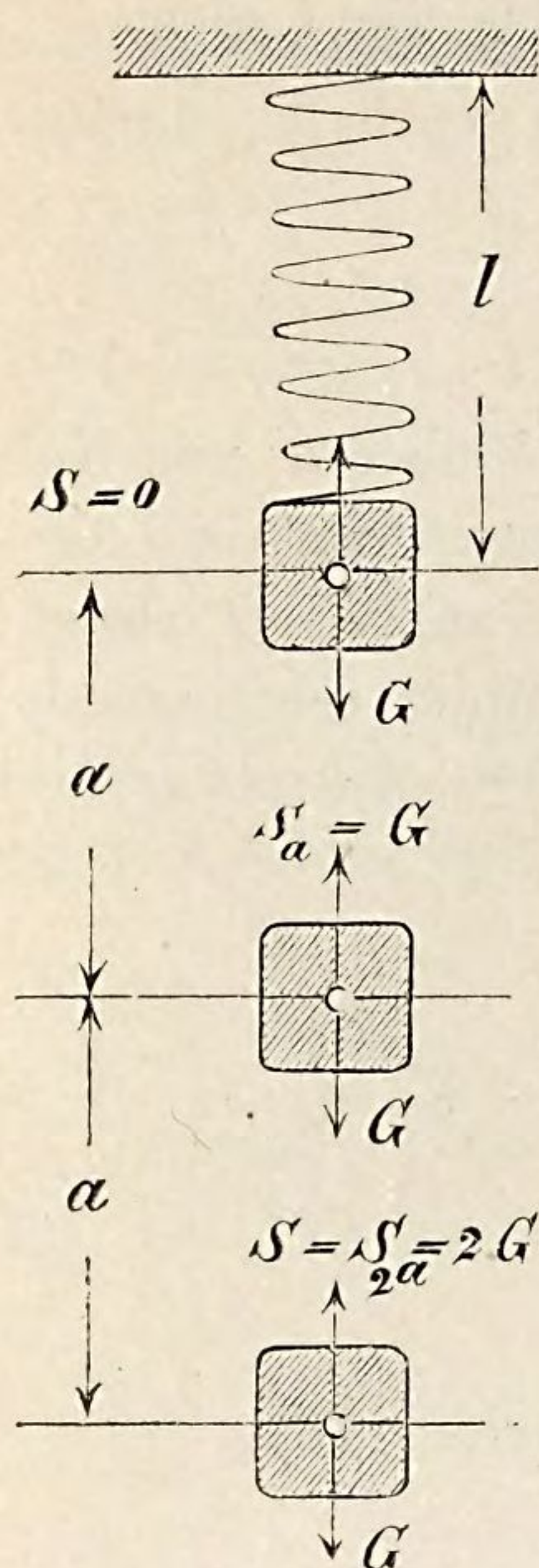


Fig. 143.

Eine vertical aufgehängte Spiralfeder (Fig. 143) besitze im unbelasteten Zustande eine Länge l und in diesem Zustande eine vertical aufwärts gerichtete Spannkraft $S = 0$. Hierauf werde an das freie Ende der Feder ein Gewicht G angehängt, durch dasselbe die Feder um das verticale Mass a verlängert, und durch die Verlängerung in der Feder eine vertical aufwärts gerichtete Spannung $S = S_a = G$ hervorgerufen. Zieht man nun das Gewicht G um ein weiteres Mass a vertical abwärts, verlängert man also die Feder im Ganzen um $2a$, so wird, da sich die Federspannung erfahrungsgemäss direct proportional dem Wege ändert, $S = S_{2a}$ auf $2G$ steigen. Berechnet man nun (siehe graphische Darstellung in Fig. 144) die Resultierende P der Federspannung und des Gewichtes für jede Lage, so gilt

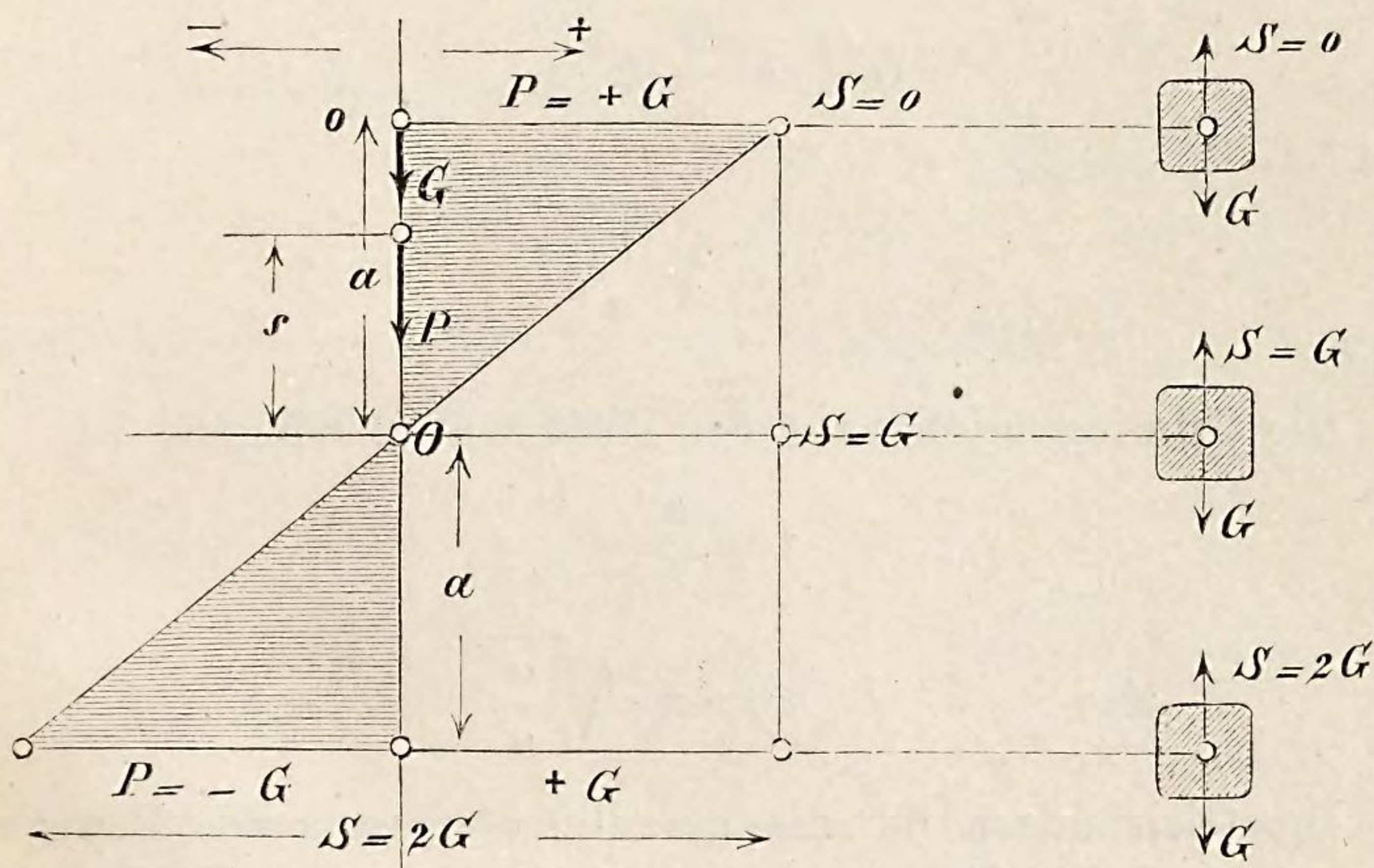


Fig. 144.

$P = G - S$, und beispielsweise für die Lagen

$$0 \quad P = G,$$

$$a \quad P = 0$$

und für $2a \quad P = -G.$

Hieraus geht aber hervor, dass die Kraft P über a , von Null an bis O , von $+G$ stetig bis auf Null abnimmt, während dieselbe von O bis $2a$ wieder von Null stetig auf $-G$ steigt; die entstehende Bewegung wird also eine geradlinig schwingende. O ist der Schwingungsmittelpunkt, a der grösste Ausschlag und für die Kraft P gilt

$$\frac{P}{G} = \frac{s}{a}$$

oder

$$P = G \cdot \frac{s}{a},$$

höchstens gleich G .

Es kann nun auch geschrieben werden (Seite 176)

$$P = m \cdot k^2 \cdot s = \frac{G}{g} \cdot k^2 \cdot s$$

und nach der Gleichsetzung der beiden Werthe für die Kraft

$$G \cdot \frac{s}{a} = \frac{G}{g} \cdot k^2 \cdot s,$$

woraus

$$k = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

folgt.

Die Schwingungsdauer t der einfachen Schwingung ist

$$t = \frac{\pi}{k},$$

also

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Die Gleichungen für die geradlinig schwingende Bewegung eines materiellen Punktes lassen sich auch ohne Zuhilfenahme der gleichförmigen Kreisbewegung finden, wenn nur bekannt ist,

dass die Anziehungskraft P dem Abstände s vom Anziehungscentrum O direct proportional ist.

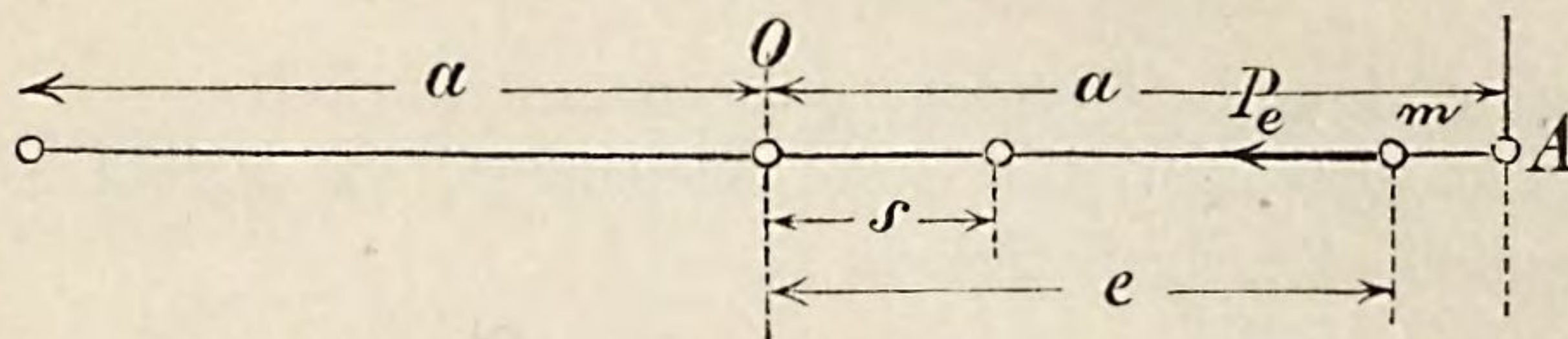


Fig. 145.

Ist P_e (Fig. 145) diejenige Anziehungskraft, welche einem gegebenen Abstände e von O entspricht, so gilt die Proportion

$$\frac{P}{P_e} = \frac{s}{e}$$

oder

$$P = \frac{P_e}{e} \cdot s.$$

Nun ist auch

$$P = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2},$$

folglich resultirt

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{P_e}{e} \cdot s,$$

woraus sich die Beschleunigung

$$p = \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{P_e}{m \cdot e} \cdot s$$

negativ ergibt, weil dieselbe nach O gerichtet ist.

Setzt man die constante Grösse

$$\frac{P_e}{m \cdot e} = k^2$$

resp. $k = \sqrt{\frac{P_e}{m \cdot e}},$

so ergibt sich, wie früher,

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - k^2 \cdot s.$$

Diese Differentialgleichung zweimal integrirt liefert die Weggleichung

$$s = A \cdot \sin kt + B \cdot \cos kt,$$

in welcher A und B Integrationsconstanten sind.

Differentiirt man die letzte Gleichung, so ergiebt sich die veränderliche Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt} = A \cdot k \cdot \cos kt - B \cdot k \cdot \sin kt.$$

Sind nun für die Zeit t gleich Null

$$s = s_0$$

und

$$v = v_0,$$

so ergeben sich durch Einsetzung dieser Werthe in die Weg- und Geschwindigkeits-Gleichungen die Integrationsconstanten zu

$$s_0 = 0 + B \quad \text{oder} \quad B = s_0,$$

$$v_0 = A \cdot k - 0 \quad \text{oder} \quad A = \frac{v_0}{k};$$

folglich wird

$$s = \frac{v_0}{k} \cdot \sin kt + s_0 \cdot \cos kt$$

und

$$v = v_0 \cdot \cos kt - s_0 \cdot k \cdot \sin kt.$$

1) Specieller Fall:

Beginnt die Bewegung im Punkte A , dann ist

$$s_0 = a \quad \text{und}$$

$$v_0 = 0$$

und es folgt

$$s = a \cdot \cos kt$$

und

$$v = -a \cdot k \cdot \sin kt$$

wie oben.

Die grösste Geschwindigkeit erhält man für $\frac{\pi}{2}$ und ungerade Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, also für $3\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{2}$ etc., für welche der Sinus seinen Maximalwerth erhält. Demnach ist

$$v_{max} = \pm a \cdot k$$

$$= \pm a \cdot \sqrt{\frac{P_e}{m \cdot e}},$$

und die diesen grössten Geschwindigkeiten zugehörigen Wege ergeben sich zu

$$s = 0,$$

welcher Werth dem Schwingungsmittelpunkt O entspricht.

Für die Zeit einer Hin- resp. Herschwingung wurde oben erhalten

$$t = \frac{\pi}{k},$$

und da hier
ist, so folgt

$$k = \sqrt{\frac{P_e}{m \cdot e}}$$

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot e}{P_e}}.$$

2) Specieller Fall:

Ist v_0 von Null und s_0 von a verschieden, dann rechnet man mit den allgemeinen Gleichungen zunächst diejenige Zeit t aus, für welche

$$v = 0$$

wird, also

$$v = \frac{ds}{dt} = 0, \text{ oder}$$

$$0 = v_0 \cdot \cos kt - s_0 \cdot k \cdot \sin kt,$$

also

$$\operatorname{tg} kt = \frac{v_0}{s_0 \cdot k},$$

woraus t bestimmt werden kann.

Sodann bestimmt man den grössten, also den der Geschwindigkeit $v = 0$ und $\operatorname{tg} kt = \frac{v_0}{s_0 \cdot k}$ zugehörigen Werth

$$s = a$$

und betrachtet hierauf den so bestimmten Endpunkt A , wie im ersten Falle, als Anfangspunkt der Bewegung, für welchen die

Gleichungen des ersten speciellen Falles — unter Einführung des ausgerechneten Werthes für a — gelten.

Freie elliptische Bewegung eines materiellen Punktes.

Ein materieller Punkt bewege sich unter dem Einfluss einer Kraft P , welche stets in der Richtung eines veränderlichen Radiusvector ϱ , also nach einem festen Punkte O hin liegt und dem Abstände von diesem Punkte direct proportional ist.

Analog dem vorigen Beispiel gilt hier, wenn die Kraft P_a im Abstände a gegeben ist,

$$P = \frac{P_a}{a} \cdot \varrho.$$

Zerlegt man P in die Richtung der X - und Y -Achse (Fig. 146), dann folgen die Componenten

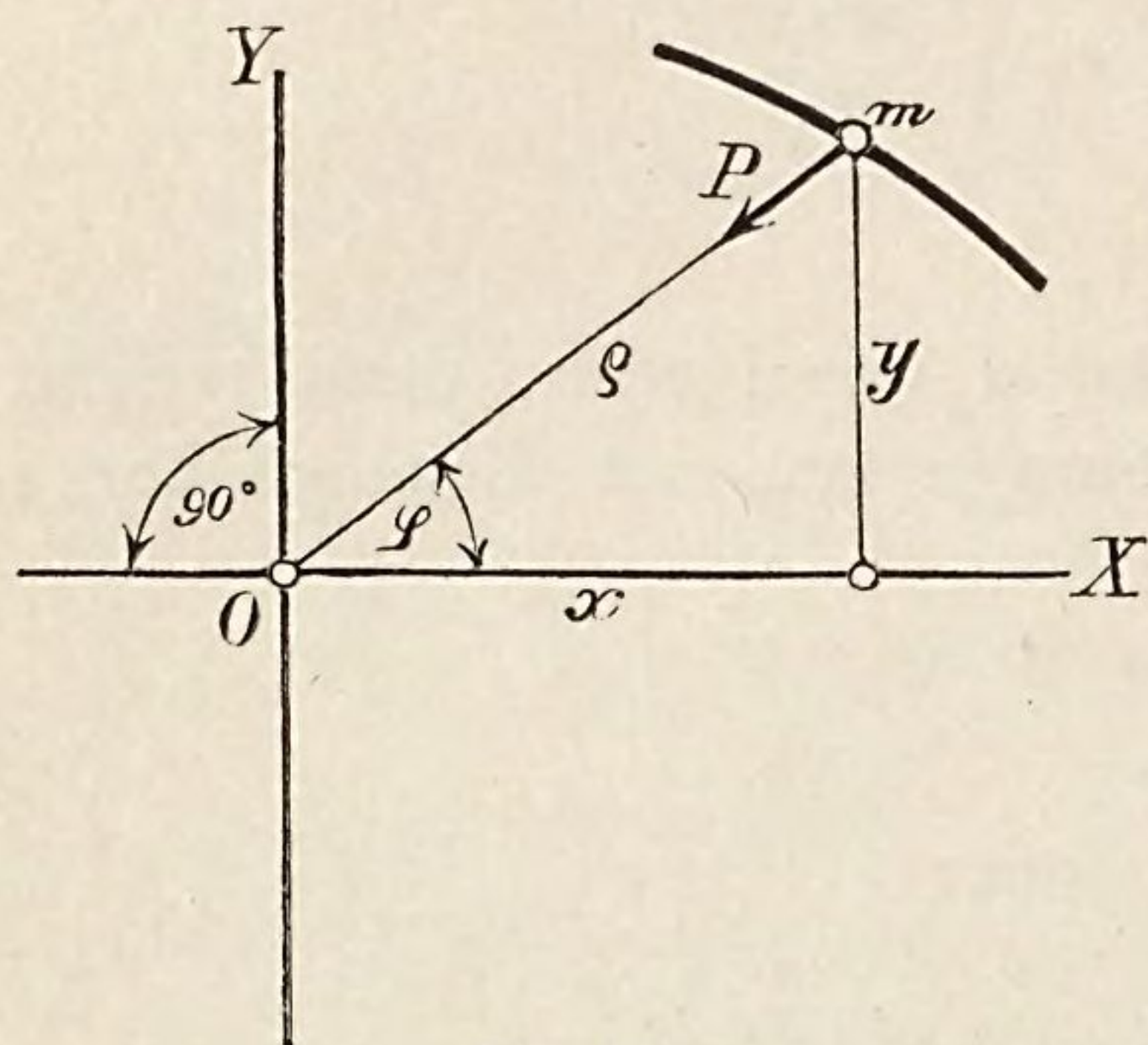


Fig. 146.

$$X = -P \cdot \cos \varphi,$$

$$Y = -P \cdot \sin \varphi$$

oder, da

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho}$$

$$\text{und} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\varrho},$$

$$X = -\frac{P_a}{a} \cdot x = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\text{und} \quad Y = -\frac{P_a}{a} \cdot y = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}.$$

Die von diesen Seitenkräften erzeugten Beschleunigungen sind, wenn man wieder

$$\sqrt{\frac{P_a}{m \cdot a}} = k$$

setzt,

$$p_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \cdot x$$

$$\text{und} \quad p_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 \cdot y,$$

wonach sich in den Achsen nach Ablauf der Zeit t die Wege ergeben

$$x = A \cdot \sin kt + B \cdot \cos kt,$$

$$y = C \cdot \sin kt + D \cdot \cos kt$$

und durch Differentiation die Geschwindigkeiten

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A \cdot k \cdot \cos kt - B \cdot k \cdot \sin kt$$

und $v_y = \frac{dy}{dt} = C \cdot k \cdot \cos kt - D \cdot k \cdot \sin kt.$

Aus diesen Resultaten geht hervor, dass die Seitenbewegungen in den Achsen schwingende Bewegungen mit dem Schwingungsmittelpunkt O sind.

Bestimmung der Integrationsconstanten A, B, C, D :

Für $t = 0$, also für den Anfangspunkt der Bewegung mögen x_0 und y_0 die Coordinaten und w_x und w_y die Componenten der Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein, dann folgt aus den obigen Gleichungen nach Einsetzung der Werthe

$$x_0 = 0 + B; \quad B = x_0;$$

$$y_0 = 0 + D; \quad D = y_0;$$

$$w_x = A \cdot k - 0; \quad A = \frac{w_x}{k};$$

$$w_y = C \cdot k - 0; \quad C = \frac{w_y}{k};$$

diese Constanten in die Hauptgleichungen eingesetzt, erhalten letztere folgende Formen

$$x = \frac{w_x}{k} \cdot \sin kt + x_0 \cdot \cos kt,$$

$$y = \frac{w_y}{k} \cdot \sin kt + y_0 \cdot \cos kt,$$

$$v_x = w_x \cdot \cos kt - x_0 \cdot k \cdot \sin kt,$$

$$v_y = w_y \cdot \cos kt - y_0 \cdot k \cdot \sin kt.$$

Spezieller Fall: Die Bewegung beginne in dem in der X -Achse gelegenen Punkte A (Fig. 147) mit einer zur Y -Achse parallel gerichteten Geschwindigkeit v ; dann ist

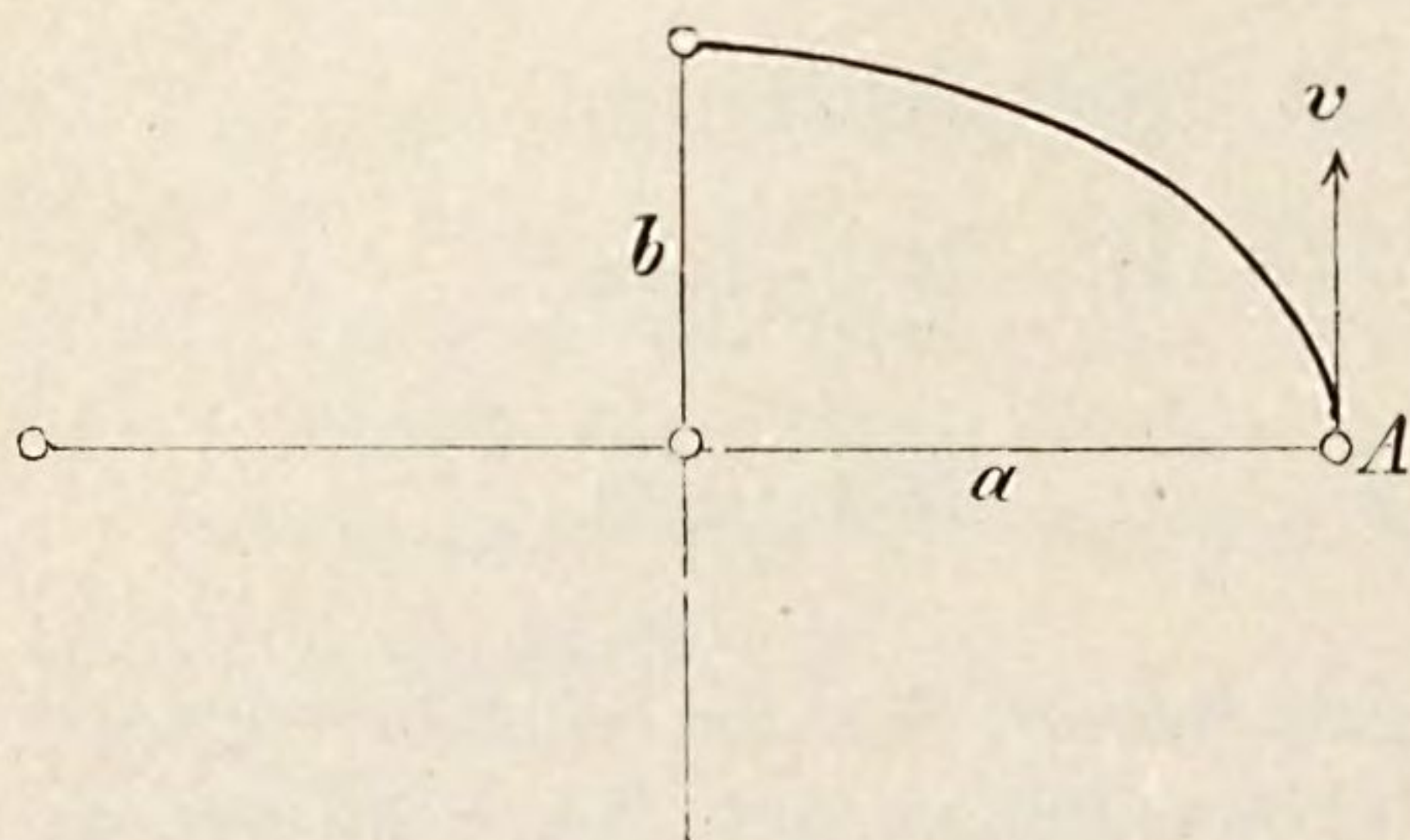


Fig. 147.

$$y_0 = 0; \quad w_y = v,$$

$$x_0 = a; \quad w_x = 0$$

und aus den letzten allgemeinen Werthen folgt

$$x = a \cdot \cos kt,$$

$$y = b \cdot \sin kt,$$

$$v_x = -a \cdot k \cdot \sin kt,$$

$$v_y = +b \cdot k \cdot \sin kt,$$

sofern $\frac{v}{k} = b$ und $v = k \cdot b$ ist.

Aus den ersten Gleichungen folgt

$$\frac{x}{a} = \cos kt$$

und $\frac{y}{b} = \sin kt$

und durch Quadriren und Addiren derselben

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

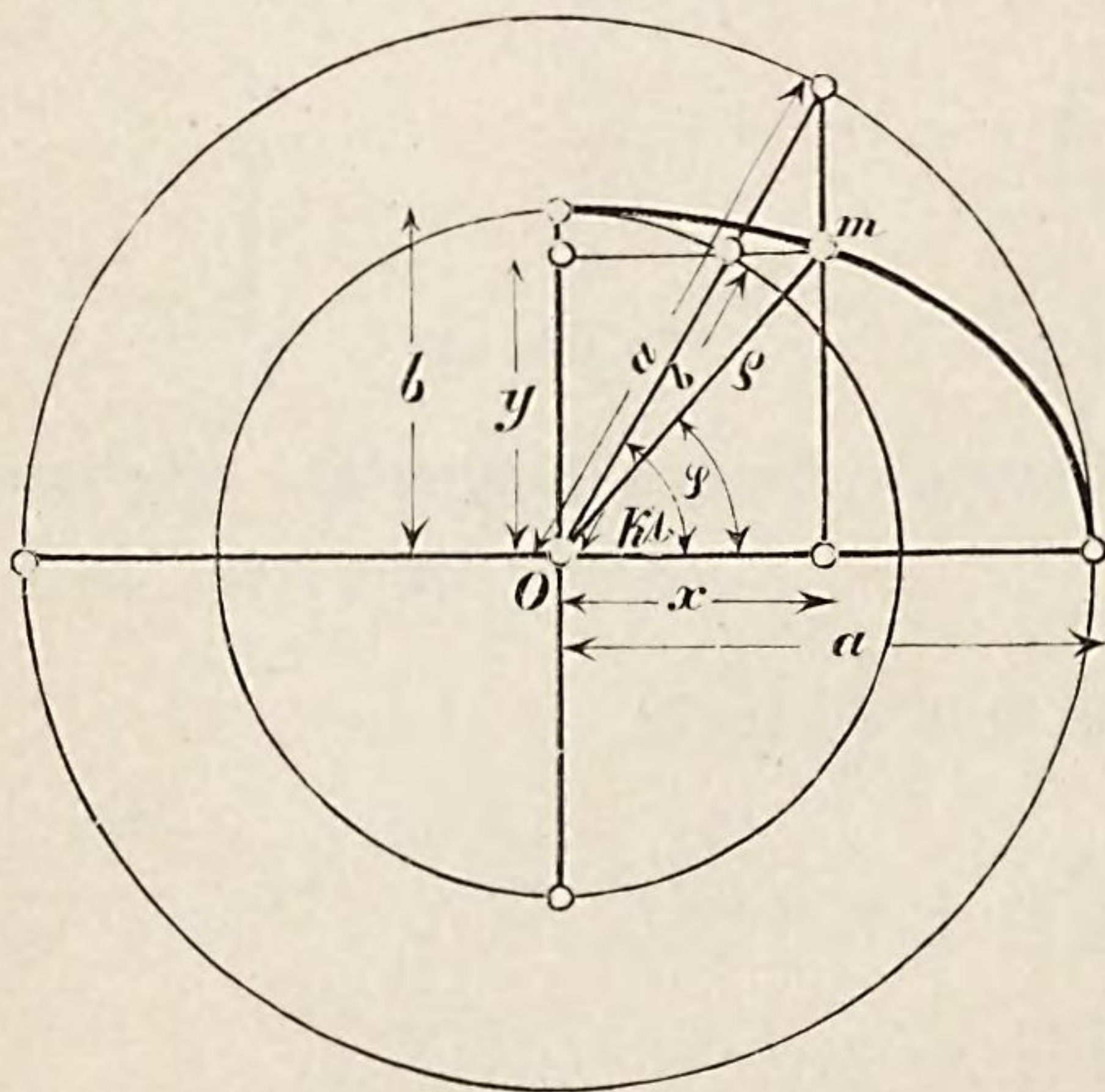


Fig. 148.

die Gleichung einer Ellipse, deren grosse Achse a , deren kleine b und deren Mittelpunkt der Punkt O ist (Fig. 148).

Zur Construction dienen die Gleichungen

$$x = a \cdot \cos kt,$$

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

oder

$$a \cdot \cos kt = \varrho \cdot \cos \varphi$$

und analog

$$b \cdot \sin kt = \varrho \cdot \sin \varphi.$$

Ferner ist nach Figur

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

also
$$\varrho = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 kt + b^2 \cdot \sin^2 kt}.$$

Setzt man hierin $kt = 0$, so folgt $\varrho = a$,

$$kt = \frac{\pi}{2}, \text{ so folgt } \varrho = b$$

etc.

Die Richtung des Radiusvector ϱ , also auch die Richtung der Kraft P zur Zeit t bestimmt sich durch

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{b \cdot \sin kt}{a \cdot \cos kt} = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} kt. \end{aligned}$$

Da die Kraft stets in der Richtung des Radiusvector ϱ liegt, also durch O läuft, ist die Bewegung eine Centralbewegung und gilt das Princip der Flächen.

Es ist

$$P = m \cdot k^2 \cdot \varrho \text{ und der Hebelarm der Kraft } l = 0,$$

also
$$P \cdot l = \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = 0 \text{ (siehe Flächengeschwindigkeit)}$$

oder
$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \frac{df}{dt} \text{ constant,}$$

$$\int \varrho^2 \cdot d\varphi = C \cdot t$$

oder auch
$$2 \cdot \int df = C \cdot t$$

und
$$f = \frac{C \cdot t}{2} = C_1 \cdot t,$$

d. i. die in der Zeit t von dem veränderlichen Radiusvector ϱ wirklich beschriebene Fläche, und, wie ersichtlich, ist dieselbe der Zeit t direct proportional.

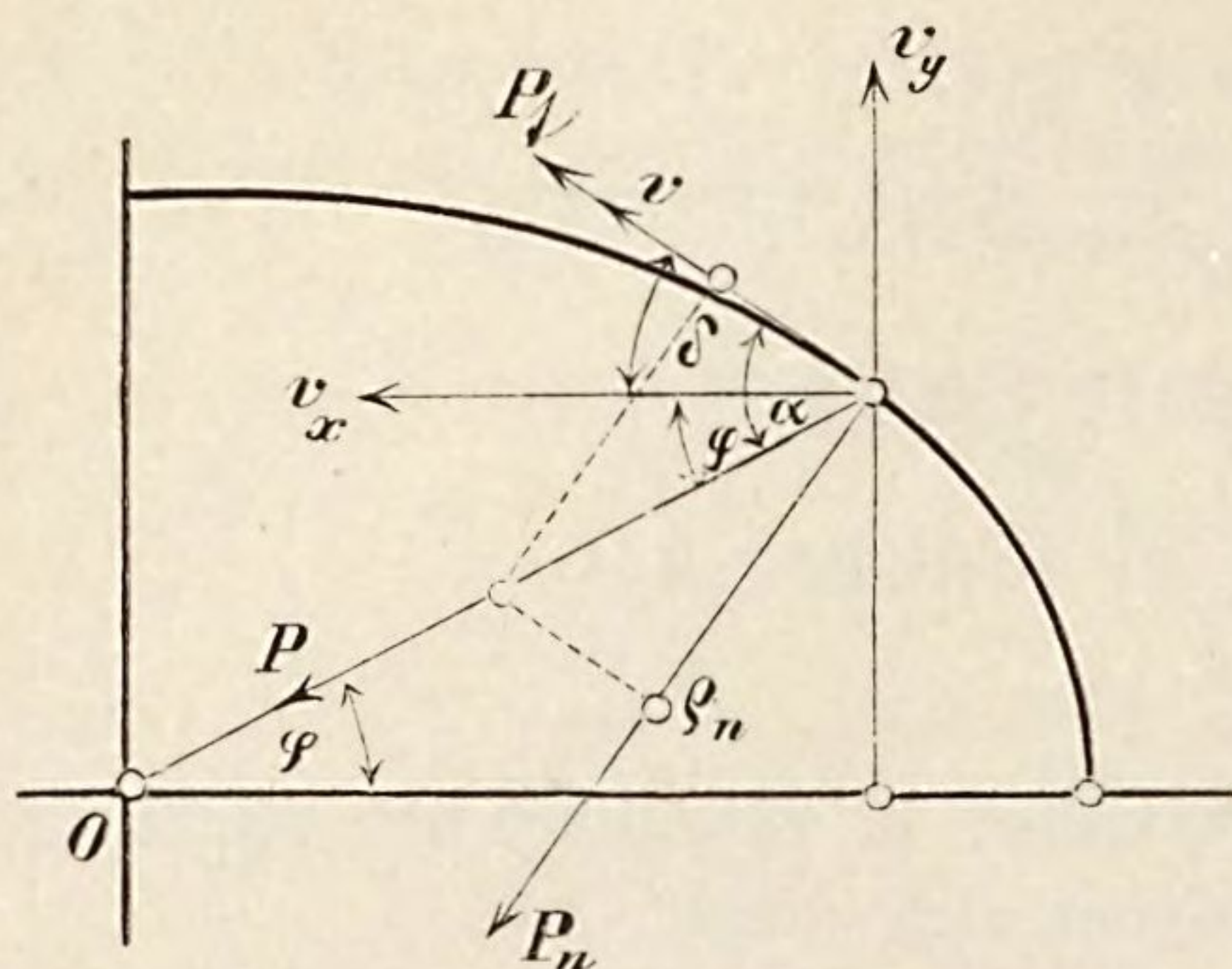


Fig. 149.

Nun ist ferner die Tangentialgeschwindigkeit v nach der Zeit t (Fig. 149)

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

und ihre Richtung zur X-Achse

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v_y}{v_x}.$$

Die Richtung der Kraft P resp. des Radiusvector q zur Tangente ist nach Figur

$$\alpha = (\delta + \varphi),$$

folglich sind die Tangential- und Normalcomponenten von P

$$P_t = P \cdot \cos \alpha = P \cdot \cos(\delta + \varphi)$$

und $P_n = P \cdot \sin \alpha = P \cdot \sin(\delta + \varphi).$

Nach stattgefundener Ermittlung von v und P_n lässt sich dann noch aus

$$P_n = \frac{m \cdot v^2}{\varrho_n}$$

der Krümmungshalbmesser der Ellipse zur Zeit t berechnen durch

$$\varrho_n = \frac{m \cdot v^2}{P_n}.$$

Freie Bewegung eines materiellen Punktes m unter der Einwirkung einer dem umgekehrten Quadrate des Abstandes q von einem festen Punkte O proportionalen Anziehungskraft P .

Bildet die X - und Y -Achse (Fig. 150) ein rechtwinkeliges Achsensystem in der Bildebene mit dem Koordinatenanfang O , und zerlegt man die Kraft P , welche stets in der Richtung des veränderlichen Radiusvector q liegt, parallel zur X - und Y -Achse, so folgt

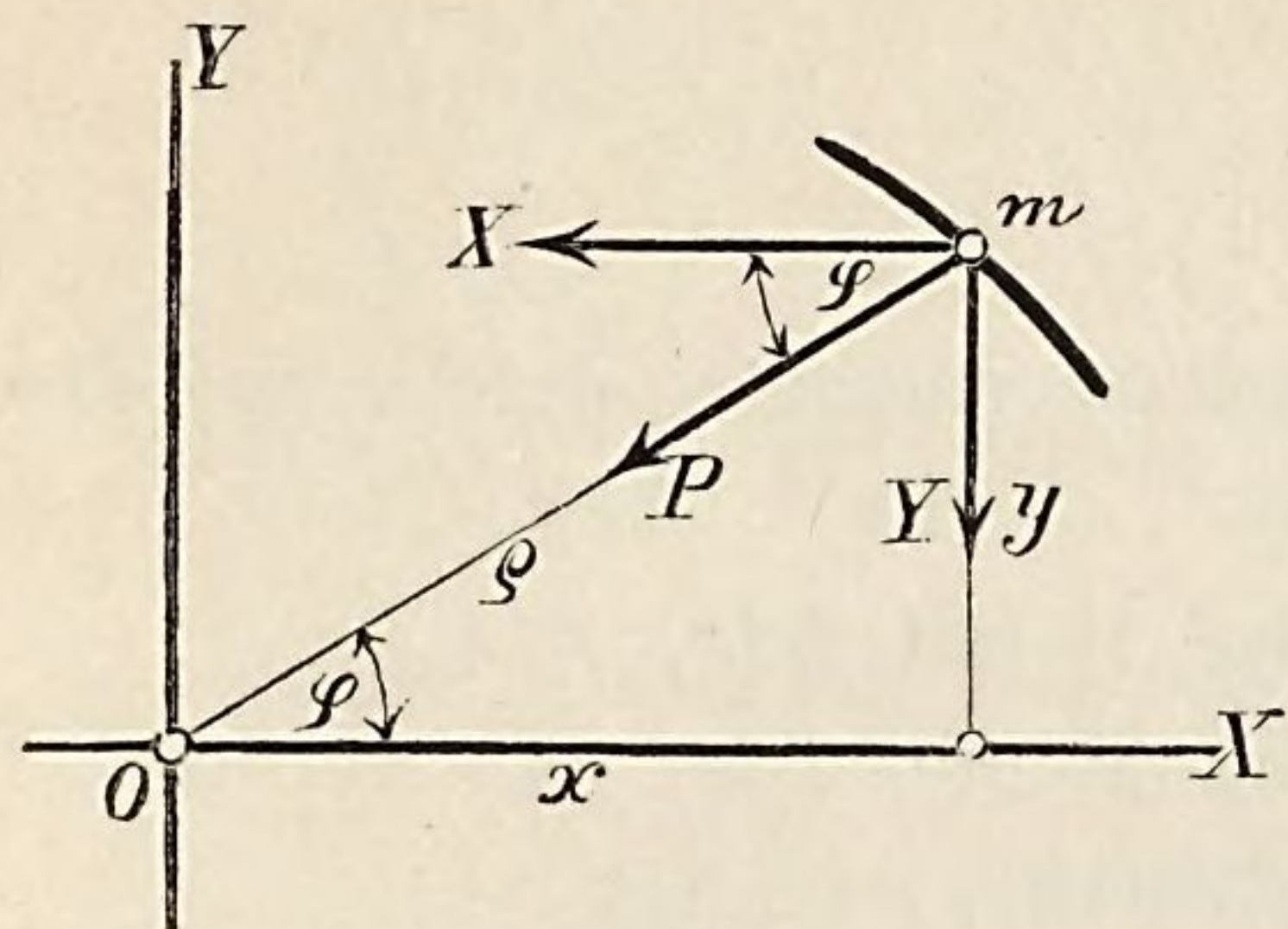


Fig. 150.

$$X = - P \cdot \cos \varphi,$$

$$Y = - P \cdot \sin \varphi.$$

Ist nun die Kraft P_e gegeben, welche dem ebenfalls gegebenen Radiusvector e entspricht, dann gilt für die Kraft P in der Entfernung ϱ :

$$P : P_e = e^2 : \varrho^2$$

$$\text{oder} \quad P = \frac{P_e \cdot e^2}{\varrho^2}.$$

Ferner ist

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\varrho},$$

also auch

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = - P_e \cdot \frac{e^2}{\varrho^2} \cdot \frac{x}{\varrho}$$

$$\text{oder} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{P_e \cdot e^2}{m} \cdot \frac{x}{\varrho^3},$$

$$\text{und analog} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{P_e \cdot e^2}{m} \cdot \frac{y}{\varrho^3},$$

welche Gleichungen geschrieben werden können, wenn

$$\frac{P_e \cdot e^2}{m} = k \text{ gesetzt wird:}$$

$$1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{k \cdot x}{\varrho^3} \text{ und}$$

$$2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{k \cdot y}{\varrho^3}.$$

Die erste Gleichung mit y , die letzte mit x multiplicirt und die erste von der letzten Gleichung subtrahirt, ergibt

$$3) \quad x \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

welcher Werth integrirt

$$4) \quad x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} = A$$

liefert. Hierin ist A eine Integrationsconstante, welche aus den Anfangswerthen zu bestimmen ist.

Multiplieirt man die Gleichung 1) mit $2dx$,
die Gleichung 2) mit $2dy$,
und addirt die sich ergebenden Werthe, so folgt

$$5) \quad 2dx \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2dy \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2k}{\varrho^3} \cdot (x \cdot dx + y \cdot dy).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Differentialquotient des Geschwindigkeitsquadrates

$$6) \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

und der Klammerwerth auf der rechten Seite ist aus Folgendem zu deuten:

Es ist

$$7) \quad \varrho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\text{also} \quad \varrho \cdot d\varrho = x \cdot dx + y \cdot dy.$$

Nach entsprechender Einsetzung ergibt sich

$$8) \quad d(v^2) = -2k \cdot \frac{d\varrho}{\varrho^2}$$

und integrirt

$$9) \quad v^2 + B = \frac{2k}{\varrho},$$

in welcher Gleichung B wieder eine aus den Anfangswerthen zu bestimmende Integrationsconstante ist.

Nun gilt

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

und

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi,$$

welche Werthe in die Gleichungen 4) und 9) eingesetzt folgende Formen liefern:

$$10) \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C$$

und

$$11) \left(\varrho \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2k}{\varrho} - B.$$

Aus der Gleichung 10) folgt das Differential der Zeit

$$dt = \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{C},$$

welches in die Gleichung 11) eingesetzt

$$12) d\varphi = \frac{C \cdot d\varrho}{\varrho \cdot \sqrt{2k \cdot \varrho - C^2 - k \cdot \varrho^2}}$$

ergiebt.

Durch Integration dieses Werthes folgt

$$13) \varphi = \arccos \left(\frac{\frac{C^2}{\varrho} - k}{\sqrt{k^2 - C^2}} \right) + \alpha$$

und

$$14) \varrho = \frac{\frac{C^2}{k}}{1 + \sqrt{1 - B \cdot \frac{C^2}{k^2} \cdot \cos(\varphi - \alpha)}},$$

worin α eine aus gegebenen Anfangswerthen zu bestimmende Constante bedeutet.

Diese Gleichung für ϱ kann übergehen in die Polargleichung einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel.

Die Polargleichung der

„Ellipse“

ist

$$15) \varrho = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi},$$

wenn der Brennpunkt O Pol und die Richtung OA (Fig. 151) der grossen Achse Anfangsrichtung von ϱ und a die halbe grosse Achse ist.

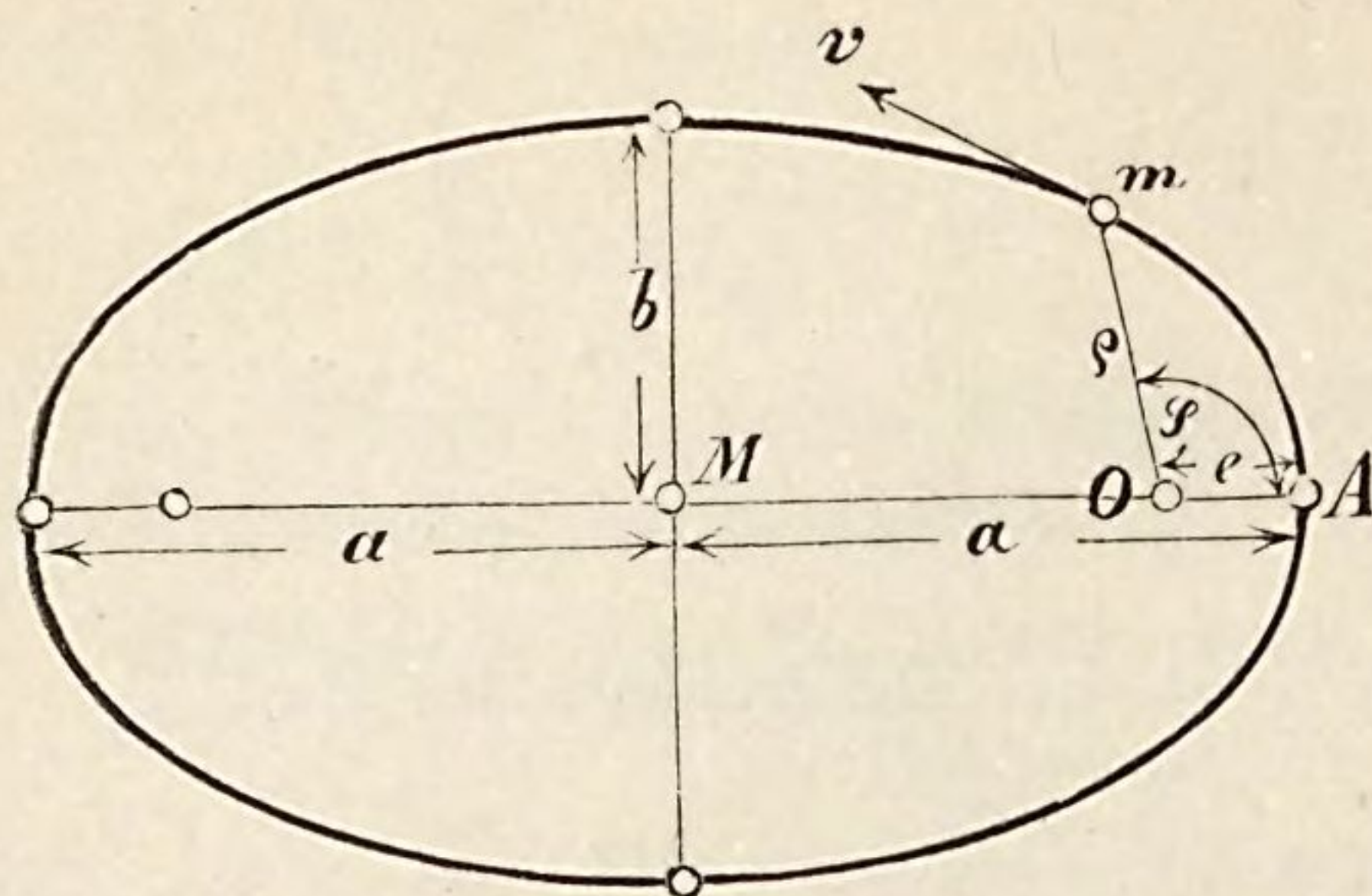


Fig. 151.

$$\varepsilon = \frac{MO}{MA}$$

ist das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Achse, also ε stets kleiner als Eins.

Soll nun die Gleichung 14) in Gleichung 15) übergehen, dann müssen die Bedingungen

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{1 - B \cdot \frac{C^2}{k^2}} = \varepsilon, \quad \text{und} \quad \frac{k}{B} = a$$

erfüllt sein.

$\alpha = 0$ wird nach der Wahl der Anomalie φ erreicht, bei welcher die Bewegung beginnen soll.

Da nun $\varepsilon < 1$, muss nothwendigerweise

$$\sqrt{1 - B \cdot \frac{C^2}{k^2}} < 1 \text{ sein,}$$

woraus weiter folgt

$$B > 0.$$

Aus 9) aber ist

$$B = \frac{2k}{\varrho} - v^2$$

oder auch

$$= \frac{2k}{\varrho_0} - c^2,$$

wenn ϱ_0 und c Anfangswerthe, also zur Zeit

$$t = 0$$

sind.

Die Bedingung für die Ellipsenbahn kann man daher auch schreiben

$$\frac{2k}{\varrho_0} - c^2 > 0$$

oder

$$c < \sqrt{\frac{2k}{\varrho_0}}.$$

Die Polargleichung der
„Hyperbel“

heisst

$$16) \varrho = \frac{a \cdot (\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi},$$

wenn (Fig. 152) a wieder halbe Hauptachse, $\varepsilon = \frac{MO}{MA} > 1$, der Brennpunkt O Pol und die Hauptachse Anfangsrichtung von ϱ ist.

Aus Gleichung 14) erhält man diesen Werth, wenn

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{1 - B \cdot \frac{C^2}{k^2}} = \varepsilon \quad \text{und} \quad -\frac{k}{B} = a$$

ist oder wenn

$$\sqrt{1 - B \cdot \frac{C^2}{k^2}} > 1,$$

d. h. $B < 0$

oder die Anfangsgeschwindigkeit

$$c > \sqrt{\frac{2k}{\varrho_0}}.$$

Die Polargleichung der
„Parabel“

endlich heisst

$$17) \varrho = \frac{\frac{p}{2}}{1 + \cos \varphi},$$

wenn der Brennpunkt O Pol, die Achse Anfangsrichtung für ϱ und p der Parameter ist (Fig. 153).

Diese Gleichung erhält man aus Gleichung 14), wenn

$$B = 0$$

$$\text{und} \quad \varepsilon = 1$$

wird.

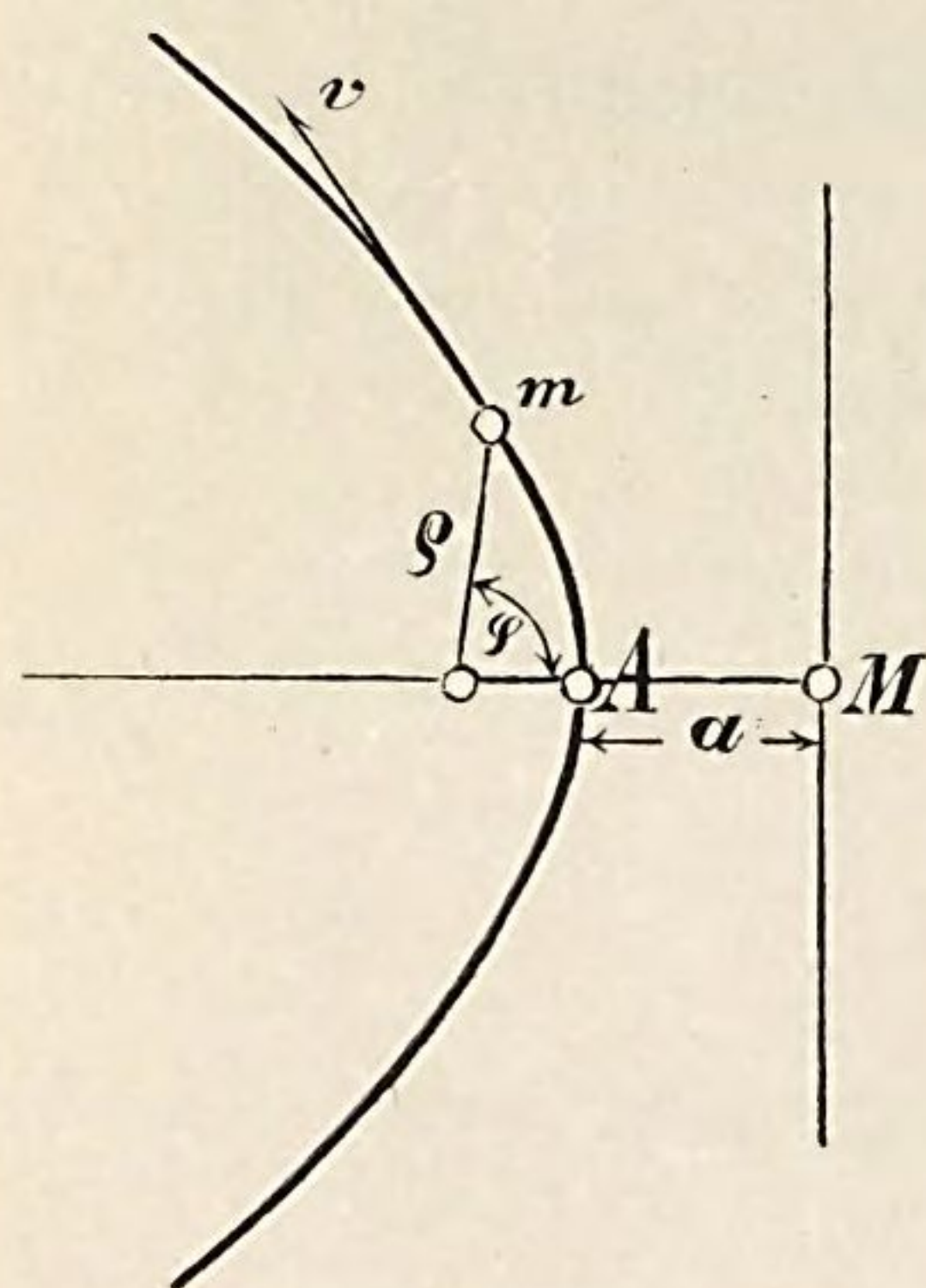


Fig. 152.

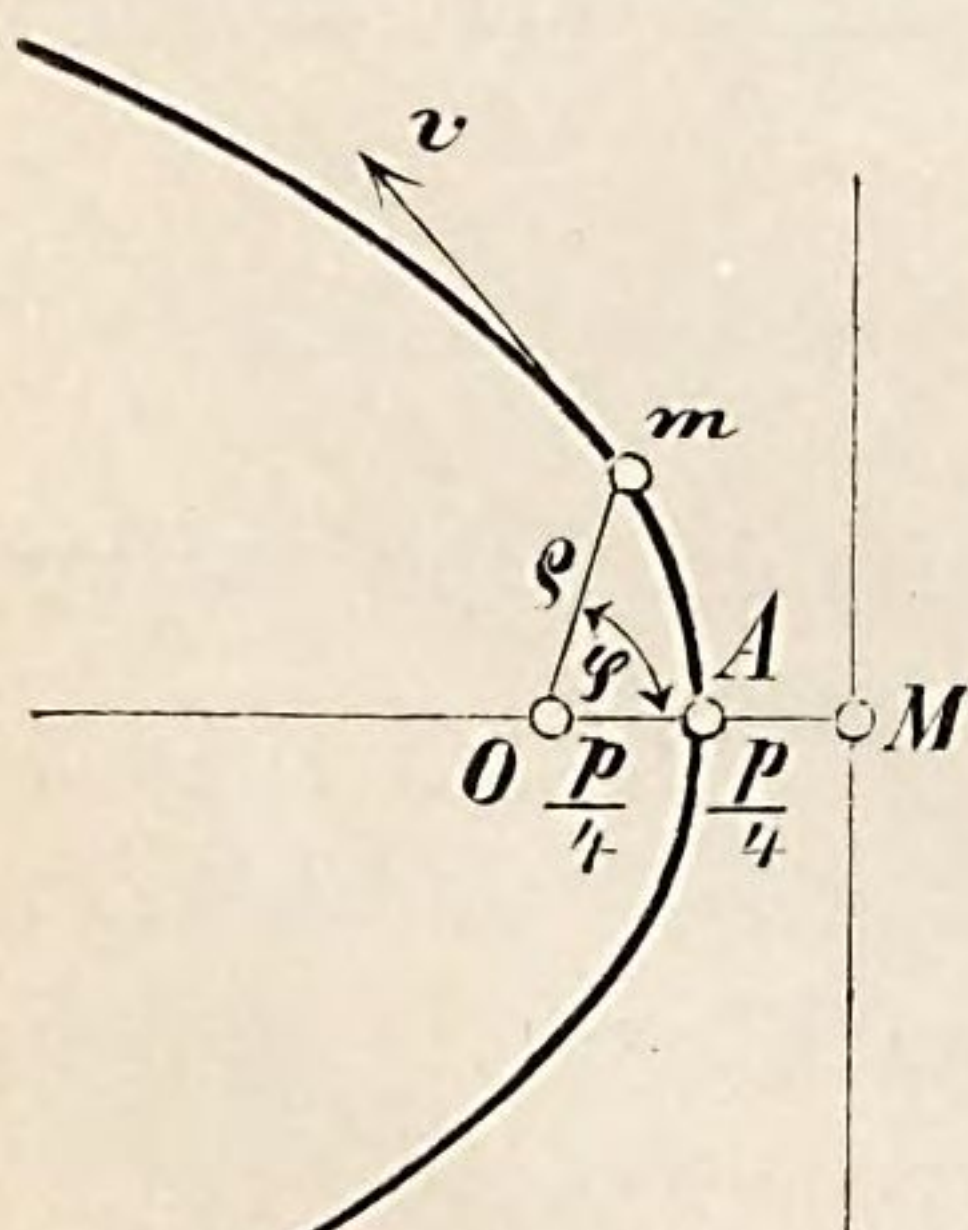


Fig. 153.

Vergleicht man die Parabel mit der Ellipse, so ist für erstere

$$a = \infty$$

und für letztere mit Bezug auf Fig. 151

$$\varepsilon = \frac{a - e}{a} = 1 - \frac{e}{a},$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{2e}{a} + \frac{e^2}{a^2},$$

$$a \cdot (1 - \varepsilon^2) = 2e \cdot \left(1 - \frac{e}{2a}\right).$$

Unter Einsetzung des obigen Werthes für a ergibt sich

$$\infty \cdot 0 = 2e,$$

und hiermit aus Gleichung 15) der Ellipse auch

$$q = \frac{\frac{0}{0}}{1 + \cos \varphi} = \frac{2e}{1 + \cos \varphi}.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$2e = \frac{p}{2},$$

so folgt wie oben für die Parabel

$$q = \frac{\frac{p}{2}}{1 + \cos \varphi}.$$

Den vorstehenden Bedingungen entspricht die Anfangsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{2k}{q_0}},$$

und es ist nunmehr ersichtlich, dass die Form der Bahn nur von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit c abhängt.

Ist

$$18) \quad c < \sqrt{\frac{2k}{q_0}}, \text{ so wird die Bahn eine Ellipse,}$$

$$\text{ist } 19) \quad c = \sqrt{\frac{2k}{q_0}}, \text{ so wird die Bahn eine Parabel,}$$

und ist

$$20) \quad c > \sqrt{\frac{2k}{\varrho_0}}, \text{ so wird die Bahn eine Hyperbel.}$$

Es sei die Bahn eine Ellipse, also $c < \sqrt{\frac{2k}{\varrho_0}}$, und eine Gleichung für diejenige Zeit t aufzustellen, während welcher sich ein Punkt in der Bahn bewegt.

Es galt die Gleichung 10)

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C$$

und in Gleichung 12) wurde ein Ausdruck für $d\varphi$ gefunden; diesen in Gleichung 10) eingesetzt, folgt

$$21) \quad dt = \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{2 \cdot k \cdot \varrho - B^2 - C^2}}.$$

In dieser Gleichung sollen die Constanten B und C durch die Constanten ε und a ausgedrückt werden. Es galt

$$B = \frac{k}{a}$$

und aus der Gleichung für ε ist

$$C^2 = a \cdot k \cdot (1 - \varepsilon^2);$$

eingesetzt, folgt

$$dt = \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot \frac{\varrho \cdot d\varrho}{\sqrt{a^2 \cdot \varepsilon^2 - (a - \varrho^2)}}.$$

Setzt man nun

$$\frac{a - \varrho}{a - \varepsilon} = \cos \gamma$$

— was zulässig, da dieses Verhältniss eine veränderliche Grösse ist, welche zwischen den Grenzwerten $+1$ und -1 variirt —, so folgt

$$\varrho = a \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos \gamma)$$

und

$$d\varrho = a \cdot \varepsilon \cdot \sin \gamma \cdot d\gamma.$$

Diese Werthe in die Gleichung für dt eingesetzt, folgt

$$dt = a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos \gamma) \cdot d\gamma$$

und nach der Integration ergibt sich die Zeit

$$t = a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot (\gamma - \varepsilon \cdot \sin \gamma) + D,$$

in welcher Gleichung die Constante D aus dem Anfangswerthe für ϱ zu bestimmen ist.

Bestimmung der Constanten D :

Für $\gamma = 0$ wird

$$\cos \gamma = +1$$

und

$$\varrho = a \cdot (1 - \varepsilon);$$

für $\gamma = \pi$

$$\cos \gamma = -1;$$

$$\varrho = a \cdot (1 + \varepsilon).$$

Setzt man nun den anfänglichen Radiusvector

$$\varrho_0 = a \cdot (1 - \varepsilon),$$

so wird, da für denselben $t = 0$ und $\gamma = 0$ ist, die Constante $D = 0$, und es folgt schliesslich

$$22) \quad t = a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot (\gamma - \varepsilon \cdot \sin \gamma).$$

Specielle Fälle.

1) Bestimmung von t_1 , der Zeit der Durchlaufung der halben Ellipse.

Hierfür ist

$$\gamma = \pi$$

$$\text{und} \quad t_1 = a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot \pi.$$

2) Bestimmung der Zeit T eines ganzen Umlaufes.

$$T = 2t_1 = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot \pi.$$

Läuft ein anderer materieller Punkt um dasselbe Anziehungscentrum O in einer Ellipse, deren halbe grosse Achse a_1 ist, so ist dessen Umlaufszeit analog

$$T_1 = 2 \cdot a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{k}} \cdot \pi,$$

aus welchen beiden Zeitgleichungen sich durch Quadriren und Dividiren ergibt

$$23) \frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a_1^3}{a^3},$$

d. h.:

„Es verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der halben grossen Achsen der Bahnen (drittes Keplersches Weltgesetz).“

Da die Kraft stets durch das Anziehungscentrum, den Brennpunkt O , läuft, ist die Bewegung eine Centralbewegung und werden deshalb vom veränderlichen Radiusvector ρ in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschrieben. Nun ist die ganze Ellipsenfläche, welche in der Umlaufszeit vom Radiusvector beschrieben wird,

$$F = \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

folglich gilt nach dem Princip der Flächen

$$2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = C \cdot T,$$

und da

$$C = \sqrt{a \cdot k \cdot (1 - \varepsilon^2)}$$

ist, folgt

$$T = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a}{k}} \cdot \pi.$$

wie oben.

Bestimmung der Kraft P , welche die Planetenbahnen bedingt.

Aus den vorhandenen Beobachtungen der Planetenbewegungen hat Kepler die Gesetze bestimmt, nach welchen diese Bewegungen erfolgen.

Diese Gesetze sind folgende:

1) Die Planeten beschreiben ebene Curven, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Sonne gehen, und die von den Planeten nach dem Mittelpunkte der Sonne gezogenen Vektoren beschreiben Flächen, welche für denselben Planeten der Zeit proportional sind.

2) Die Planetenbahnen sind Ellipsen, deren einer Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen ihrer Bahnen.

Aus diesen Gesetzen soll die Kraft bestimmt werden, welche je einen Planeten bewegt.

Das erste Gesetz zeigt unmittelbar, dass die Bewegung eines Planeten um den Sonnenmittelpunkt eine Centralbewegung ist, dass also die bewegende Kraft für jeden Planeten nach dem Sonnenmittelpunkt gerichtet ist.

Die Gleichung der Bahn ist in Polarcoordinaten ϱ und φ , welche vom Sonnenmittelpunkte ausgehen,

$$\varrho = \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi}.$$

Die bewegende Kraft liegt in der Richtung von ϱ , wie oben gezeigt wurde. Demnach muss diese, wenn m die Masse des Planeten ist, berechnet werden nach

$$P = P_{\varrho} = m \cdot \left\{ \frac{d^2 \varrho}{dt^2} - \varrho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\},$$

(Siehe Anhang zur Flächengeschwindigkeit)

denn es wird hier

$$P_{\varphi} = 0$$

und

$$P_s = 0;$$

und ausserdem gilt — da die Bewegung eine Centralbewegung ist — das Princip der Flächen, also

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = C.$$

Aus letzterem Werthe folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\varrho^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung für ϱ wird

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= \frac{a \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cdot \cos \varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{oder} \\ &= \frac{\varrho^2 \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)} \cdot \frac{C}{\varrho^2} \\ &= \frac{C \cdot \varepsilon}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)} \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varrho}{dt^2} &= \frac{C \cdot \varepsilon}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)} \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{C^2 \varepsilon \cdot \cos \varphi}{a \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \varrho^2}. \end{aligned}$$

Setzt man diesen Werth und ausserdem auch

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\varrho^2}$$

in die Gleichung für P_ρ ein, so folgt

$$P_\rho = m \cdot \left\{ \frac{C^2 \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi}{a \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \varrho^2} - \frac{C^2}{\varrho^3} \right\}$$

oder
$$P_\rho = P = - m \cdot \frac{C^2}{a \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \varrho^2}.$$

Nun galt

$$C^2 = a \cdot k \cdot (1 - \varepsilon^2),$$

also
$$k = \frac{C^2}{a \cdot (1 - \varepsilon^2)},$$

folglich ist die Kraft

$$P = - \frac{m \cdot k}{\varrho^2}.$$

Diese Kraft ist also umgekehrt proportional dem Quadrate der jeweiligen Entfernung des Planeten von der Sonne und

ausserdem negativ, d. h. vom Planeten nach der Sonne hin gerichtet, also eine Anziehungskraft der letzteren.

Nun erhielten wir oben für die Umlaufszeit T in der Ellipse

$$2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = C \cdot T,$$

$$\text{also} \quad 1 - \varepsilon^2 = \frac{C^2 \cdot T^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot a^4},$$

und diesen Werth in die letzte Gleichung für k eingeführt, folgt

$$k = 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2},$$

welcher Ausdruck also nach dem dritten Keplerschen Weltgesetz für alle Planeten dieselbe Grösse hat.

Trotzdem Kepler die drei Weltgesetze aufgestellt hat, hat er niemals das wahre Attractionsgesetz, nach welchem sich je zwei Körper anziehen, selbst gefunden. Erst später hat Newton aus der Beobachtung der Mondbewegung und der Vergleichung derselben mit freifallenden Körpern an der Erdoberfläche das Gravitations- oder Attractionsgesetz bestimmt: Die Sonne zieht nicht nur die Planeten an, sondern diese auch die Sonne, und so ebenfalls die Erde den Mond und umgekehrt der Mond die Erde etc. Die Anziehung zweier Körper ist überhaupt stets gegenseitig und von je einem Körper auf den anderen gleich gross, sie wächst im Verhältniss der Massen und nimmt ab im Verhältniss der Quadrate der Entfernung. Wenn also die Masse 1 von der Masse 1 in der Entfernung 1 mit der Kraft k angezogen wird, so wird die Masse 1 von der Masse M in der Entfernung 1 mit der Kraft $k \cdot M$ und in der Entfernung ϱ mit der Kraft

$$\frac{k \cdot M}{\varrho^2}$$

angezogen.

Eben so gross ist die Anziehung der Masse 1 gegen die Masse M , denn die Masse 1 zieht jede Einheit der Masse M so stark an, als die Masse 1 von jeder solchen Einheit der Masse M angezogen wird. Die Anziehung von m Einheiten auf M Einheiten ist daher m mal so gross, als die Anziehung von der Masse 1 auf die Masse M ; folglich ist die

gegenseitige Anziehung der Massen M und m in der Entfernung ϱ

$$P = \frac{k \cdot M \cdot m}{\varrho^2}.$$

Nach diesem Gesetz ist auch die Annäherung der Körper eine gegenseitige, da aber dieselbe Kraft verschiedenen Massen verschiedene Beschleunigungen ertheilt und zwar der Masse m die Beschleunigung

$$p_m = \frac{P}{m}$$

und der Masse M die Beschleunigung

$$p_M = \frac{P}{M},$$

so findet die Bewegung im umgekehrten Verhältniss der Massen statt.

Durch das Newtonsche Attractionsgesetz werden alle kleinen Abweichungen von den Keplerschen Gesetzen in dem Laufe der Planeten, die Ebbe und Fluth etc. auf das Vollkommenste erklärt.

Setzt man in

$$P = \frac{k \cdot M \cdot m}{\varrho^2}$$

$$1) \varrho = \infty, \text{ so folgt } P = 0,$$

$$2) \varrho = 0, \text{ so folgt } P = \infty.$$

Dieses Resultat könnte zu der Ansicht führen, dass das Gesetz hier nicht mehr gilt. Zwei Körper können jedoch nie gleichzeitig denselben Raum einnehmen, die Massentheile bleiben in Wirklichkeit stets in endlicher Entfernung und die Kraft P ist daher stets kleiner als unendlich.

3) Ändert sich ϱ nur sehr wenig, wie beispielsweise bei einem steigenden oder fallenden Körper an der Erdoberfläche, so darf $\varrho = r$, gleich dem Erdradius, und $P = G = \frac{k \cdot M \cdot m}{r^2}$ als constant angesehen werden.

Der freie Fall einer schweren Masse m ohne Widerstand aus geringer Höhe.

Die bewegende Kraft ist das Gewicht der Masse m . Die Kraft ist vertical abwärts gerichtet und lautet

$$G = m \cdot g = \frac{M \cdot m \cdot k}{r^2},$$

sofern M die Masse der Erde, m die Masse des Körpers und r den Erdradius bedeutet. Aus dieser Gleichung ist

$$g = \frac{M \cdot k}{r^2} \text{ constant}$$

$$(\text{streng } g = \frac{M \cdot k}{Q^2} \text{ veränderlich}).$$

Geht die Masse m zur Zeit $t = 0$ von der Ruhe aus, so bewegt sie sich vertical abwärts, in welcher Richtung der zur Zeit t erreichte Abstand h von dem Ausgangspunkte der Masse zu messen ist. v sei die Geschwindigkeit der Masse nach Ablauf der Zeit t . Da die Kraft $G = m \cdot g$ als constant angesehen wird, heisst der Satz vom Antriebe

$$G \cdot t = m \cdot v - m \cdot c$$

und da $c = 0$ ist,

$$m \cdot g \cdot t = m \cdot v$$

$$\text{oder} \quad v = g \cdot t,$$

woraus sich — wie schon früher — ergibt, dass die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte mit der Beschleunigung g , unabhängig von der Grösse der Masse m ist.

Das Princip der lebendigen Kraft heisst mit Rücksicht auf den vorliegenden Fall

$$G \cdot h = m \cdot \left(\frac{v^2 - c^2}{2} \right)$$

und, da $c = 0$ ist,

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

oder

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h};$$

die Geschwindigkeit ist also der Quadratwurzel aus der Fallhöhe proportional.

Setzt man die beiden Gleichungen für v einander gleich, so folgt

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot h} = g \cdot t$$

oder
$$h = \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

Die Fallhöhe ist also dem Quadrate der Zeit proportional und für $t = 1$

$$h = \frac{g}{2},$$

gleich der halben Beschleunigung.

Das freie Aufsteigen einer bis zu geringer Höhe vertical aufwärts geworfenen Masse m ohne Luftwiderstand.

Es sei c die Anfangsgeschwindigkeit, also zur Zeit $t = 0$, v die Geschwindigkeit und h_1 die Steighöhe nach Verlauf der Zeit t , die bewegende Kraft ist

$$-G = -m \cdot g.$$

Der Satz vom Antriebe liefert

$$m \cdot v - m \cdot c = -m \cdot g \cdot t$$

oder
$$v = c - g \cdot t.$$

Das Princip der lebendigen Kraft hingegen giebt

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = -m \cdot g \cdot h_1$$

oder
$$v = \sqrt{c^2 - 2 \cdot g \cdot h_1}.$$

Die Bewegung ist also eine gleichförmig verzögerte, deren Geschwindigkeit in der Höhe H gleich Null wird. Es ist

$$0 = \sqrt{c^2 - 2 \cdot g \cdot H}$$

oder
$$c^2 = 2 \cdot g \cdot H.$$

Setzt man diesen Werth ein in die obige Gleichung für v , dann folgt

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_1)}$$

und da $H - h_1 = h$

gleich der Fallhöhe im vorigen Beispiel ist, so ergibt sich

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

die Geschwindigkeit beim Steigen oder Fallen in demselben Abstände h also gleich gross.

Anziehungskraft einer homogenen Kugel auf einen ausserhalb oder innerhalb derselben befindlichen materiellen Punkt m .

Eine homogene Kugel kann man sich in concentrische Hohlkugeln von unendlich kleiner Dicke und jede einzelne Hohlkugel in ringförmige Elemente zerlegt denken, welche auf demselben Kugeldurchmesser senkrecht stehen. Wählt man nun letzteren so, dass er in seiner Verlängerung durch den ausserhalb der Kugel liegenden materiellen Punkt m hindurchläuft (Fig. 154), welcher von der Kugel angezogen wird und betrachtet man nur die anziehende Wirkung P eines unendlich kleinen Massentheiles μ auf dem materiellen Punkte m , so ist einleuchtend, dass dieselbe in der geraden Verbindungslinie $m\mu = \rho$ liegt, und dass sie in der Richtung mO eine Componente

$$P \cdot \cos \alpha$$

und senkrecht zu derselben eine Componente

$$P \cdot \sin \alpha$$

liefert.

Nun liegen aber sämtliche Anziehungskräfte auf der Kegelfläche, deren Spitze m und deren Grundlinie das ringförmige Element ist, folglich giebt es eine Resultirende

$$\Sigma(P \cdot \sin \alpha) = 0,$$

welche also dem materiellen Punkte keine Bewegung ertheilt, und eine Resultirende

$$dR = \Sigma(P \cdot \cos \alpha),$$

welche den materiellen Punkt im Sinne mO bewegen will.

Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist aber auch

$$P = k \cdot \frac{\mu \cdot m}{\varrho^2},$$

folglich

$$\begin{aligned} dR &= \Sigma \left(k \cdot \frac{\mu \cdot m}{\varrho^2} \right) \cdot \cos \alpha \\ &= \Sigma(\mu) \cdot \frac{k \cdot m \cdot \cos \alpha}{\varrho^2}. \end{aligned}$$

$\Sigma(\mu)$ ist die Masse des Ringelementes vom Halbmesser a und dem Querschnitte f , demnach ist

$$\Sigma(\mu) = 2 \cdot a \cdot \pi \cdot f \cdot \gamma$$

und

$$dR = 2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot m \cdot \frac{a \cdot f \cdot \cos \alpha}{\varrho^2},$$

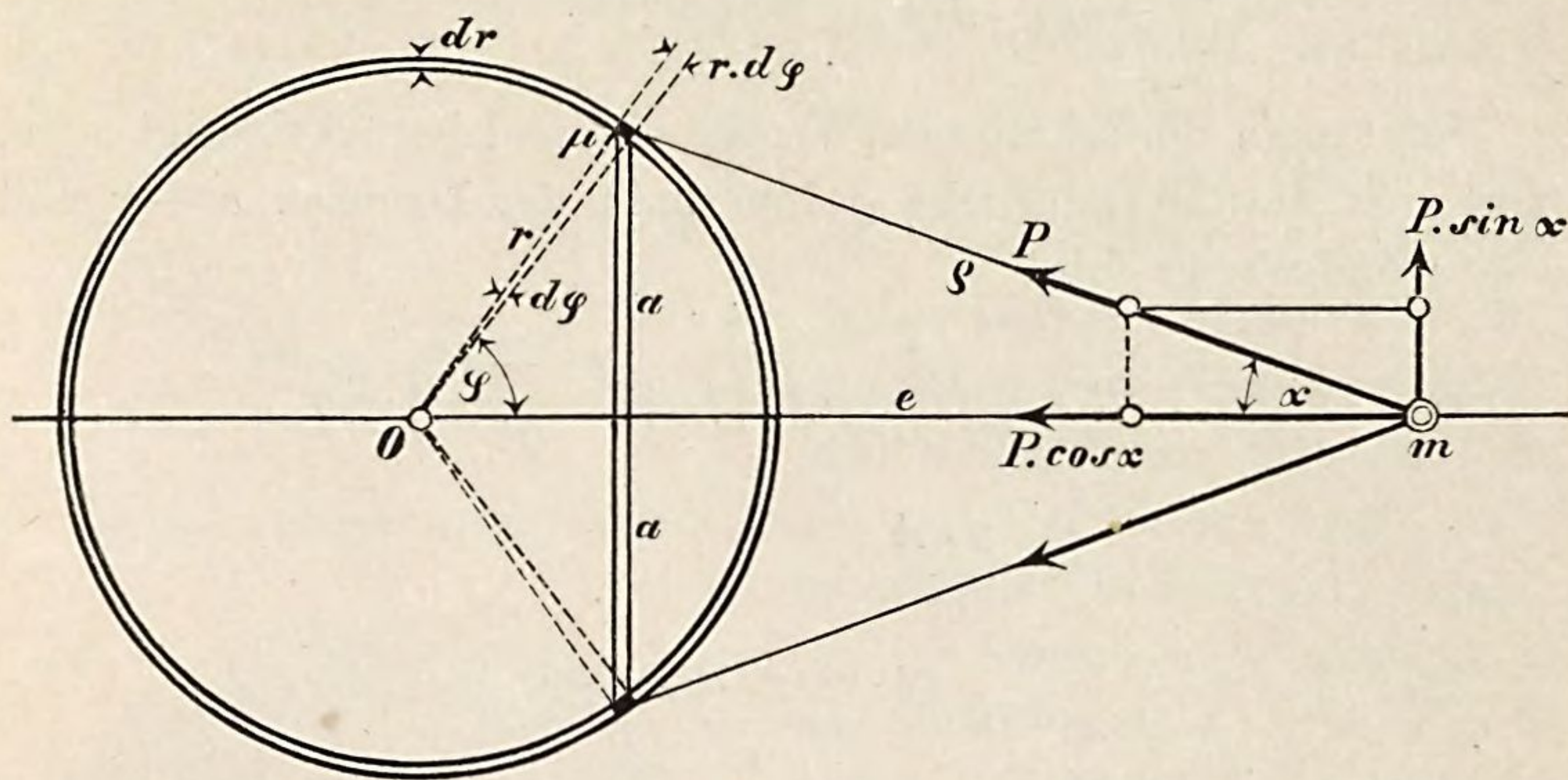


Fig. 154.

da jedoch

$$f = r \cdot d\varphi \cdot dr$$

und

$$a = r \cdot \sin \varphi$$

ist, so gilt auch

$$dR = 2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot m \cdot r^2 \cdot dr \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{\varrho^2}$$

oder

$$2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot k \cdot m \cdot r^2 \cdot dr = A$$

gesetzt, folgt die Anziehungskraft der Hohlkugel auf den materiellen Punkt

$$R = A \cdot \int \frac{\cos \alpha \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi}{\varrho^2}.$$

Die Winkel α und φ sind aber Functionen von ϱ , denn es ist nach Fig. 154

$$r^2 = \varrho^2 + e^2 - 2 \cdot \varrho \cdot e \cdot \cos \alpha$$

oder

$$\cos \alpha = \frac{\varrho^2 + e^2 - r^2}{2 \cdot \varrho \cdot e}$$

und

$$\varrho^2 = r^2 + e^2 - 2 \cdot r \cdot e \cdot \cos \varphi,$$

$$2 \cdot \varrho \cdot d\varrho = 2 \cdot r \cdot e \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

oder

$$\sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{\varrho \cdot d\varrho}{r \cdot e}.$$

Setzt man die erhaltenen Werthe ein und berücksichtigt man, dass sich die Veränderliche ϱ innerhalb der Grenzen $e - r$ und $e + r$ ändert, so folgt

$$\begin{aligned} R &= \frac{A}{2 \cdot r \cdot e^2} \cdot \int_{e-r}^{e+r} \left(1 + \frac{e^2 - r^2}{\varrho^2} \right) \cdot d\varrho \\ &= \frac{2 \cdot A}{e^2} \\ &= k \cdot \frac{(4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dr \cdot \gamma) \cdot m}{e^2}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot dr \cdot \gamma = M$$

die Masse der unendlich dünnen Hohlkugel, weshalb endlich

$$R = k \cdot \frac{M \cdot m}{e^2}$$

wird.

Hieraus folgt aber, dass „die Wirkung ganz dieselbe ist, wenn man sich die ganze Masse M der unendlich dünnen Hohlkugel in dem Mittelpunkte derselben concentrirt denkt“.

Dieses Resultat gilt nun für alle concentrischen Hohlkugeln, in welche man sich eine homogene Kugel zerlegt denken kann, weshalb man die Anziehung der letzteren leicht nach der letzten Gleichung bestimmen kann, wenn man sich die ganze Masse M der Vollkugel in ihren Mittelpunkt verlegt denkt.

Liegt der materielle Punkt m innerhalb einer unendlich dünnen Hohlkugel (Fig. 155), dann ändert sich ϱ von $r - e$ bis $r + e$ und es ist

$$R = \frac{A}{2 \cdot r \cdot e^2} \int_{r-e}^{r+e} \left(1 + \frac{e^2 - r^2}{\varrho^2} \right) \cdot d\varrho = 0,$$

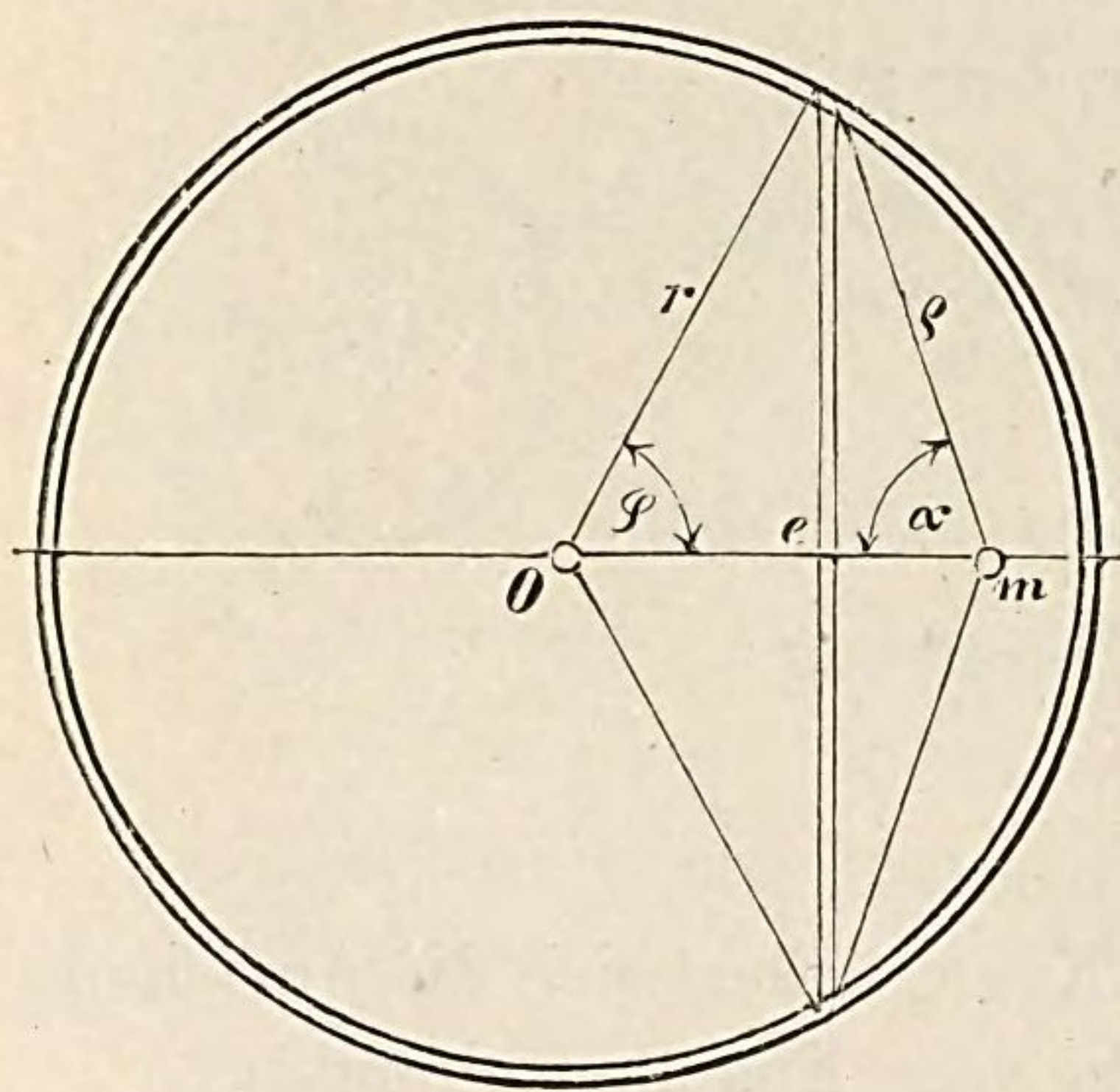


Fig. 155.

d. h. aber „die Anziehungskräfte sämtlicher Massentheile der unendlich dünnen Hohlkugel stehen im Gleichgewichte, vermögen also die Lage des im Inneren der Hohlkugel befindlichen materiellen Punktes m nicht zu ändern“.

Dasselbe gilt daher auch für eine Hohlkugel von endlicher Dicke, und es lässt sich nunmehr mit Hilfe der erhaltenen Resultate angeben, wie gross die Anziehung einer Vollkugel vom Halbmesser r auf einen materiellen Punkt m ist, welcher sich im Inneren der Vollkugel in der Entfernung r_1 vom Mittelpunkte befindet (Fig. 156).

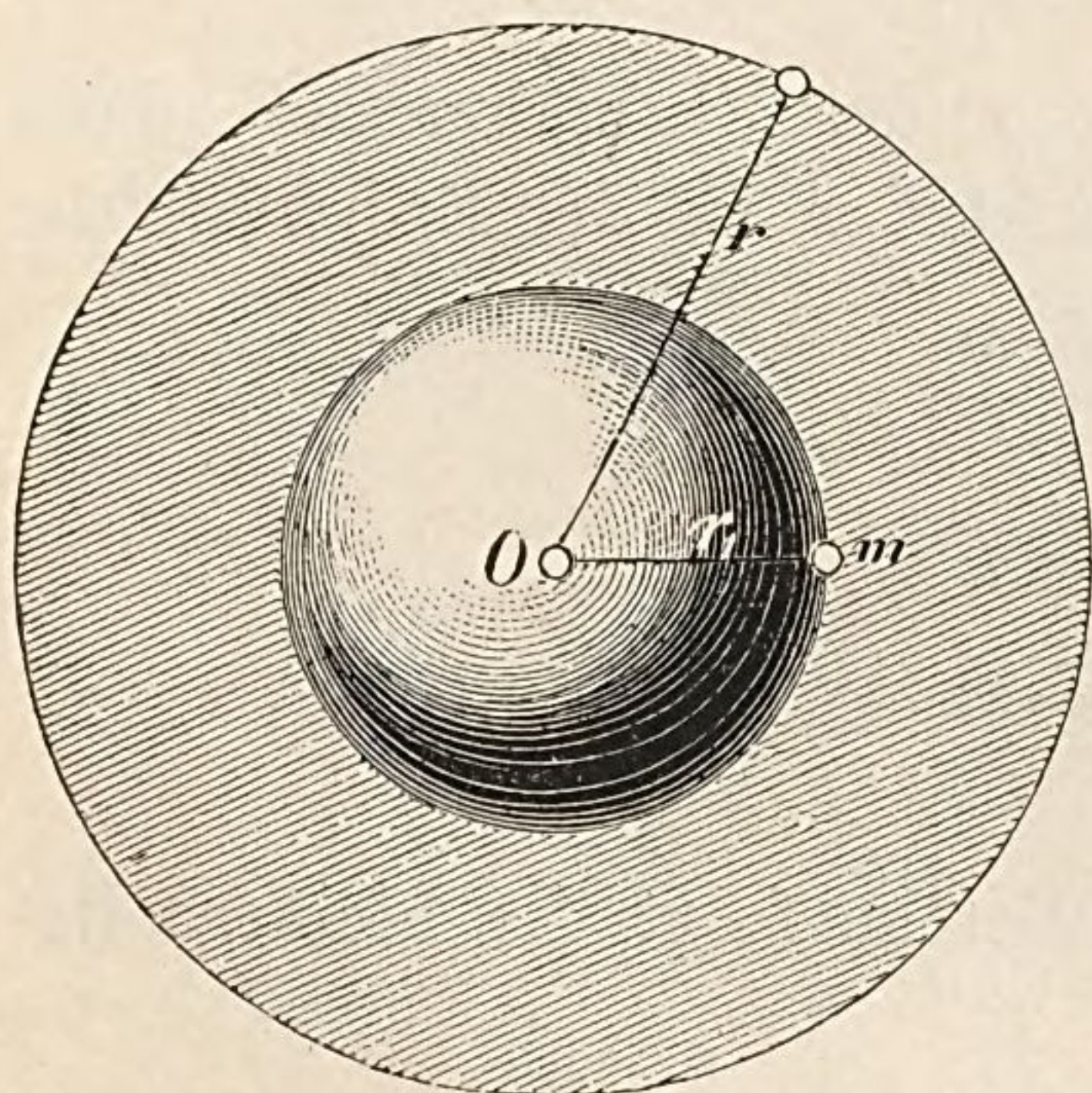


Fig. 156.

Da sich die Anziehungskräfte der Hohlkugel von der Wandstärke $r - r_1$ auf den Punkt m aufheben, wirkt nur die Anziehung einer Kugel vom Halbmesser r_1 und der Masse M_1 , und es folgt die Anziehungskraft derselben durch

$$R_1 = k \cdot \frac{M_1 \cdot m}{r_1^2};$$

und wäre $R_1 = R$,

befände sich also der materielle Punkt m an der Oberfläche der Vollkugel von der Masse M und dem Halbmesser r , dann wäre die Anziehungskraft derselben

$$R = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}.$$

Durch Division der beiden letzten Werthe folgt

$$\frac{R_1}{R} = \frac{M_1 \cdot r^2}{M \cdot r_1^2}.$$

Nun ist

$$M_1 = \frac{4}{3} \cdot r_1^3 \cdot \pi \cdot \gamma$$

und $M = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot \gamma,$

also $\frac{M_1}{M} = \frac{r_1^3}{r^3},$

und schliesslich nach erfolgter Einsetzung

$$\frac{R_1}{R} = \frac{r_1}{r},$$

das heisst aber: „Im Inneren der Kugel ändert sich die Anziehung direct proportional dem Abstände vom Kugelmittelpunkte“.

*Freier Fall einer schweren Masse m ohne Widerstand
aus grosser Höhe.*

Ist M die Masse der Erde und r der Erdhalbmesser, dann ist das Gewicht des materiellen Punktes m an der Erdoberfläche

$$m \cdot g = k \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

und in einer beliebigen Entfernung a

$$m \cdot p = k \cdot \frac{M \cdot m}{a^2}.$$

Durch Verbindung der beiden Werthe folgt die kleinere Beschleunigung

$$p = \frac{r^2}{a^2} \cdot g.$$

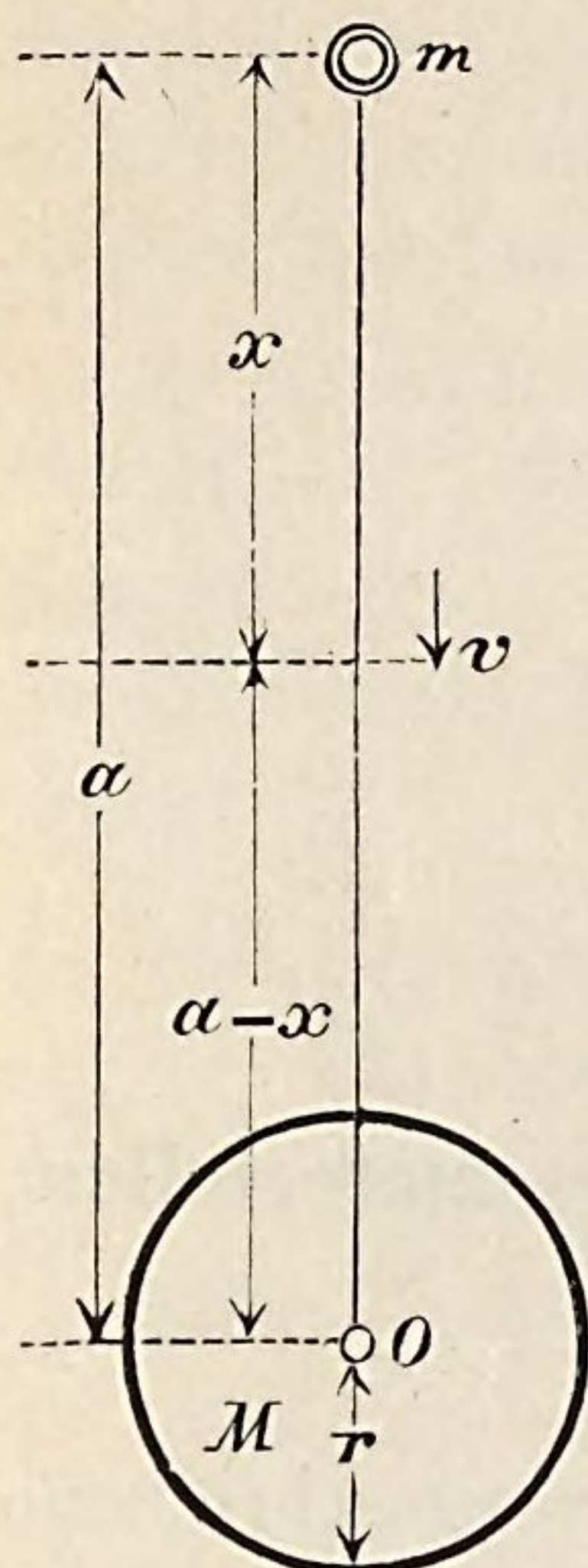


Fig. 157.

Beginnt nun die Bewegung in der Entfernung a (Fig. 157) mit der Geschwindigkeit

$$v = 0,$$

so ist nach dem Fallen über den Weg x die Beschleunigung

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{g \cdot r^2}{(a - x)^2},$$

welcher Ausdruck nach erfolgter Multiplication mit dx und Einführung von

$$\frac{dx}{dt} = v$$

folgenden Werth annimmt

$$2 \cdot v \cdot dv = 2 \cdot g \cdot r^2 \cdot \frac{dx}{(a - x)^2},$$

und nach erfolgter Integration

$$v^2 = \frac{2 \cdot g \cdot r^2}{a - x} + C.$$

Da für $x = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, so ist die Integrationsconstante

$$C = - \frac{2 \cdot g \cdot r^2}{a}$$

und deshalb

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{a - x} - \frac{1}{a} \right).$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Masse m die Erdoberfläche erreicht, erhält man hieraus für

$$x = (a - r),$$

also durch

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot r \cdot (a - r)}{a}}.$$

Je grösser a ist, desto mehr verschwindet der Werth r in dem Bruche

$$\frac{a - r}{a},$$

es nähert sich daher letzterer mehr und mehr der Eins; für unendlich grosse Höhe ist daher

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot r}.$$

Für

$$r = 6370000^{\text{m}}; \quad g = 9,8$$

ist

$$v = 11180^{\text{m}}.$$

III.

Unfreie oder gezwungene Bewegung eines materiellen Punktes.

Ist ein materieller Punkt durch eine vorgeschriebene Bahn, aus welcher er nicht heraustreten kann, gehindert, frei den ihn bewegenden Kräften zu folgen, so sagt man, seine Bewegung ist eine unfreie oder gezwungene.

Fast alle Bewegungen an Maschinen sind gezwungene, so auch das Pendeln eines an einem Faden aufgehängten Körpers, das Hinabgleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene, in einer beliebig gekrümmten Rinne, in einem beliebig gekrümmten Rohre etc.

Zur Untersuchung einer unfreien Bewegung dienen die Regeln der freien, indem man sich die vorgeschriebene Bahn weggenommen und an ihre Stelle in jedem Zeitpunkte der Bewegung ausser der eigentlich bewegenden Kraft eine weitere Kraft auf den Körper einwirkend denkt, welche die Wirkung der vorgeschriebenen Bahn ersetzt.

Man kann sich demnach die unfreie Bewegung als eine freie vorstellen, erzeugt durch zwei Kräfte und zwar

- 1) durch die gegebene eigentlich bewegende Kraft und
- 2) durch den die Bahn ersetzenden Widerstand,

oder auch erzeugt durch eine einzige Kraft, welche die Resultirende aus jenen beiden Kräften bildet, „Effectivkraft“ genannt wird und im gegebenen speciellen Falle bestimmt werden kann.

Je nach der Masse der Führung, welche der materielle Punkt auf einer vorgeschriebenen Bahn erleidet, hat man Bewegungen auf „theilweise“ und „vollständig“ vorgeschriebenen Bahnen zu unterscheiden. Zu ersteren gehören

die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer horizontalen Fläche,

die Bewegung auf einer geneigten ebenen Fläche,

die Bewegung auf einer einfach gekrümmten,

und die Bewegung auf einer doppelt gekrümmten Fläche resp. die Bewegung des materiellen Punktes in einer beliebig gekrümmten Rinne.

Vollständig vorgeschrieben ist die Bahn aber nur dann, wenn der materielle Punkt nach allen Richtungen hin und zu jeder Zeit Führung erhält.

Die Untersuchung der unfreien Bewegungen stellt sich die Aufgabe, für jeden der möglichen Fälle und für jede Zeit der Bewegung den „Bahnwiderstand“, die „Effectivkraft“ und die von ihr geleistete „mechanische Arbeit“ zu bestimmen.

1.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer horizontalen ebenen Fläche.

Wird ein materieller Punkt m durch eine Kraft P senkrecht gegen eine horizontale feste Ebene gedrückt (Fig. 158), so leistet letztere einen Gegendruck, einen Widerstand (Reaction) N , welcher — unter der Voraussetzung des Gleichgewichtszustandes — dem Drucke P

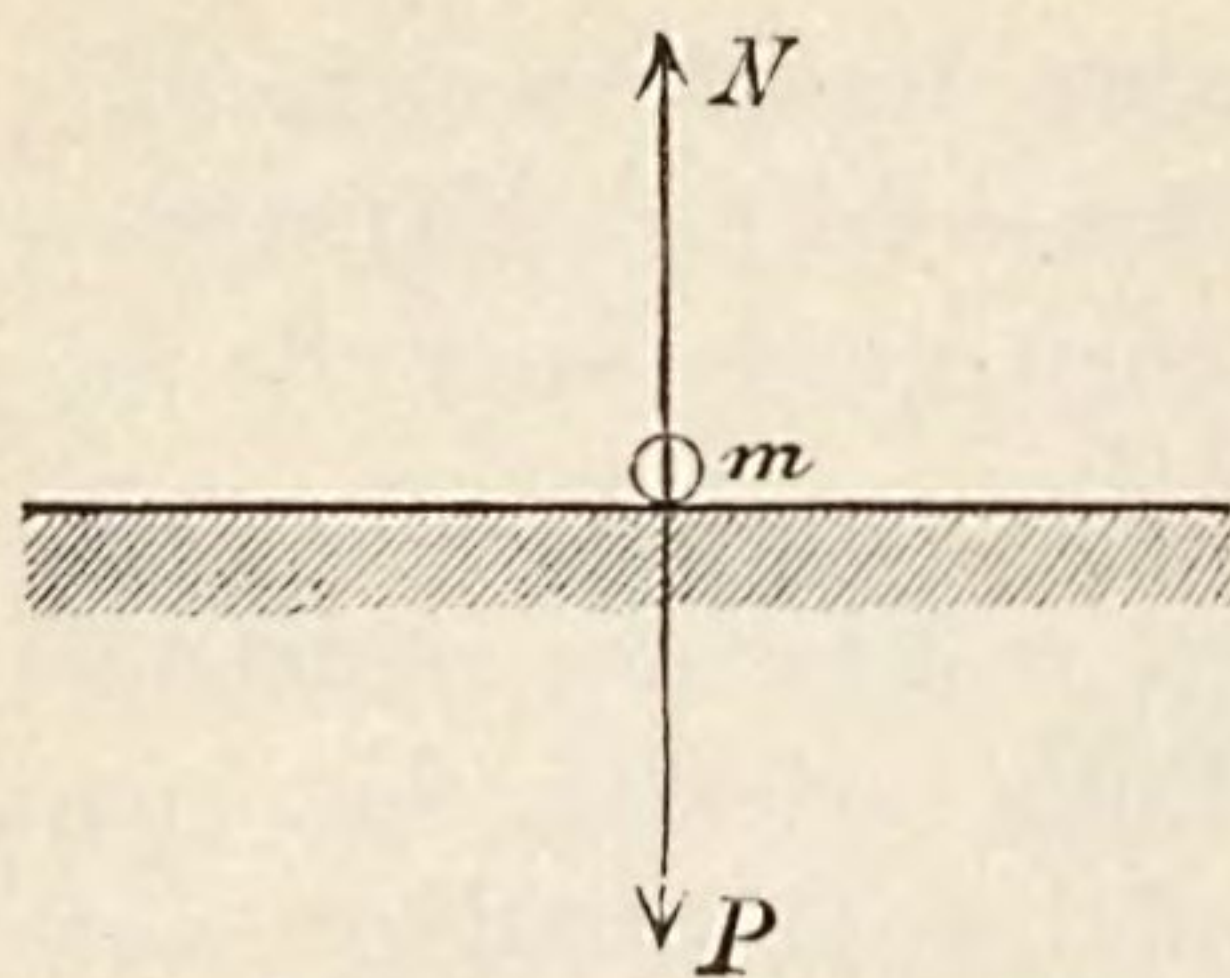


Fig. 158.

gleich gross und geradlinig entgegengesetzt gerichtet, also ein Normalwiderstand der Bahn ist.

Es wird

$$N = P$$

und im Uebrigen ist ersichtlich, dass die gegebene Kraft P den materiellen Punkt nicht in Bewegung versetzt.

Wird der Punkt hingegen durch eine unter dem Winkel α zur horizontalen Ebene geneigten Kraft P (Fig. 159) gegen erstere gedrückt, dann findet sich die Wirkung der Kraft nach ihrer Zerlegung in eine Normalcomponente $P \cdot \sin \alpha$ und in eine Horizontalcomponente $P \cdot \cos \alpha$. Während $P \cdot \sin \alpha$ den normalen Bahnwiderstand

$$N = P \cdot \sin \alpha$$

hervorbringt, erzeugt die zur horizontalen Ebene parallele Componente $P \cdot \cos \alpha$ am materiellen Punkte Beschleunigung; wobei jedoch vorausgesetzt werden muss, dass ein der Bewegung entgegenstehender Widerstand seitens der ebenen Bahn nicht existirt. Besteht ein solcher Bahnwiderstand F , dann ist die beschleunigende Effectivkraft

$$R = P \cdot \cos \alpha - F,$$

der wahre Bahnwiderstand W der Grösse nach die Resultirende aus den Widerständen F und N ,

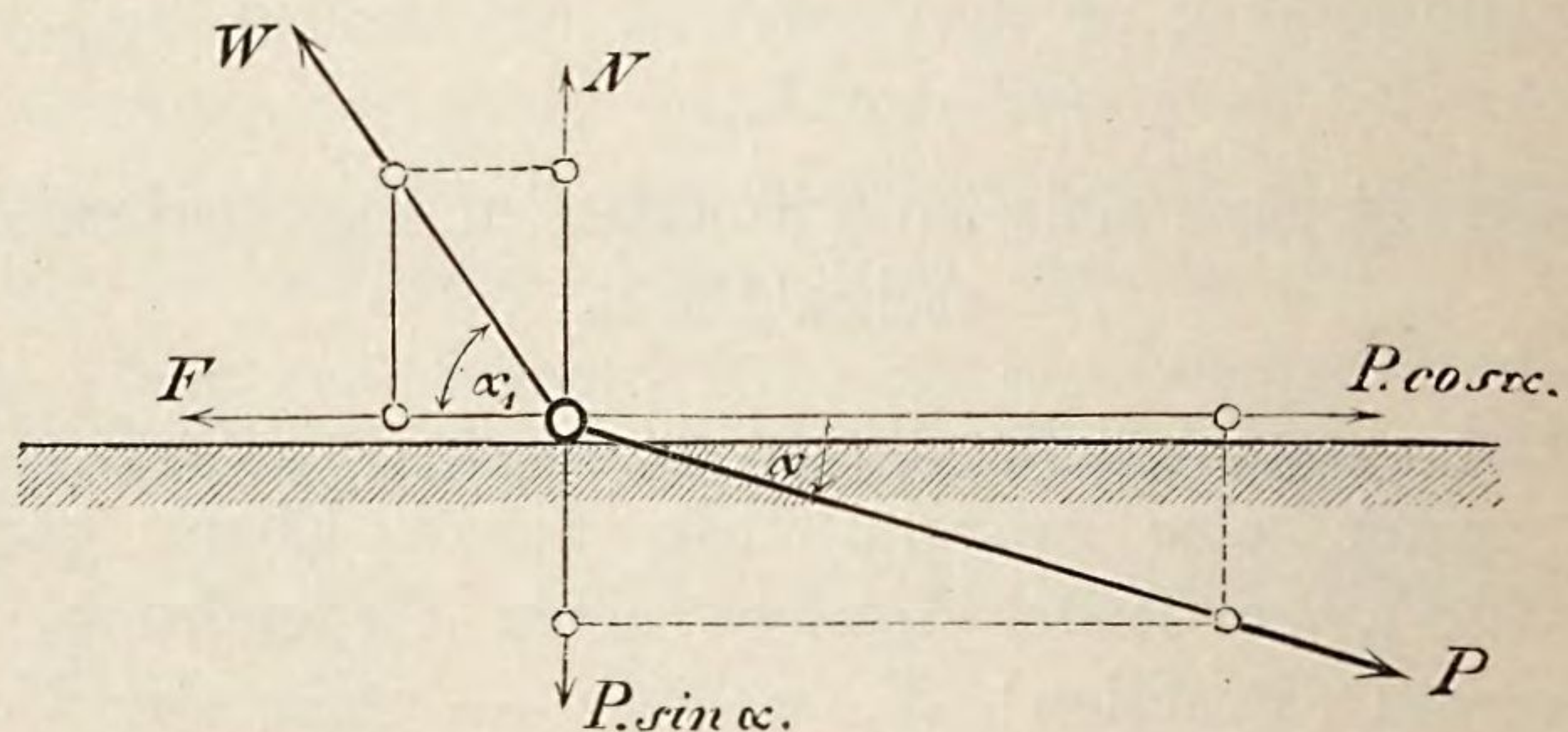


Fig. 159.

$$W = \sqrt{F^2 + N^2},$$

und die Richtung desselben wird bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{N}{F}.$$

Die Beschleunigung des materiellen Punktes auf der horizontalen Bahn ist

$$p = \frac{dv}{dt} = \frac{R}{m}.$$

Nachdem man nun die Grösse und Richtung des totalen Bahnwiderstandes kennen gelernt hat, so kann man sich die Bahn weggenommen denken und sich den materiellen Punkt als einen freien durch die Kräfte P und W (Fig. 160) beanspruchten vorstellen. Die Resultirende aus diesen Kräften, die Effectivkraft R , wird dann dieselbe Bewegung als freie ausführen, welche durch P und die vorgeschriebene horizontale Ebene erzeugt wurde.

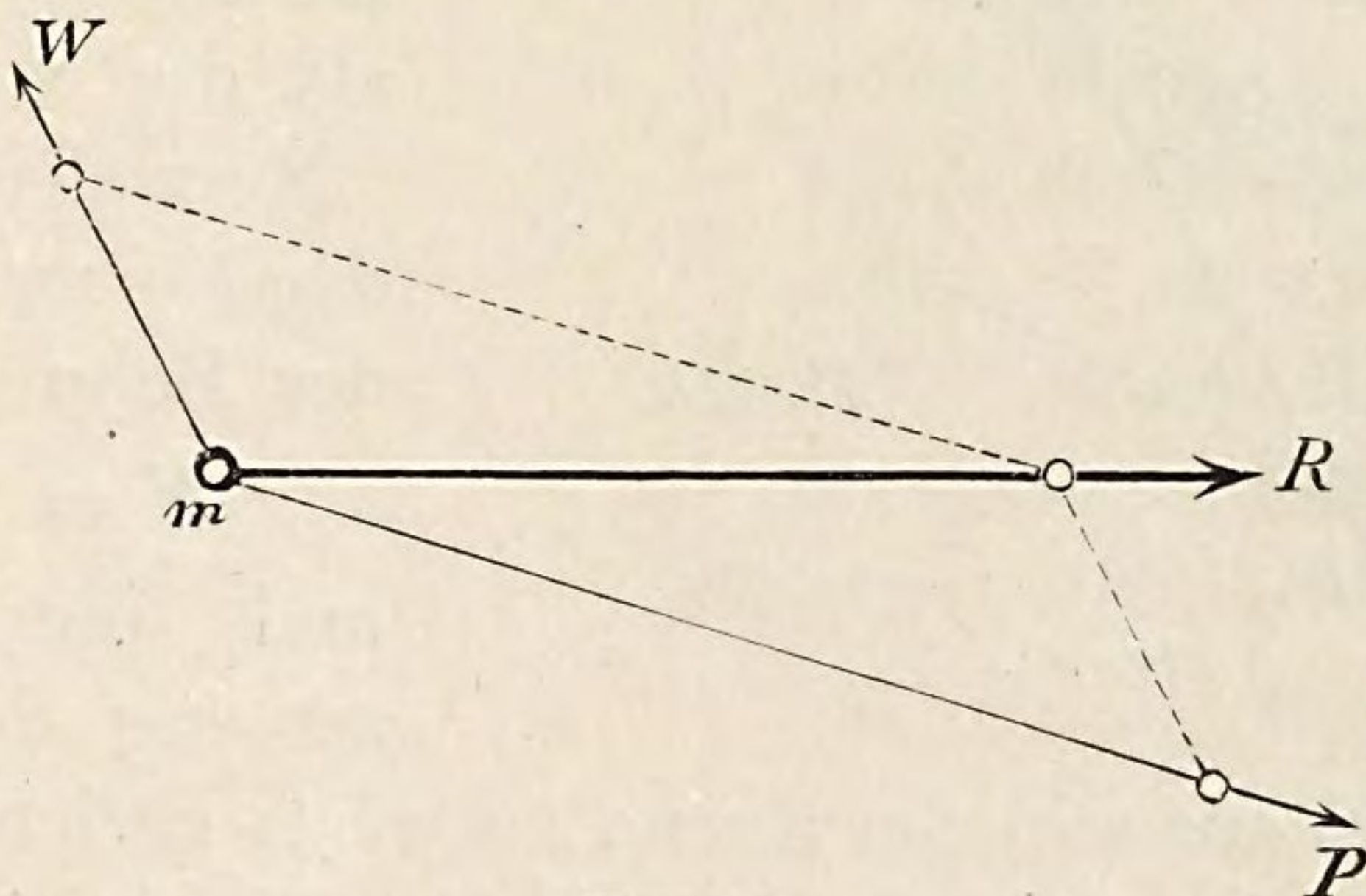


Fig. 160.

Specielle Fälle:

1) $F = 0$ giebt

$R = P \cdot \cos \alpha$; beschleunigte Bewegung.

2) $F = P \cdot \cos \alpha$; gleichförmige Bewegung oder Ruhe.

3) $F > P \cdot \cos \alpha$; stets Ruhezustand.

4) $\alpha = 0$; giebt $N = 0$; $R = P - F$, und ist $F = f \cdot N$, also dem Normalwiderstand direct proportional, so wird $F = 0$ und $R = P$.

- 5) $\alpha : -$; giebt $N : -$, d. h. es müsste, damit der Punkt die Bahn ferner berührt, eine zur Horizontalebene entgegengesetzte Parallelebene angebracht werden. Ist diese nicht vorhanden, so entweicht der Punkt.

2.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer geneigten ebenen Fläche, einer schiefen Ebene.

Der Neigungswinkel der schiefen Ebene sei w (Fig. 161); im Uebrigen mögen die Grössen dieselbe Bedeutung haben wie oben.

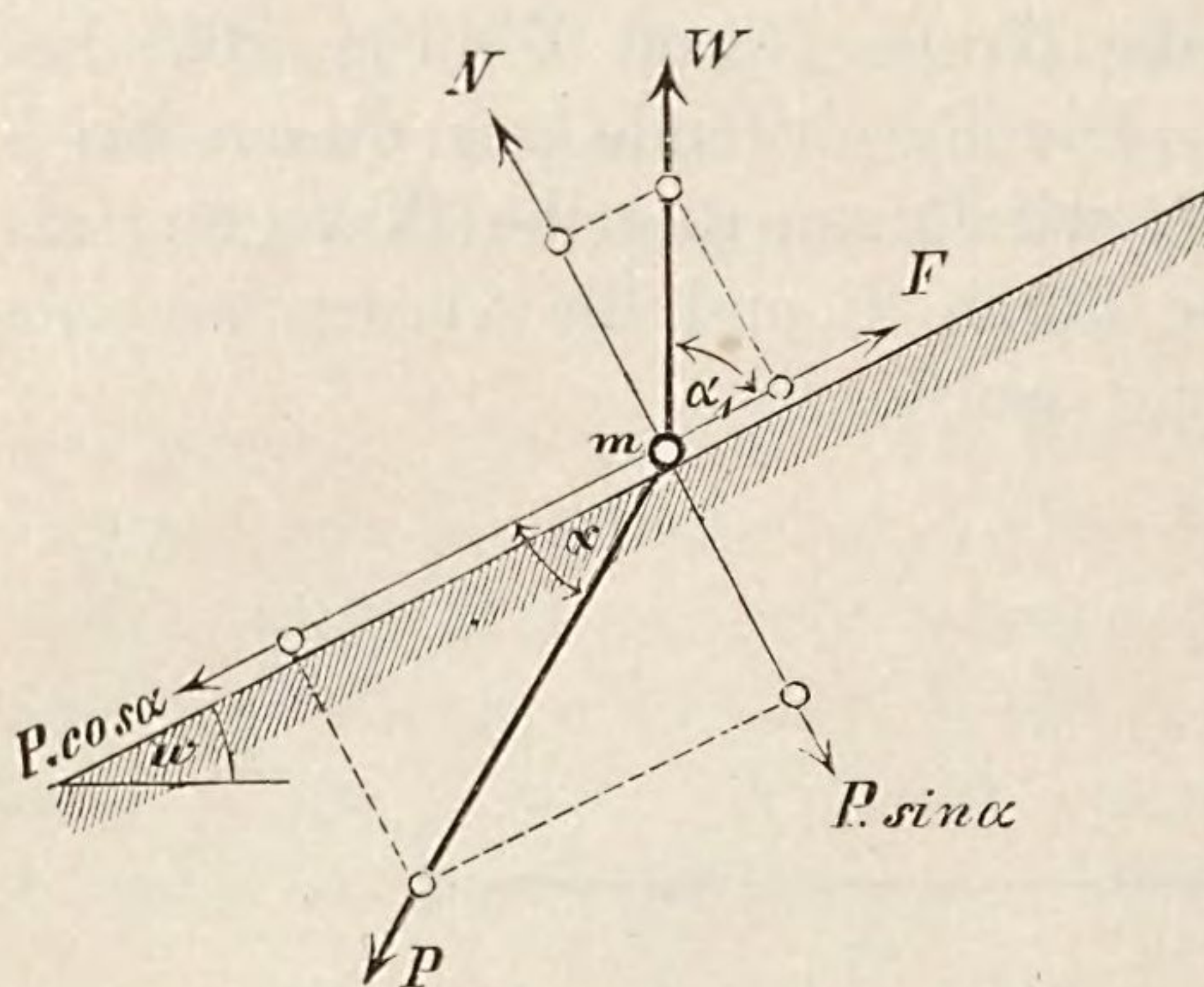


Fig. 161.

Zerlegt man hier die auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft P normal und parallel zur schiefen Ebene, so erhält man als die Wirkung der Normalcomponente den Normalwiderstand der Bahn

$$N = P \cdot \sin \alpha$$

und unter Voraussetzung der Existenz

eines parallel zur schiefen Ebene aufwärts gerichteten Bahnwiderstandes F , eine den materiellen Punkt parallel zur schiefen Ebene beschleunigende Effectivkraft

$$R = P \cdot \cos \alpha - F,$$

welche ebenfalls angesehen werden kann als die Resultirende aus der gegebenen bewegenden Kraft P und dem wahren Bahnwiderstande

$$W = \sqrt{F^2 + N^2}.$$

Die Resultate stimmen mit den im ersten Falle erhaltenen überein. Bemerkenswerth ist nur der specielle Fall, in welchem P stets eine Vertikalkraft,

beispielsweise das Gewicht G des materiellen Punktes ist, und für welchen gilt

$$\alpha = 90^\circ - w,$$

$$N = G \cdot \cos w,$$

und $R = G \cdot \sin w - F.$

3.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer einfach gekrümmten Fläche.

Soll sich ein materieller Punkt m an einer einfach ge-

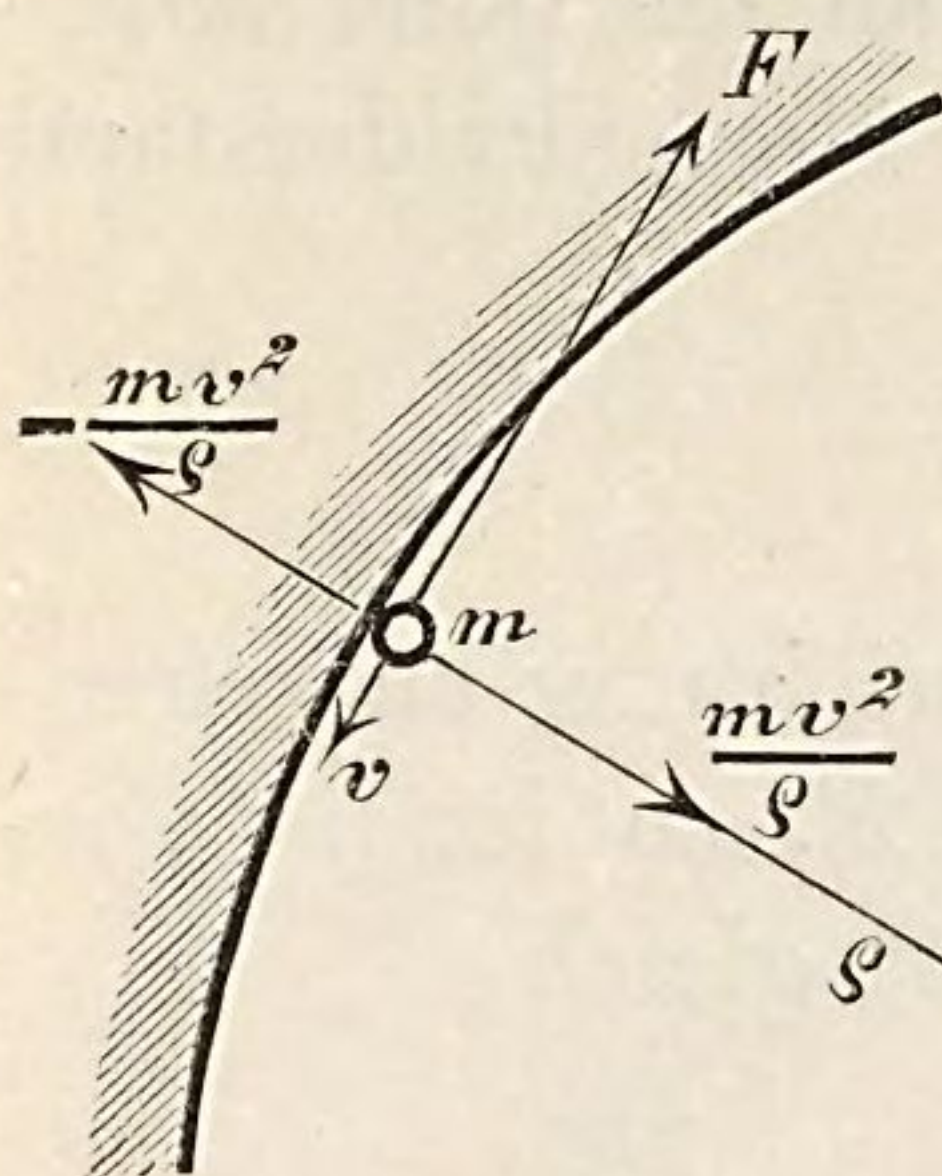


Fig. 162.

krümmten concaven Körper-
oberfläche mit einer Ge-
schwindigkeit v hin bewe-
gen ohne Einwirkung einer
bewegenden Kraft P , dann
muss die feste Bahn (Fig.
162) allein einen Wider-
stand N erzeugen, welcher
stets in die Richtung des
Krümmungsradius fällt,
gleich der Centripetalkraft

$$N = \frac{m \cdot v^2}{\rho}$$

ist und die Bewegungsrichtungs-
änderung erzeugt.

Die Entstehung des Normal-
widerstandes $N = \frac{m \cdot v^2}{\rho}$ erklärt
sich folgendermassen:

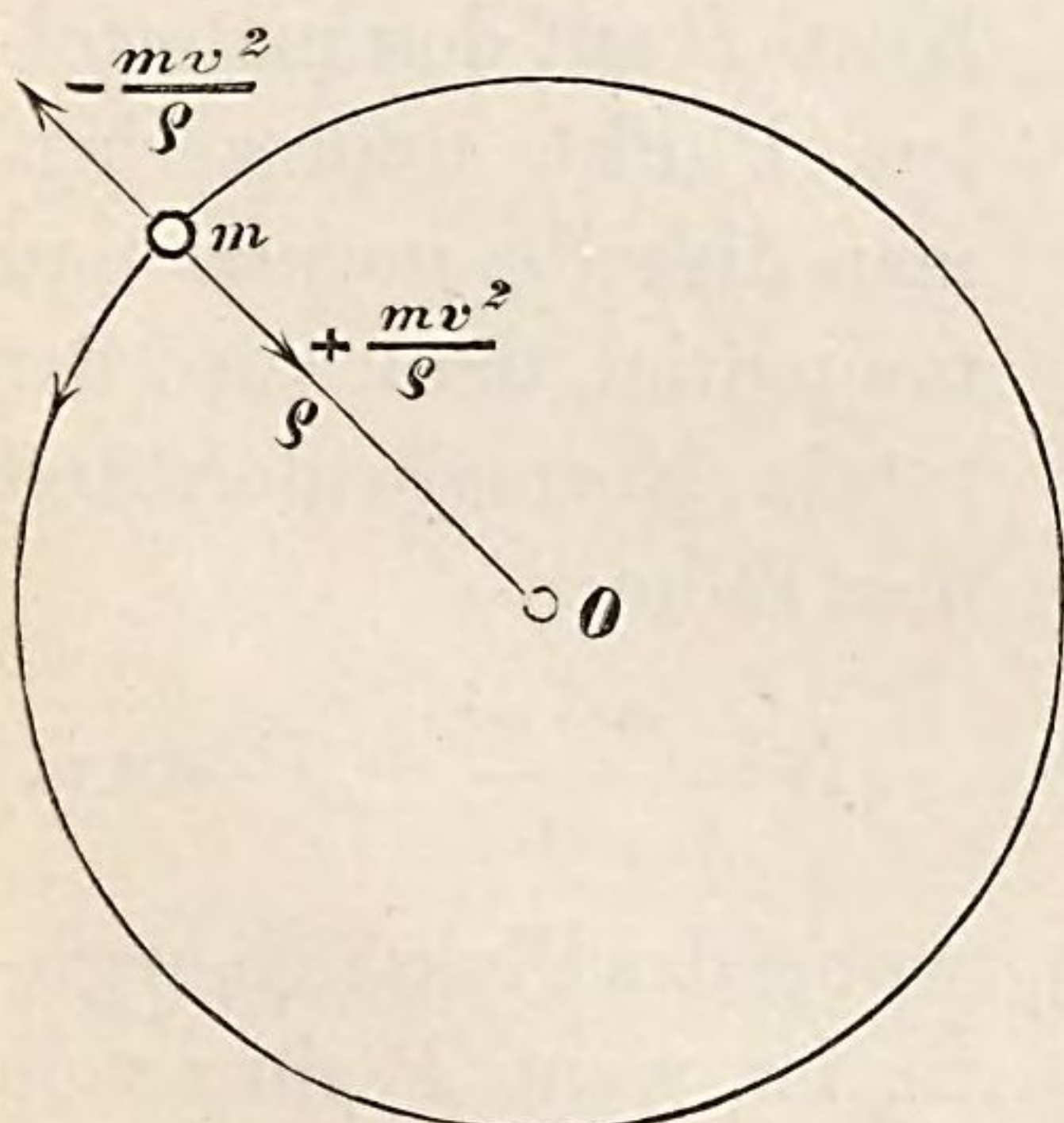


Fig. 163.

Befindet sich ein an dem
Faden Om (Fig. 163) befestigter
materieller Punkt m in drehen-
der Bewegung um den festen

Punkt O , so erzeugt die von O ausgeübte Centripetalkraft $+\frac{m \cdot v^2}{\rho}$ die Bewegungsrichtungsänderung und zugleich den mit ersterer gleich grossen aber entgegengesetzt, also radial auswärts gerichteten Trägheitswiderstand $-\frac{m \cdot v^2}{\rho}$, die sogenannte

„Centrifugalkraft“,

welche die Straffspannung des Fadens hervorbringt.

Wird der Faden zerschnitten, so entweicht der materielle Punkt radial auswärts vermöge der Centrifugalkraft.

Auf den obigen Fall angewendet, wird der materielle Punkt, da eine Verbindung mit dem Krümmungsmittelpunkte nicht besteht, durch die Centrifugalkraft an die Bahn gedrückt und infolgedessen von letzterer der Normalwiderstand

$$N = + \frac{m \cdot v^2}{\rho}$$

erzeugt.

Bietet die Bahn einen der Bewegungsrichtung entgegengesetzten, also tangentialen Widerstand F , so ist im vorliegenden Falle die beschleunigende Kraft gleich

$$- F.$$

Wirkt nun ausser der Centrifugalkraft noch eine, in der Bildebene, der ρF Ebene (Fig. 164), gegebene bewegend

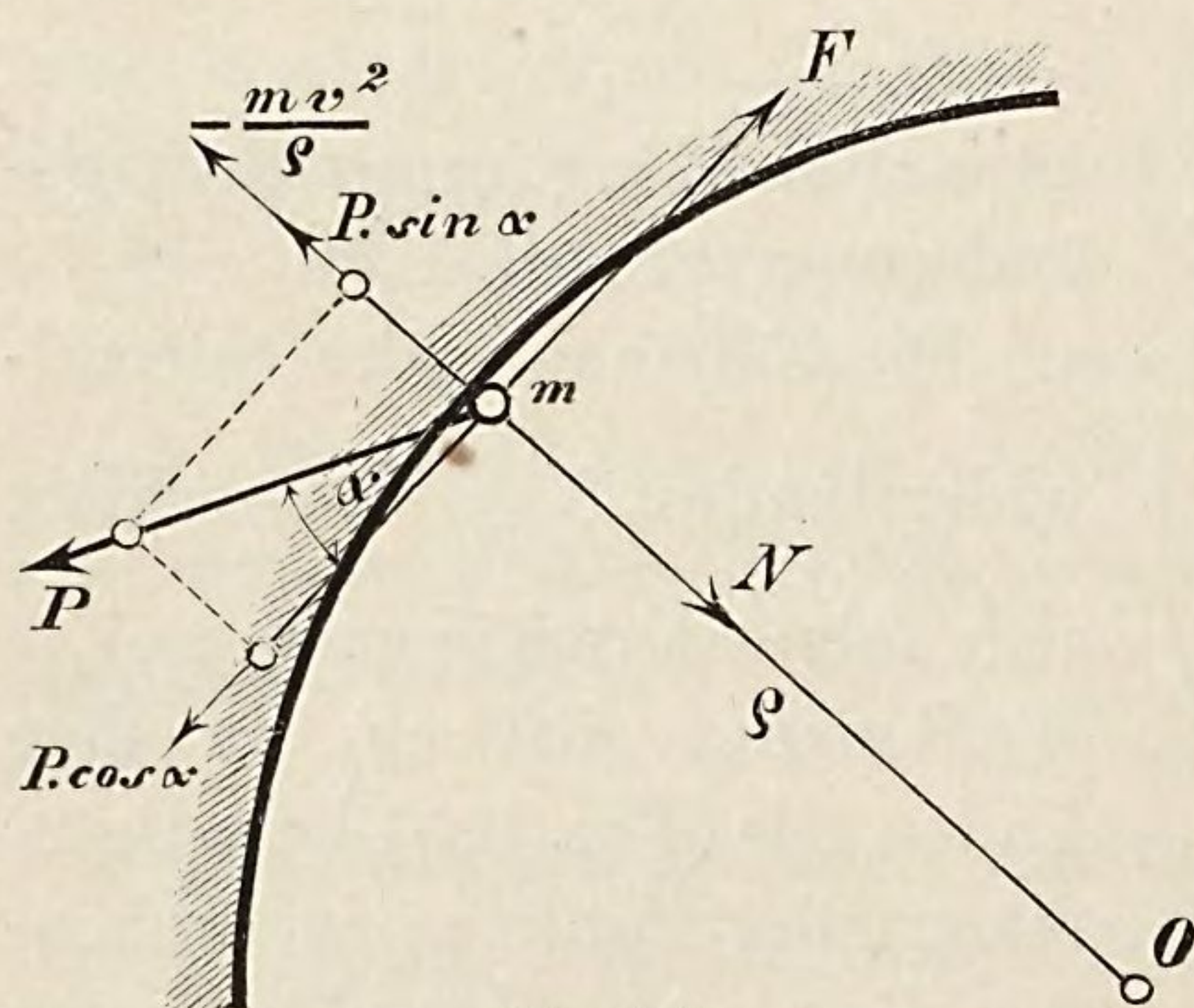


Fig. 164.

Kraft P auf den materiellen Punkt und zerlegt man dieselbe normal und tangential, dann wird der totale Normalwiderstand der Bahn

$$N = \frac{m \cdot v^2}{\rho} \pm P \cdot \sin \alpha,$$

wobei das Pluszeichen giltig ist, wenn $P \cdot \sin \alpha$ vom Krümmungsmittelpunkt

auswärts, und das Minuszeichen giltig ist, wenn $P \cdot \sin \alpha$ nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet ist. Die beschleunigende Kraft in der Richtung der Tangente an die Bahn wird

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos \alpha - F,$$

der totale Bahnwiderstand

$$W = \sqrt{F^2 + N^2}$$

und die Effectivkraft R die Resultirende aus der bewegend Kraft P und dem Widerstande W .

Die Gleichung für den Normaldruck N zeigt, dass wenn P auf die concave Seite der Bahn zu liegen kommt, also das Minuszeichen giltig ist, der Fall

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} = P \cdot \sin \alpha$$

$$N = 0$$

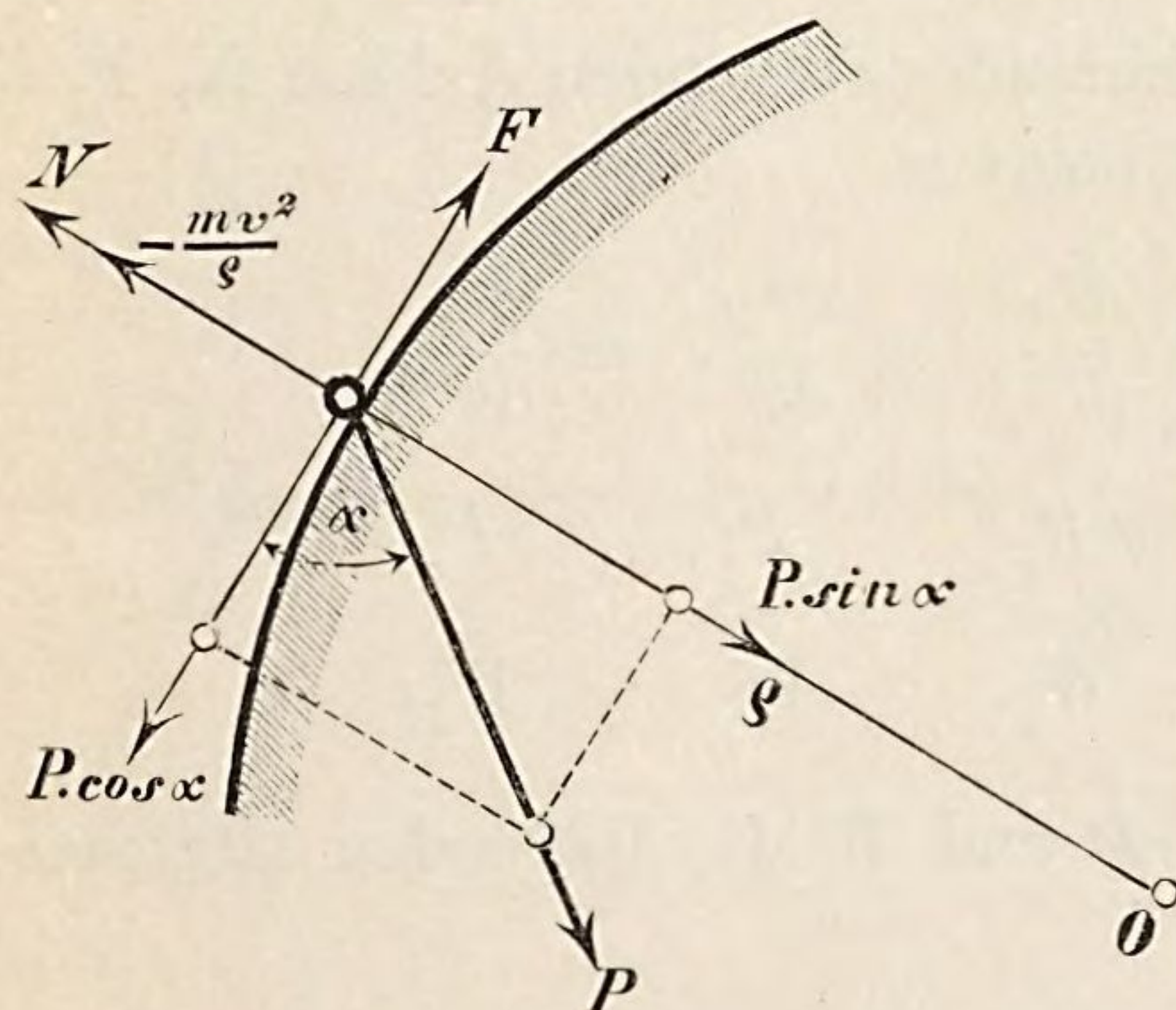


Fig. 165.

zur Folge hat, und dass der materielle Punkt die Bahn verlässt, wenn N negativ, d. h.

$$P \cdot \sin \alpha > \frac{m \cdot v^2}{\varrho}$$

wird.

Würde in dem Augenblicke, in welchem der Uebergang

$$N = 0$$

eintritt, eine convexe Bahn (Fig. 165) dargeboten, so würde gelten

$$N = -\frac{m \cdot v^2}{\varrho} + P \cdot \sin \alpha,$$

welcher Werth sich auch aus $N = \frac{m \cdot v^2}{\varrho} - P \cdot \sin \alpha$ ergibt, wenn N negativ gesetzt wird.

Würde hier wieder $N = 0$, d. h.

$$\frac{m \cdot v^2}{\rho} = P \cdot \sin \alpha,$$

und dann negativ werden,

so würde der materielle Punkt die convexe Bahn wieder verlassen, auf die concave übergehen oder, falls dieselbe nicht vorhanden ist, ins Freie entweichen.

4.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer beliebig gekrümmten Körperoberfläche, resp. in einer streng vorgeschriebenen beliebig gekrümmten Linie.

Die gegebene bewegende Kraft heisse P , der zu ermittelnde totale Bahnwiderstand W und die resultierende Effectivkraft aus beiden sei R .

In drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z mögen die Componenten heißen

$$\begin{aligned} \text{von } R: & \quad m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}, \\ \text{von } P: & \quad P_x, \quad P_y, \quad P_z \\ \text{und von } W: & \quad W_x, \quad W_y, \quad W_z; \end{aligned}$$

dann gelten zwischen R, P und W die folgenden allgemeinen Beziehungen:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma(X) = P_x - W_x,$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma(Y) = P_y - W_y,$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma(Z) = P_z - W_z.$$

Zerlegung von R nach dem Krümmungshalbmesser ϱ der vorgeschriebenen Bahn, der Tangente T und senkrecht zur ϱT Ebene, nach S (Fig. 166).

„Es liegt nach Früherem bei freier Bewegung die bewegende Kraft stets in derjenigen Ebene, welche den Krümmungshalbmesser und die Tangente an die Bahn in sich aufnimmt, in der ϱT Ebene, folglich gilt dasselbe bei unfreier Bewegung für die Effectivkraft R .“

Bedeutet v die Geschwindigkeit des materiellen Punktes m in der Richtung der Tangente T und φ den Richtungswinkel von R zur Tangente T , dann ist nach tangentialer und radialer Zerlegung von R

$$P_t = R \cdot \cos \varphi = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

und $P_\varrho = R \cdot \sin \varphi = \frac{m \cdot v^2}{\varrho}.$

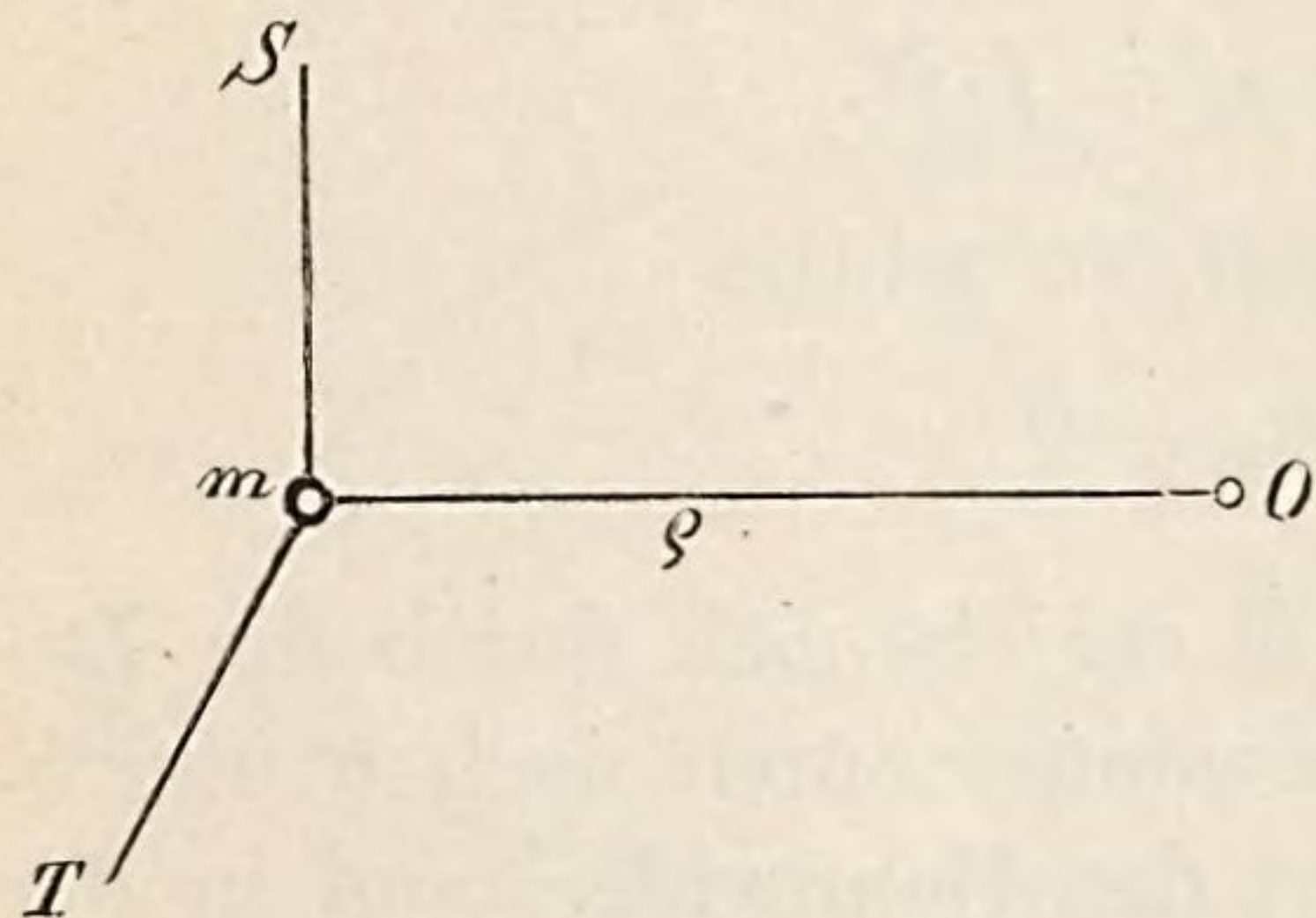


Fig. 166.

Senkrecht zur ϱT Ebene, nach S , liefert also R keine Komponente.

Zerlegt man ferner auch P und W nach T , ϱ und S und heissen die respectiven Richtungswinkel von P

$$\alpha, \beta, \gamma$$

und von W

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$$

dann folgt, wenn man noch bedenkt, dass die Widerstandskomponenten den Kraftkomponenten entgegengesetzt gerichtet sein werden, in der Richtung

von T : $R \cdot \cos \varphi = P \cdot \cos \alpha - W \cdot \cos \alpha_1,$

von ϱ : $R \cdot \sin \varphi = P \cdot \cos \beta - W \cdot \cos \beta_1,$

und von S : $0 = P \cdot \cos \gamma - W \cdot \cos \gamma_1;$

folglich ist aber auch

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos \alpha - W \cdot \cos \alpha_1,$$

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} = P \cdot \cos \beta - W \cdot \cos \beta_1$$

und $0 = P \cdot \cos \gamma - W \cdot \cos \gamma_1,$

oder es sind die Componenten des totalen Widerstandes W

$$W_t = W \cdot \cos \alpha_1 = P \cdot \cos \alpha - m \cdot \frac{dv}{dt},$$

$$W_\varrho = W \cdot \cos \beta_1 = P \cdot \cos \beta - \frac{m \cdot v^2}{\varrho},$$

$$W_s = W \cdot \cos \gamma_1 = P \cdot \cos \gamma.$$

Die erste Gleichung liefert den Widerstand $F = W_t$ der vorgeschriebenen Bahn der Bewegung tangential entgegen. Ist derselbe beispielsweise gleich der Reibung, welche direct proportional dem Normaldrucke N ist, so gilt

$$F = W \cdot \cos \alpha_1 = f \cdot N.$$

Wäre die Bahn absolut glatt, so würde

$$W \cdot \cos \alpha_1 = 0$$

sein.

Der Normal-Widerstand N ergibt sich durch die Zusammensetzung der Widerstandscomponenten nach ϱ und S .

Die zweite Gleichung liefert den Bahnwiderstand in der Richtung des Krümmungshalbmessers, und die dritte Gleichung lehrt, dass der Bahnwiderstand senkrecht zur (ϱT) -Ebene, in welcher die Effectivkraft R liegt, gleich ist der Componente der bewegenden Kraft P nach dieser Richtung.

Der totale Bahnwiderstand ist

$$W = \sqrt{W_t^2 + W_\varrho^2 + W_s^2},$$

und die Resultirende aus der Kraft P und dem Bahnwiderstand W liefert die Effectivkraft R , welche, auf einen

freien materiellen Punkt wirkend, dieselbe Bewegung erzeugen würde wie die Kraft P neben der streng vorgeschriebenen Bahn.

Specielle Fälle.

Die Bewegung des materiellen Punktes auf einer doppelt gekrümmten theilweise vorgeschriebenen Bahn resp. in einer Rinne und auch die unter 1) bis 3) behandelten Fälle sind zu obiger Betrachtung nur specielle Fälle, für welche nur die Bedingungen anzuführen sind, welche erfüllt sein müssen, damit der materielle Punkt die vorgeschriebene Bahn nach der freien Seite hin nicht verlässt.

Soll der materielle Punkt auf der theilweise vorgeschriebenen Bahn (Fig. 167) bleiben, so muss der Druck

$$P \cdot \cos \beta = \frac{m \cdot v^2}{\varrho},$$

welcher den Widerstand W_ρ erzeugt, stets gegen die Fläche gerichtet sein. Wird dieser Druck gleich Null, also

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} = P \cdot \cos \beta,$$

so wird der Widerstand

$$W_\rho = 0,$$

und wird

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} > P \cdot \cos \beta,$$

also

$$W_\rho : - ,$$

so verlässt der materielle Punkt die Körperoberfläche.

Als Bedingung zum Verbleiben auf der Bahn gilt also

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} < P \cdot \cos \beta,$$

wobei vorausgesetzt werden muss, dass die Kraft P nie über die Tangente hinausfällt.

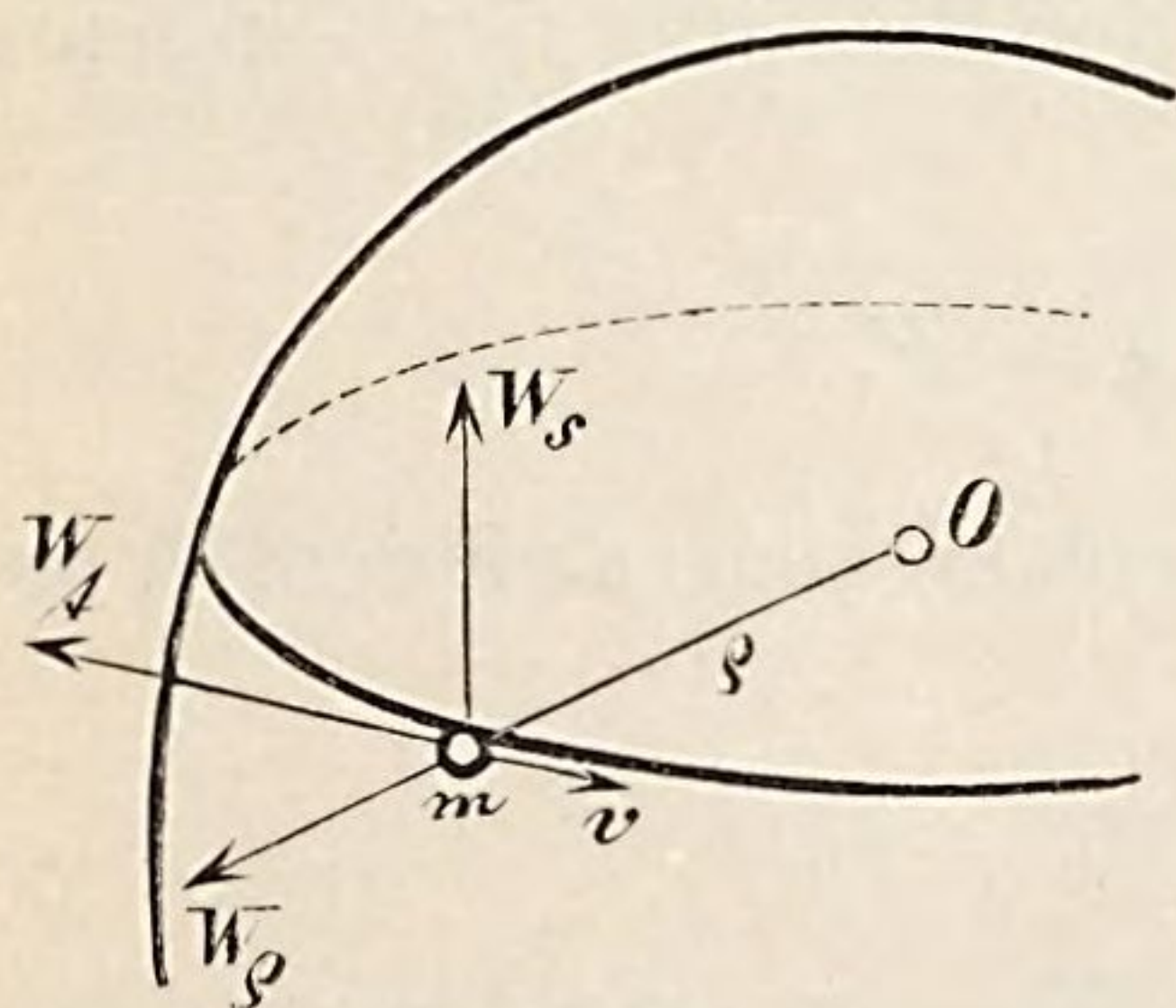


Fig. 167.

Würde W_ρ negativ und der Körper in eine concave Bahn übertreten, so würde

$$- W_\rho = P \cdot \cos \beta - \frac{m \cdot v^2}{\varrho}$$

oder
$$W_\rho = \frac{m \cdot v^2}{\varrho} - P \cdot \cos \beta;$$

daher gilt als Bedingung zum Verbleib auf der concaven Fläche

$$\frac{m \cdot v^2}{\varrho} > P \cdot \cos \beta.$$

Würde die Kraft P vom concaven Theil abgewendet liegen,

$$P \cdot \cos \beta \text{ also}$$

radial auswärts fallen,

so wäre

$$W_\rho = \frac{m \cdot v^2}{\varrho} + P \cdot \cos \beta,$$

wodurch ebenfalls der Verbleib auf der Fläche ausgesprochen ist.

Die beschleunigende Kraft in der Richtung der Tangente ist stets, wie oben gezeigt,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos \alpha - F.$$

Die Fälle 3), 2) und 1) ergeben sich aus dem Vorstehenden folgendermassen:

$$3) \quad \gamma = 0; \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

$$2) \text{ und } 1) \quad \gamma = 0; \quad \beta = 90^\circ - \alpha; \quad \varrho = \infty.$$

5.

Die Arbeit der Effectivkraft R .

Ist die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes c , die Endgeschwindigkeit v nach Ablauf der Zeit t , so gilt nach dem Princip der lebendigen Kräfte

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int R \cdot ds \cdot \cos \varphi,$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int P \cdot \cos \alpha \cdot ds + \int W \cdot \cos \alpha_1 \cdot ds,$$

weil die Arbeit der Resultirenden gleich der algebraischen Summe der Arbeiten der Seitenkräfte ist, die Arbeiten der Radialcomponenten gleich Null sind und nur die Tangentialcomponenten Arbeit verrichten.

Ist der tangentiale Widerstand die Reibung

$$W \cdot \cos \alpha_1 = f \cdot N,$$

so gilt

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int P \cdot \cos \alpha \cdot ds - f \cdot \int N \cdot ds.$$

Hierin hängt der Normaldruck N von der Centrifugalkraft, also von der Geschwindigkeit ab, weshalb erstere nicht unmittelbar aus dieser Gleichung gefunden werden kann.

Ist kein tangentialer Widerstand vorhanden oder wird derselbe vernachlässigt, so gilt wie früher

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int P \cdot \cos \alpha \cdot ds.$$

Alle anderen Fälle sind als specielle hierin enthalten.

6.

Gleichgewicht eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn.

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist ein „freier“ materieller Punkt im Gleichgewicht, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte bei keiner unendlich kleinen Verschiebung des materiellen Punktes Arbeit verrichten oder demselben eine Geschwindigkeitsänderung ertheilen. Dieser Satz muss, auf die Bewegung eines materiellen Punktes auf „vorgeschriebener Bahn“ angewendet, eine Modification erleiden.

Gleichgewicht findet am materiellen Punkt auf vorgeschriebener Bahn statt, wenn für jede unendlich kleine Verschiebung in der Bahnfläche keine Beschleunigung, also keine Zunahme der lebendigen Kraft eintritt, und „wenn die bewegende Kraft nicht dahin strebt, die angegriffene Masse von der Bahnfläche nach der freien Seite hin zu führen“, wenn eine solche vorhanden ist.

Für die virtuelle Verschiebung in der Bahnfläche giebt dies die Bedingung des Gleichgewichtes

$$0 = P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s + W \cdot \cos \alpha_1 \cdot \delta s.$$

Ist ein tangentialer Widerstand nicht vorhanden, so wird diese Gleichung

$$0 = P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s.$$

Ist die vorgeschriebene Bahn von der Art, dass eine Verschiebung nur in einer Curve möglich, wenn sich etwa die Masse m in einer Röhre bewegen muss, so genügt die einzige Verschiebung nach einem Elemente δs dieser Curve, um zu sehen, ob Gleichgewicht vorhanden ist. Dies ist der Fall, wenn die Arbeit für diese Verschiebung Null ist.

Hat man eine Fläche, in welcher sich die Masse bewegen muss, und aus welcher sie nach keiner Seite hin austreten kann, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn für zwei gegen einander geneigte Verschiebungen δs in dieser Fläche die Arbeit der Kraft gleich Null ist; die Kraft P oder die Resultirende aus den bewegenden Kräften steht dann normal auf dieser Fläche.

Ist endlich die Bahn durch eine Fläche vorgeschrieben, aus welcher die Masse nach einer Seite hin austreten kann, nicht aber nach der anderen, so kommt zu diesen beiden Bedingungen noch die dritte, dass die Masse durch die Kraft P nicht nach der freien Seite der Bahnfläche getrieben wird. Da die Kraft P nach den Bedingungen des vorhergehenden Falles normal auf der Fläche steht, so ist diese Bedingung erfüllt, wenn für eine fingirte Verschiebung δs

nach der freien Seite hin der Winkel α ein stumpfer, die Arbeit

$$P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s$$

also negativ ist.

Man kann also sagen: „Kräfte sind an einem Punkte im Gleichgewichte, wenn sie bei keiner zulässigen unendlich kleinen Verschiebung eine positive Arbeit geben“.

Ist dagegen ein tangentialer Widerstand, wie Reibung, vorhanden, so bleiben die beiden ersten Fälle ungeändert, wenn man zu den bewegenden Kräften noch diesen tangentialen Widerstand hinzunimmt; die Resultirende aus den bewegenden Kräften und diesem tangentialen Widerstande muss für's Gleichgewicht normal auf der Bahnfläche stehen. Bei dem dritten Falle wird aber bei der Verschiebung aus der Bahnfläche hinaus kein Widerstand der Bahn entgegenwirken, und dort wird daher der obige Satz nicht mehr richtig sein; wohl aber wird für eine Verschiebung normal zur Bahnfläche die Arbeit der bewegenden Kräfte negativ sein müssen, wenn diese die Masse gegen die Bahn drücken sollen, was für's Gleichgewicht nothwendig ist. Man kann also hier den Satz aufstellen, „dass für drei aufeinander rechtwinkelige, zulässige Verschiebungen, von welchen nothwendig zwei in der Fläche liegen, die Summen der Arbeiten der bewegenden Kräfte und des Bahnwiderstandes gegen diese Verschiebungen nicht positiv werden dürfen, wenn Gleichgewicht vorhanden sein soll“.

Für die Ruhe der betrachteten Masse ist nur nothwendig, dass bei den Verschiebungen in der Bahnfläche die Arbeit des Widerstandes, der immer diesen Verschiebungen entgegengesetzt, stets eine negative Arbeit giebt, überwiegt über die Arbeit der bewegenden Kraft, wozu noch die Bedingung kommt, dass diese die Masse nicht von der Bahnfläche wegtreibt. Für zwei direct entgegengesetzte Verschiebungen in der Bahnfläche wird $P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s$ einmal positiv und einmal negativ; ist daher

$$P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s + W \cdot \cos \alpha \cdot \delta s$$

für beide negativ, so wird die Masse unter dem Einflusse dieser Kräfte und des tangentialen Bahnwiderstandes in Ruhe bleiben, da der überwiegende Widerstand keine Bewegung hervorbringt. Die dritte Bedingung bleibt $P \cdot \cos \alpha \cdot \delta s$ negativ für eine Verschiebung δs normal zur Bahnfläche. Man kann also sagen, „Kräfte theilen einer ruhenden Masse, die aus einer Fläche nur nach einer Seite austreten kann, keine Bewegung mit, wenn die Summen ihrer Arbeiten und der Arbeit des Bahnwiderstandes für jede unendlich kleine Verschiebung in der Fläche hin normal auf letztere nie positiv werden“.

Bewegung eines materiellen Punktes m ohne einen der Bewegung entgegen gerichteten Widerstand auf einer schiefen Ebene unter Einfluss einer nach Grösse und Richtung constanten Kraft P (Fig. 168).

Gesucht wird bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit c und gegebenem Wege l in der Richtung der schiefen Ebene die geleistete mechanische Arbeit L , die Endgeschwindigkeit v , die Beschleunigung p_1 in der Richtung der schiefen Ebene und ausserdem die Zeit t zur Durchlaufung des Weges l .

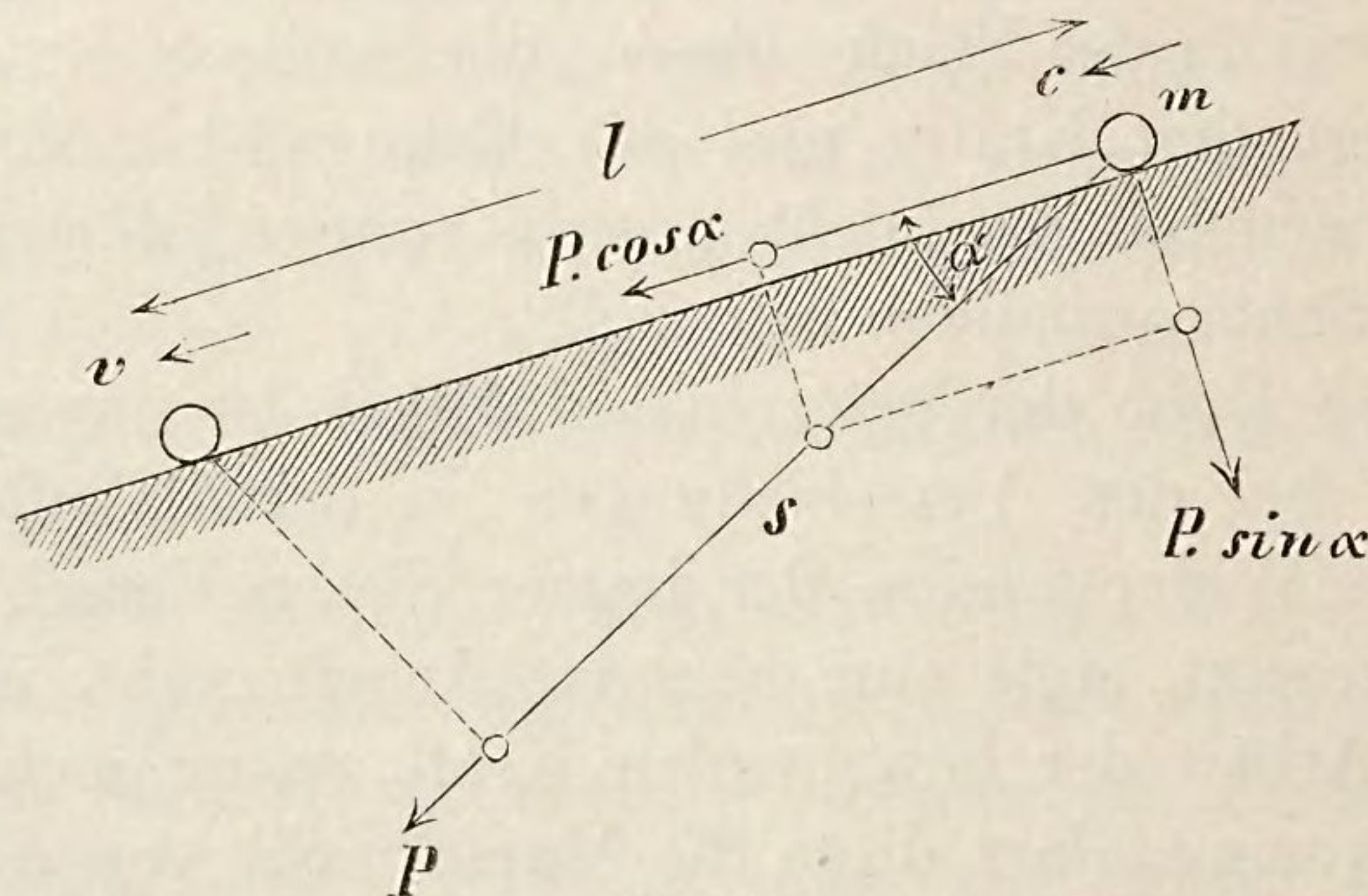


Fig. 168.

Allgemein gilt

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int P \cdot \cos \alpha \cdot ds,$$

hier also die Arbeit

$$L = P \cdot \cos \alpha \cdot l$$

oder

$$L = P \cdot s.$$

[Wäre Reibung F vorhanden, so wäre

$$\begin{aligned} L &= P \cdot s - F \cdot s, \\ &= (P - f \cdot N) \cdot s, \end{aligned}$$

worin $N = P \cdot \sin \alpha$ ist.]

Somit lässt sich schreiben

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = P \cdot s$$

oder

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{c^2 + 2 \cdot \frac{P}{m} \cdot s} \\ &= \sqrt{c^2 + 2 \cdot p \cdot s}, \end{aligned}$$

worin p die Beschleunigung in der Richtung der Kraft P bedeutet.

Die Beschleunigung in der Richtung der Bahn ist

$$p_1 = \frac{R}{m} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{m} = p \cdot \cos \alpha,$$

und die Zeit t ergibt sich aus der Weg-Gleichung

$$l = c \cdot t + \frac{p_1 \cdot t^2}{2}$$

oder aus

$$t^2 + \frac{2 \cdot c}{p_1} \cdot t = \frac{2 \cdot l}{p_1}$$

zu

$$t = -\frac{c}{p_1} + \sqrt{\frac{c^2}{p_1^2} + \frac{2 \cdot l}{p_1}}.$$

Wäre nun beispielsweise die bewegende Kraft P gleich dem Gewichte $G = m \cdot g$ (Fig. 169) des Körpers und $s = h$ gleich dem verticalen Höhenunterschied zwischen Anfangs- und Ausgangspunkt der Bewegung, dann würde gelten:

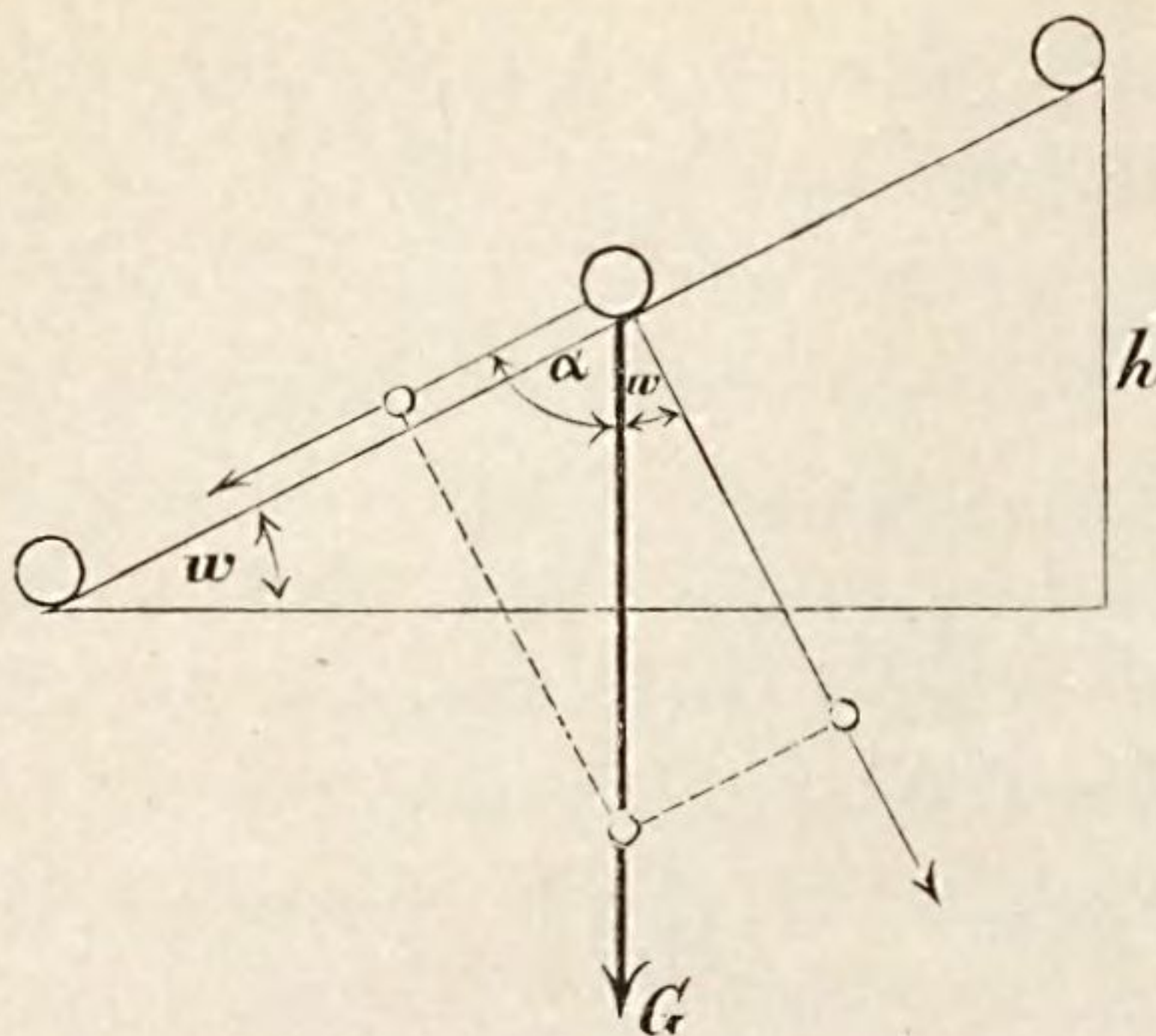


Fig. 169.

$$L = G \cdot h,$$

$$N = G \cdot \sin \alpha,$$

$$v = \sqrt{c^2 + 2 \cdot g \cdot h},$$

$$p_1 = \frac{m \cdot g \cdot \cos \alpha}{m} = g \cdot \cos \alpha.$$

Ist w der Neigungswinkel der Bahn zur Horizontalen, also

$$\alpha = 90^\circ - w,$$

dann ist auch

$$p_1 = g \cdot \sin w,$$

und falls die Bahn horizontal, also

$$w = 0 \text{ ist,}$$

$$\text{auch} \quad p_1 = 0.$$

In der Gleichung für die Endgeschwindigkeit v kommt der Neigungswinkel der Bahn nicht vor, weshalb ohne Rücksicht auf Widerstände — für verschieden geneigte Bahnen von gleicher Höhe h — die Endgeschwindigkeiten v bei gleichen Anfangsgeschwindigkeiten c dieselben sein müssen (Fig. 170).

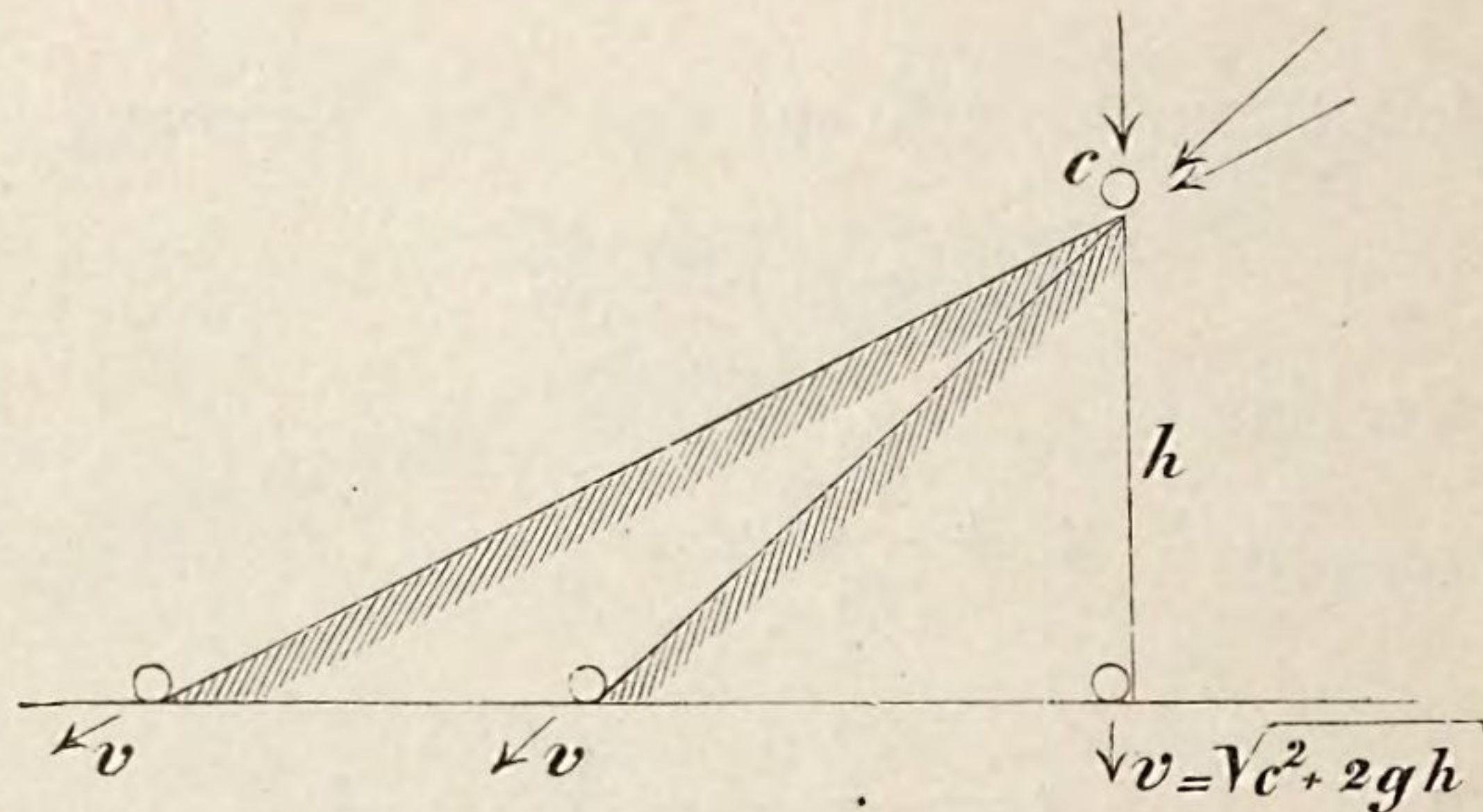


Fig. 170.

Die Gleichung für die Zeit t liefert

$$t = -\frac{c}{g \cdot \sin w} + \sqrt{\frac{c^2}{g^2 \cdot \sin^2 w} + \frac{2 \cdot l}{g \cdot \sin w}}.$$

Ist $c = 0$, dann ist

$$t = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \left(\frac{l}{\sin w} \right)}.$$

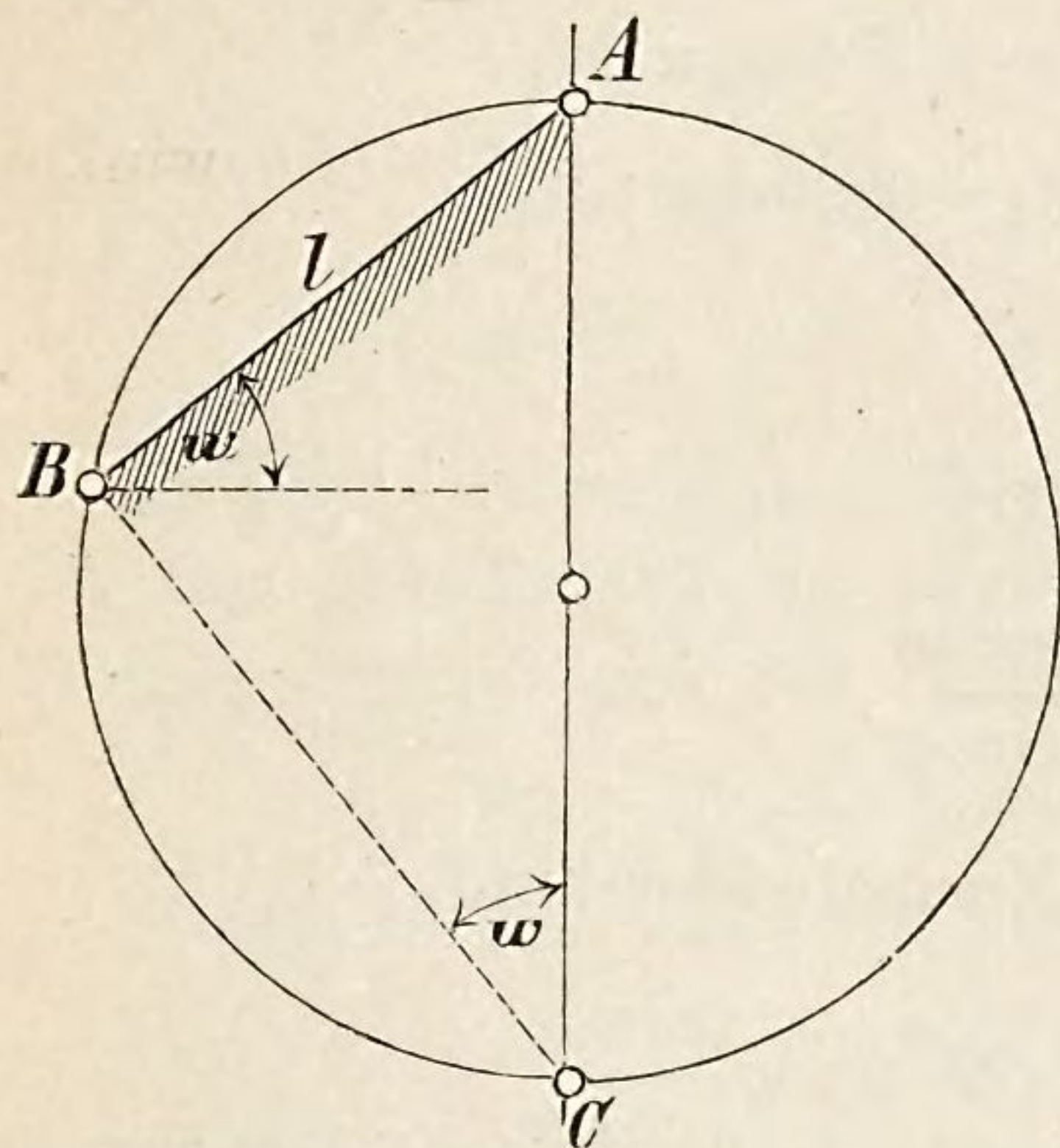


Fig. 171.

Zieht man nun in einem Kreise (Fig. 171) den verticalen Durchmesser AC , die unter dem beliebigen Winkel w zur Horizontalen geneigte vorgeschriebene Bahn $AB = l$ und schliesslich BC , so ergibt sich

$$\frac{l}{\sin w} = AC \text{ constant,}$$

weshalb „alle Bahnen AB im Kreise von verschiedener Länge l und verschiedener Neigung w in gleichen Zeiten durchlaufen werden.“

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer schiefen Ebene ohne einen der Bewegung entgegenstehenden Widerstand, aber unter dem Einfluss des Gewichtes vom materiellen Punkte und einer Kraft P (Fig. 172).

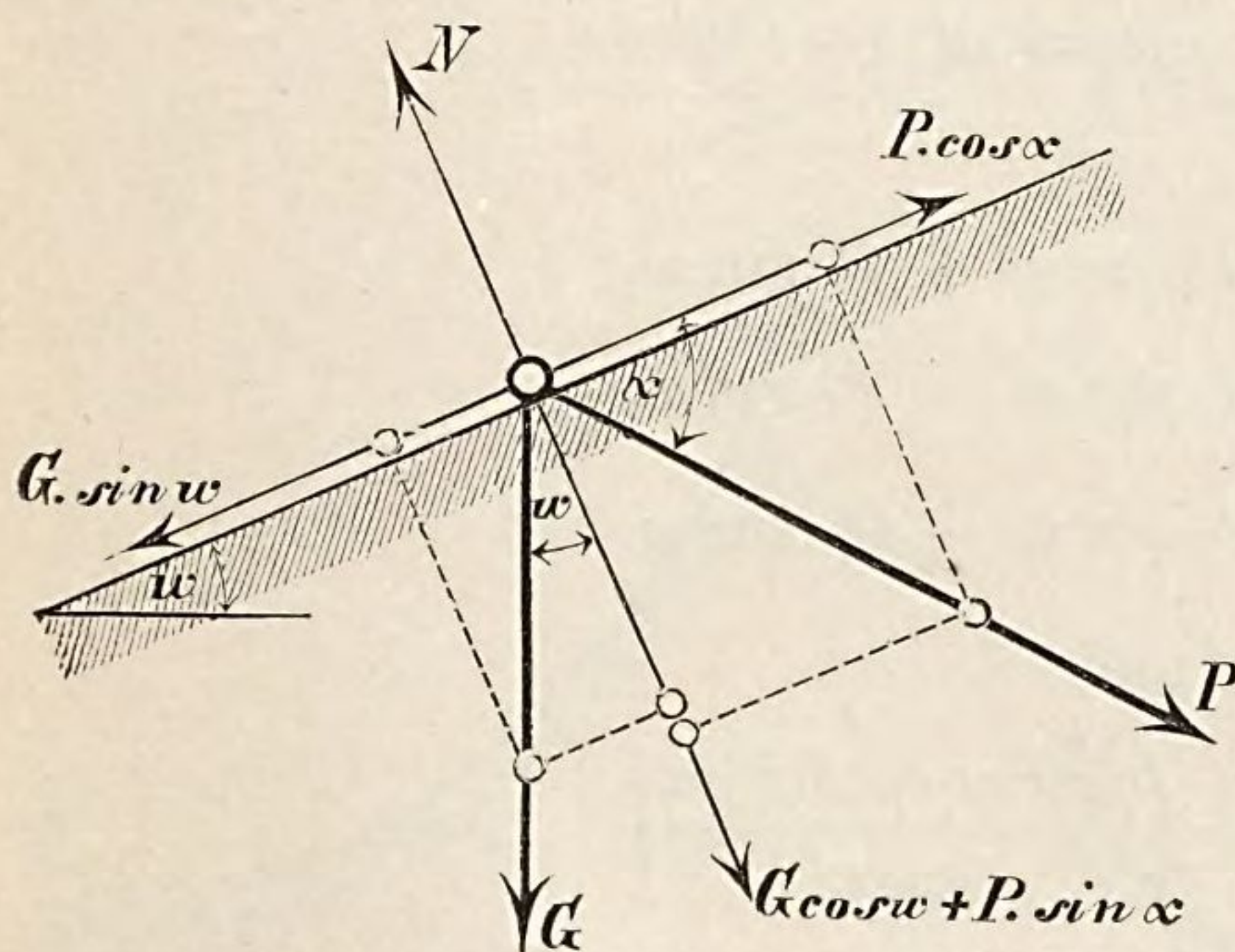


Fig. 172.

Zerlegt man sowohl das Gewicht G als auch die Kraft P normal und parallel zur schiefen Ebene, so ergibt sich mit Bezug auf Fig. 172 der Normalwiderstand der Bahn durch

$$N = G \cdot \cos w + P \cdot \sin \alpha$$

und die den materiellen Punkt in der Richtung der Bahn beschleunigende Kraft

a) für $P \cdot \cos \alpha < G \cdot \sin w$

durch $R = G \cdot \sin w - P \cdot \cos \alpha,$

b) für $P \cdot \cos \alpha > G \cdot \sin w$

durch $-R = G \cdot \sin w - P \cdot \cos \alpha$

oder $R = P \cdot \cos \alpha - G \cdot \sin w;$

c) für $P \cdot \cos \alpha = G \cdot \sin w$

$$R = 0,$$

$$P = G \cdot \frac{\sin w}{\cos \alpha},$$

und durch Einsetzung folgt der Normalwiderstand

$$\begin{aligned} N &= G \cdot \cos w + G \cdot \sin w \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= G \cdot (\cos w + \sin w \cdot \operatorname{tg} \alpha). \end{aligned}$$

Im ersten Falle findet abwärts gerichtete beschleunigte, im zweiten Falle aufwärts gerichtete beschleunigte Bewegung und im dritten Falle gleichförmige Bewegung auf oder ab oder Ruhe statt.

1) Spezieller Fall: Ist die Kraft P parallel der Basis der schiefen Ebene, also

$$\alpha = w,$$

dann folgt

$$N = G \cdot \cos w + P \cdot \sin w,$$

ferner unter a) $R = G \cdot \sin w - P \cdot \cos w,$

unter b) $R = P \cdot \cos w - G \cdot \sin w$

und unter c) $R = 0$ und

$$N = G \cdot \left(\frac{\cos^2 w + \sin^2 w}{\cos w} \right)$$

oder $N = \frac{G}{\cos w}.$

2) Spezieller Fall: Die Kraft liege parallel zur schiefen Ebene aufwärts, es sei also

$$\alpha = 0,$$

dann ist

$$N = G \cdot \cos w,$$

$$\text{unter a) } R = G \cdot \sin w - P,$$

$$\text{unter b) } R = P - G \cdot \sin w,$$

$$\text{unter c) } R = 0.$$

3) Spezieller Fall: Wird α negativ, d. h. fällt die Kraft P von der schiefen Ebene abgewendet, so wird die Componente $P \cdot \sin \alpha$ negativ und der Normaldruck

$$N = G \cdot \cos w - P \cdot \sin \alpha;$$

und wird $N = 0$ oder negativ, d. h.

$$G \cdot \cos w \leq P \cdot \sin \alpha,$$

so verlässt der Punkt die vorgeschriebene Bahn.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer einfach gekrümmten Körperoberfläche unter dem Einfluss einer nach Grösse und Richtung constanten Kraft P und unter Vernachlässigung eines der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes (Fig. 173 und 174).

Allgemein ist unter Vernachlässigung des Widerstandes

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha,$$

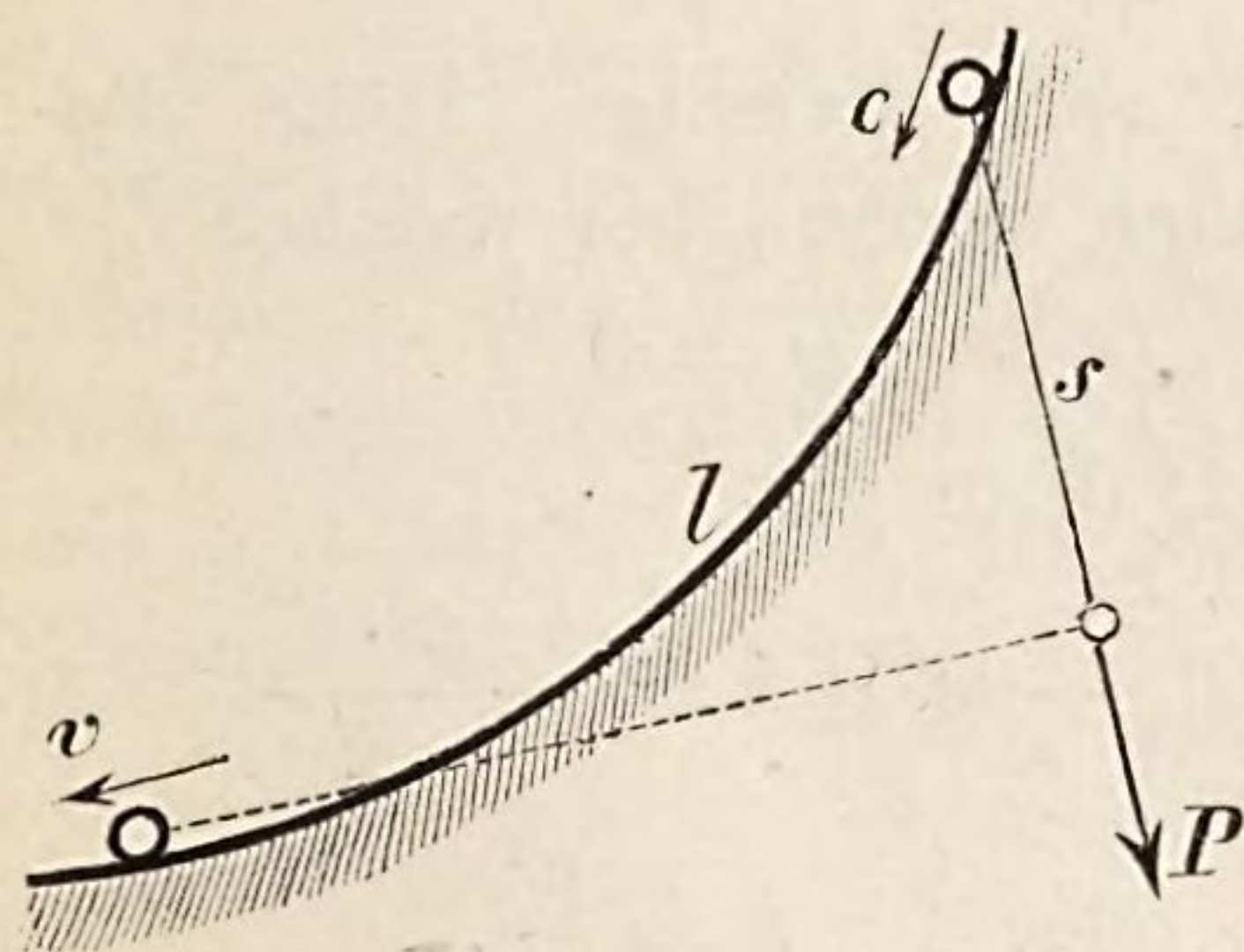


Fig. 173.

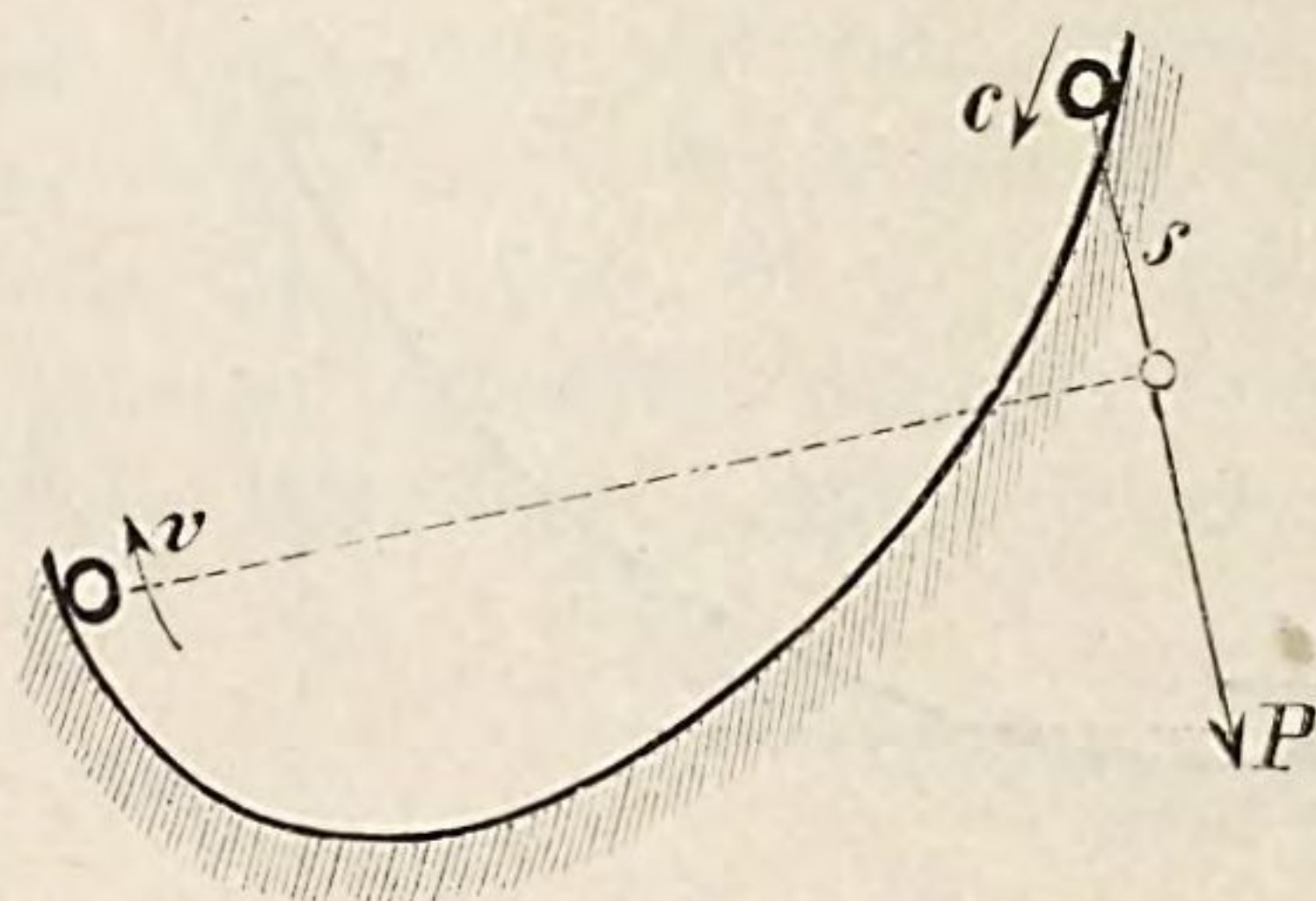


Fig. 174.

hier also

$$P \cdot s = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2}$$

oder $v = \sqrt{c^2 + 2 \cdot p \cdot s}.$

Die beschleunigende Kraft in der Richtung der Bewegung ist hingegen

$$P_t = m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos \alpha.$$

Wäre $P = G = m \cdot g$, dem Gewichte des materiellen Punktes, und $s = h$ gleich dem verticalen Höhenunterschied zwischen Anfangs- und Ausgangspunkt der Bewegung (Fig. 175), so wäre

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2}$$

und $v = \sqrt{c^2 + 2 \cdot g \cdot h}.$

Da nun, wie hieraus folgt, die Endgeschwindigkeit v nicht von der Form der krummlinig vorgeschriebenen Bahn, sondern nur von der Anfangsgeschwindigkeit und dem verticalen Höhenunterschied abhängig ist, so er-

hält der materielle Punkt auf verschiedenen krummen Bahnen bei demselben h gleiche Endgeschwindigkeit v .

Wird ein Punkt mit einer Anfangsgeschwindigkeit c auf der einfach gekrümmten Bahn aufwärts bewegt (Fig. 176), dann gilt

$$- m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2},$$

und soll diejenige Höhe bestimmt werden, bei welcher

$$v = 0$$

wird, dann gilt

$$- m \cdot g \cdot h = - \frac{m \cdot c^2}{2}$$

oder $h = \frac{c^2}{2g}.$

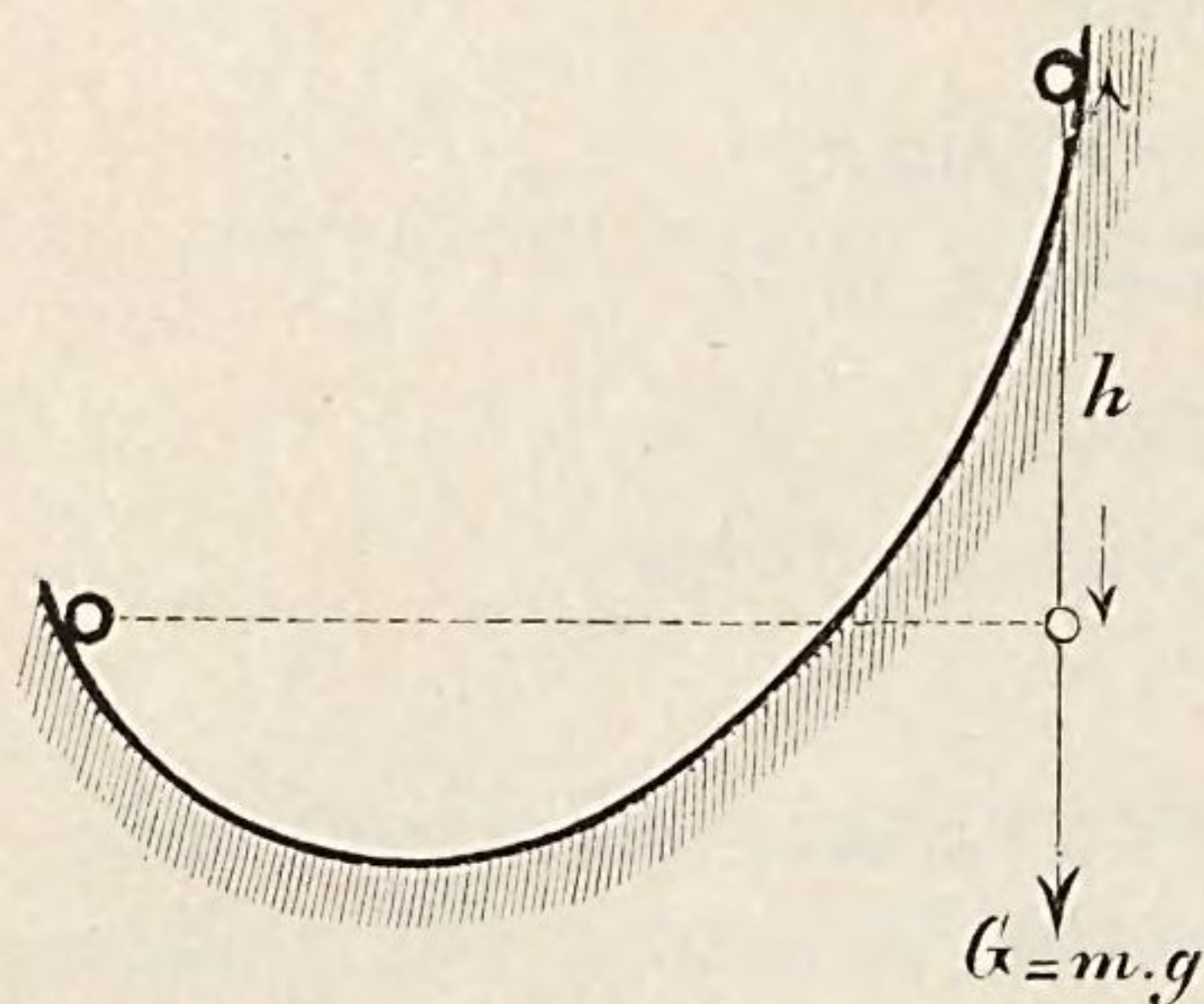


Fig. 175.

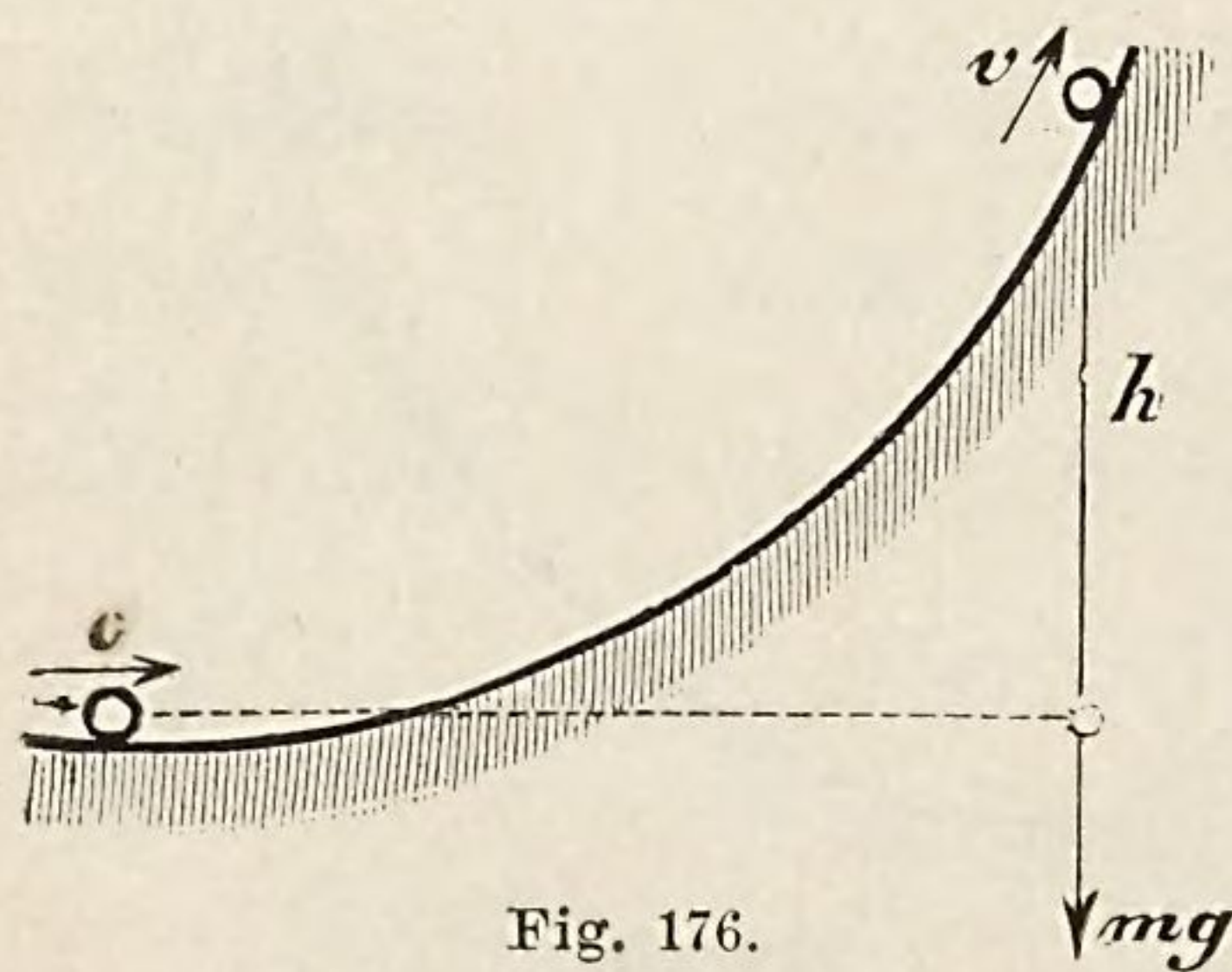


Fig. 176.

Bewegung eines materiellen Punktes in einem verticalen Kreise, in einem horizontalen Hohl- oder auf einem Massiv-Cylinder unter dem Einfluss des Gewichtes und unter Vernachlässigung des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes (Fig. 177).

Der Punkt besitze im Anfange seiner Bewegung in dem verticalen Kreise, in A , die Anfangsgeschwindigkeit c , in einem beliebigen Punkte B hingegen die Geschwindigkeit v , dann gilt,

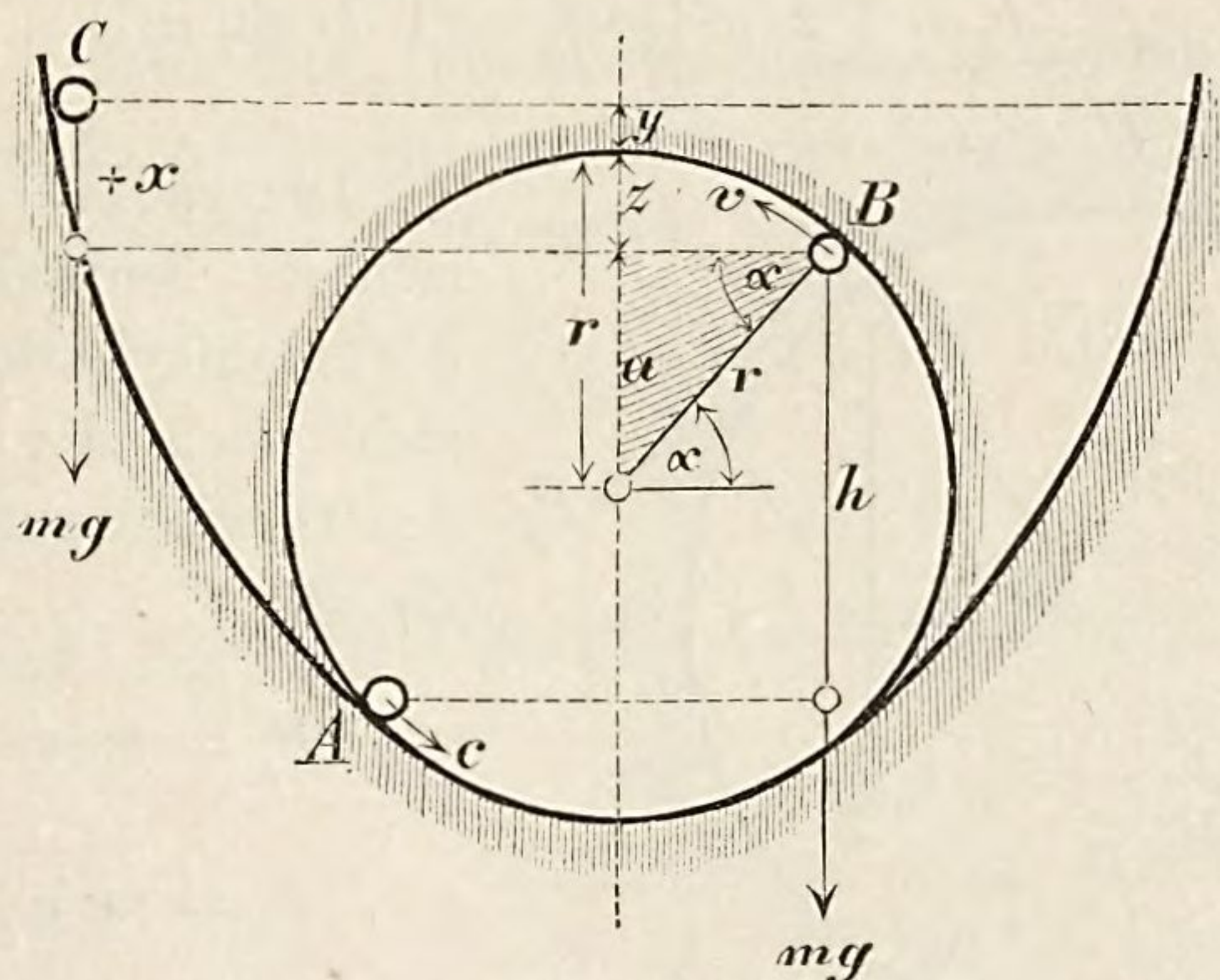


Fig. 177.

da $G = m \cdot g$ constant und h der verticale Höhenunterschied zwischen A und B ist,

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = -m \cdot g \cdot h$$

und $v = \sqrt{c^2 - 2 \cdot g \cdot h}.$

Die Geschwindigkeit c in A kann man sich nun dadurch erzeugt denken, dass sich der materielle Punkt in einer tangential in den Kreis einlaufenden Curve CA , in C mit einer Anfangsgeschwindigkeit Null beginnend, abwärts bewegt; folglich gilt auch, wenn der verticale Höhenunterschied zwischen C und B gleich x ist,

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot x$$

oder $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot x}.$

Nun kann aber nach Fig. 177 auch gesetzt werden

$$x = y + z,$$

$$z = r - a$$

und $a = r \cdot \sin \alpha;$

deshalb ist $z = r - r \cdot \sin \alpha = r \cdot (1 - \sin \alpha),$

$$x = y + r \cdot (1 - \sin \alpha)$$

und endlich $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot [y + r \cdot (1 - \sin \alpha)]}.$

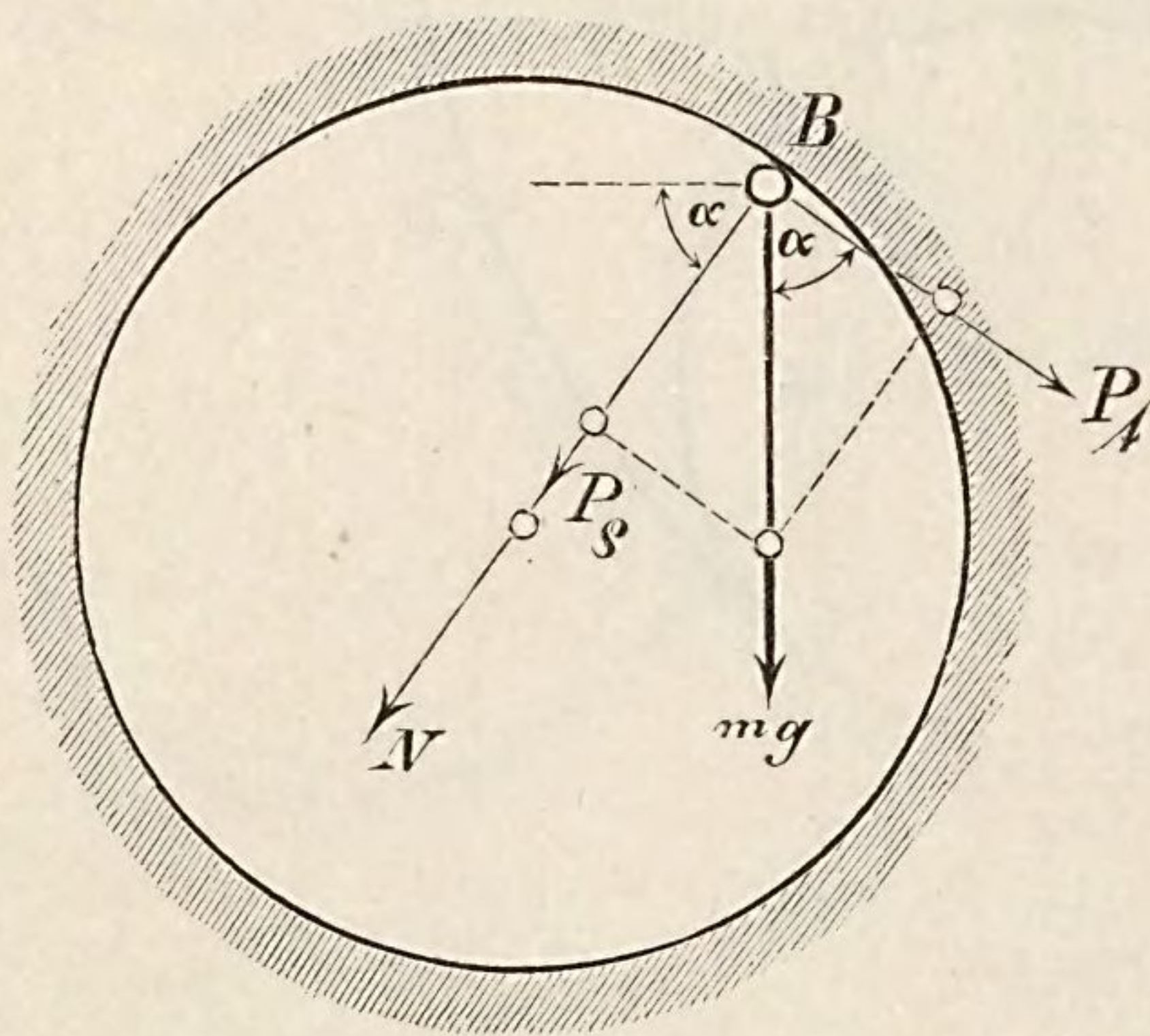


Fig. 178.

Der radial einwärts gerichtete Normalwiderstand des Hohlcyinders ergibt sich nach der Zerlegung des Gewichtes (Fig. 178). Es gilt

$$P_t = m \cdot g \cdot \cos \alpha,$$

$$P_r = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

und folglich, da $\varrho = r$ constant ist,

$$N = \frac{m \cdot v^2}{r} - m \cdot g \cdot \sin \alpha,$$

$$N = m \cdot \left(\frac{v^2}{r} - g \cdot \sin \alpha \right).$$

Setzt man nun in diesen Ausdruck den oben gefundenen Werth für die Geschwindigkeit v ein, so folgt

$$N = m \cdot \left\{ \frac{2 \cdot g \cdot y}{r} + 2 \cdot g \cdot (1 - \sin \alpha) - 2 \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha}{2} \right\}$$

oder

$$N = 2 \cdot G \cdot \left\{ \frac{y}{r} + 1 - \frac{3}{2} \cdot \sin \alpha \right\}.$$

III. Unfreie od. gezwungene Bewegung eines materiellen Punktes. 233

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass der Normal-Bahnwiderstand am kleinsten wird für

$$\sin \alpha = 1$$

$$\text{oder für} \quad \alpha = 90^\circ,$$

d. i. im höchsten Punkt des Kreises; hierfür ist

$$N = 2 \cdot G \cdot \left(\frac{y}{r} - \frac{1}{2} \right).$$

Soll der materielle Punkt in dieser höchsten Stelle die Kreisbahn nicht verlassen, so darf der letzte Werth nie Null werden; das geschieht aber, wenn

$$\frac{y}{r} > \frac{1}{2}$$

bleibt, oder

$$y > \frac{r}{2} \quad (\text{Princip einer Centrifugalbahn}).$$

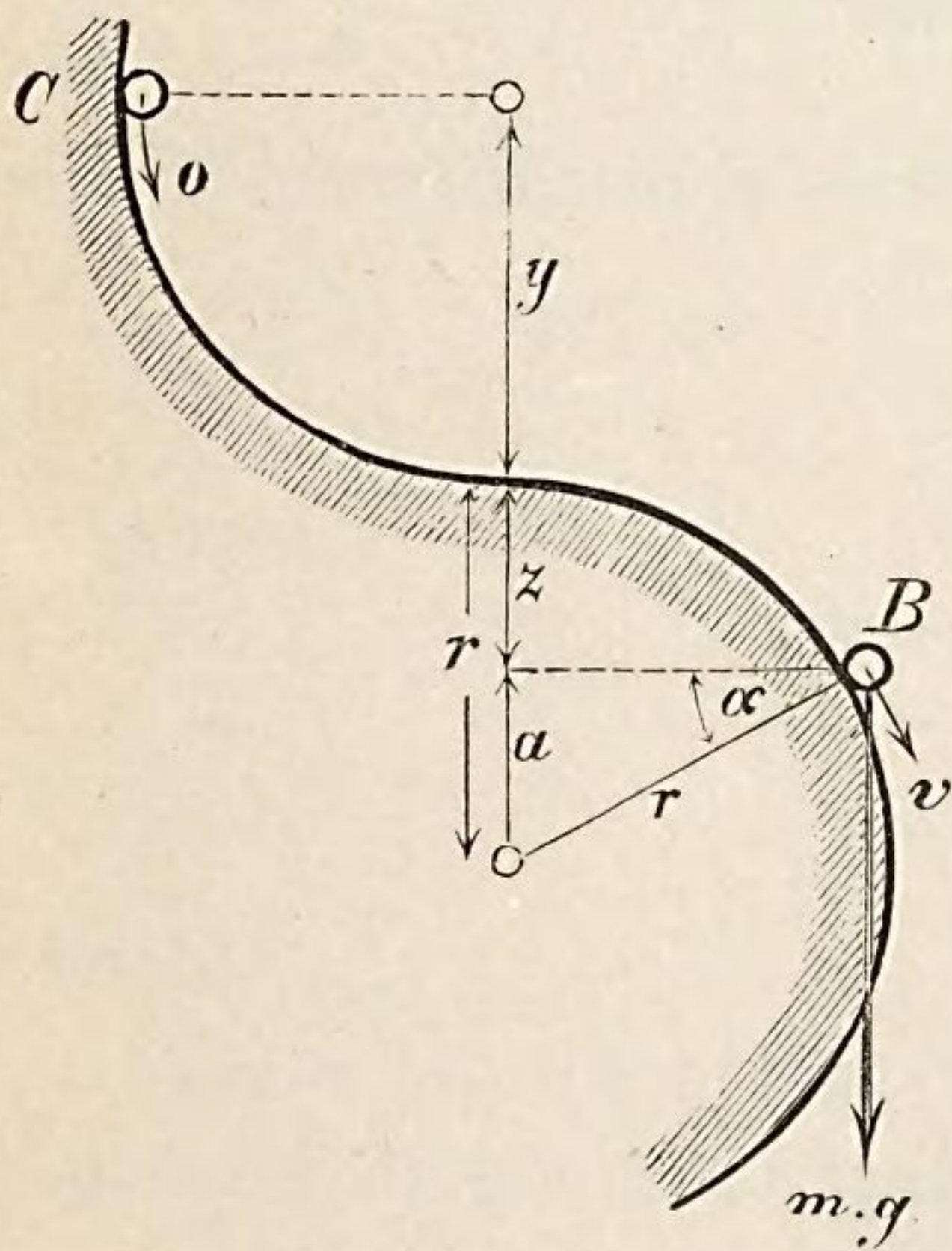


Fig. 179.

Würde nun weiter ein materieller Punkt aus einer verticalen Curve auf die Oberfläche eines Cylinders übergehen (Fig. 179), so würde in einem Punkte *B* der Normaldruck Null und hierauf negativ werden, d. h. der Punkt die vorgeschriebene Bahn verlassen.

Diese Stelle *B* bestimmt sich durch

$$0 = 2 \cdot G \cdot \left(\frac{y}{r} + 1 - \frac{3}{2} \sin \alpha \right)$$

oder

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{y}{r} + 1 \right),$$

und die Geschwindigkeit *v*, mit welcher die Cylinderoberfläche verlassen wird, ist — wie oben —

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (y + z)}.$$

Bewegung eines materiellen Punktes ohne tangentialen Widerstand unter dem Einfluss seines Gewichtes G in einer vorgeschriebenen verticalen Cycloidenbahn (Cycloidenpendel, Fig. 180 und 181).

Beginnt die Bewegung des Punktes mit der Geschwindigkeit $c = 0$ in A (Fig. 180) und legt derselbe in der Zeit t den Weg $s = Am$ zurück, so berechnet sich die Endgeschwindigkeit aus der allgemeinen Gleichung

$$\int P \cdot ds \cdot \cos \varphi = \frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2}.$$

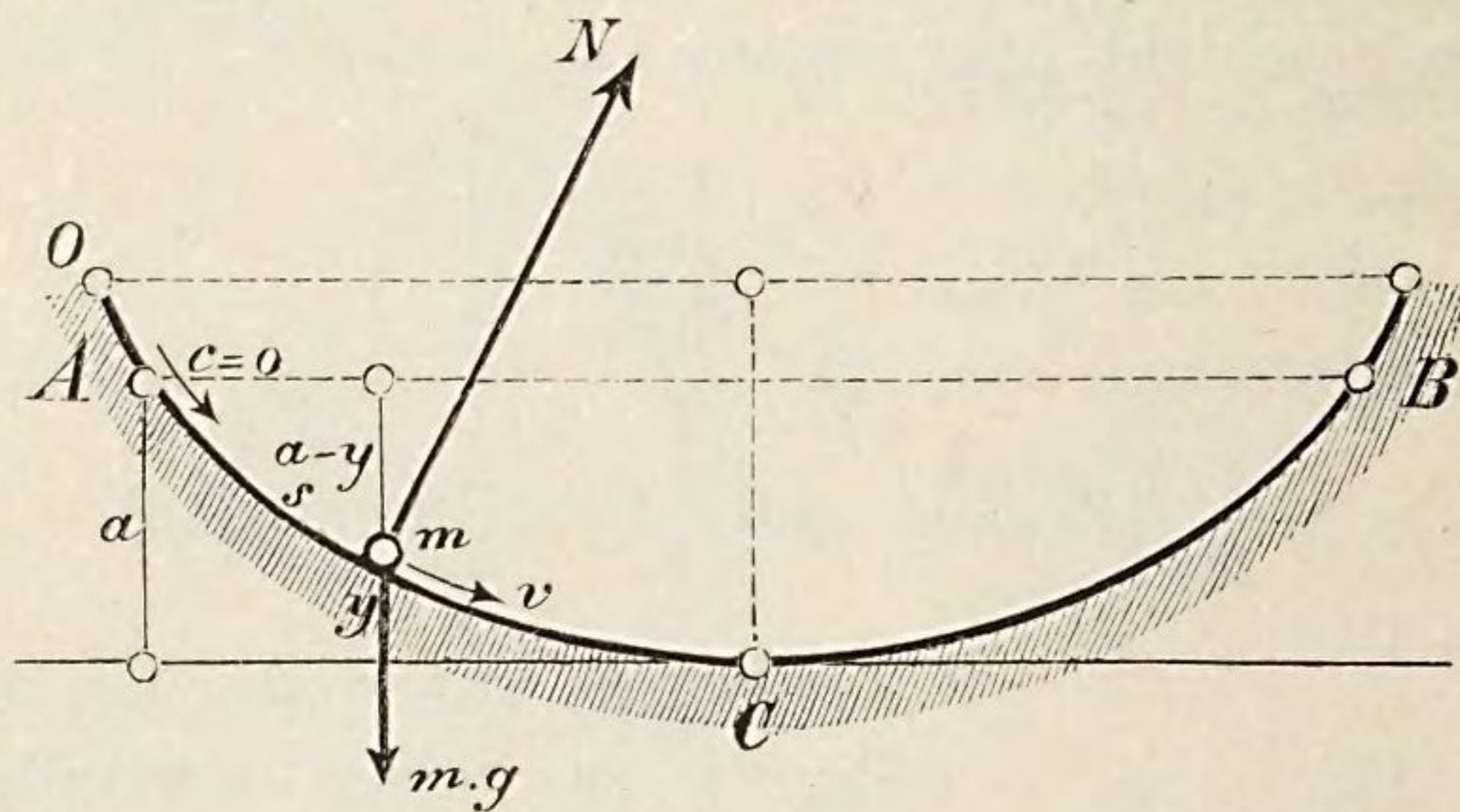


Fig. 180.

Hierin ist im vorliegenden Falle

$$P = G,$$

$$\int ds \cdot \cos \varphi = (a - y),$$

$$m = \frac{G}{g},$$

$$c = 0,$$

folglich ergibt sich

$$G \cdot (a - y) = G \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

oder

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2 \cdot g \cdot (a - y)}.$$

Nun entsteht die Cycloide durch Abrollen eines Kreises vom Halbmesser r (Fig. 181) an der Geraden OM , wobei m als

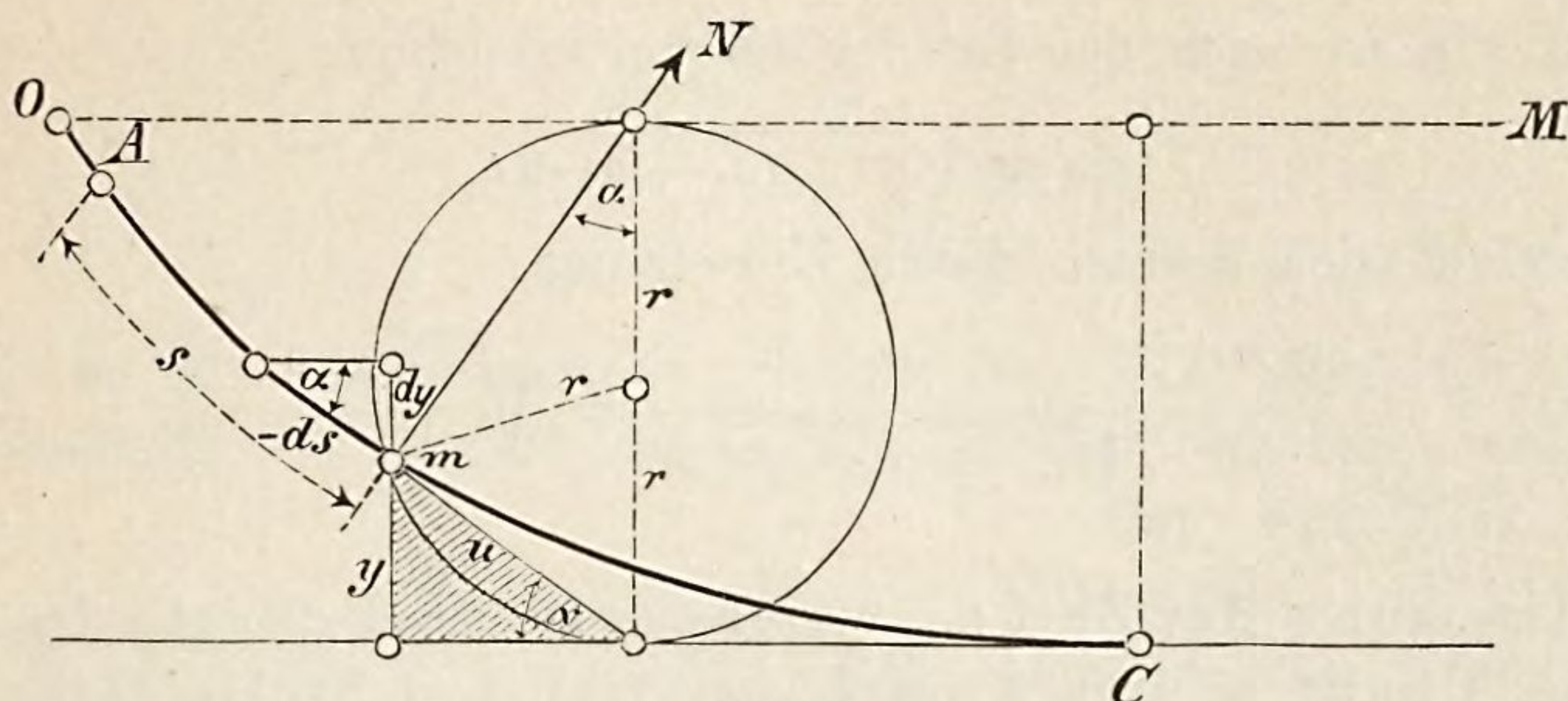


Fig. 181.

beschreibender Punkt anzusehen ist; folglich steht nach der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes mN normal auf der Bahn und bildet u die Tangente. Mit Bezug auf Fig. 181 kann geschrieben werden

$$\sin \alpha = \frac{y}{u}$$

und auch

$$\sin \alpha = \frac{u}{2 \cdot r},$$

mit welchen Werthen sich

$$\frac{y}{u} = \frac{u}{2 \cdot r},$$

$$u = \sqrt{2 \cdot r \cdot y}$$

und

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{y}{2 \cdot r}}$$

ergiebt.

Ferner gilt nach Fig. 181, da ds als ein negatives Wachstum des Weges s zu betrachten ist,

$$\sin \alpha = -\frac{dy}{ds}$$

oder in Verbindung mit dem vorigen Ausdrucke

$$-\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{y}{2 \cdot r}}.$$

Hierin ist nach der Geschwindigkeitsgleichung

$$ds = \sqrt{2 \cdot g \cdot (a - y)} \cdot dt,$$

es ergibt sich deshalb durch Einsetzung

$$-\frac{dy}{\sqrt{2 \cdot g \cdot (a - y)} \cdot dt} = \sqrt{\frac{y}{2 \cdot r}}.$$

Bestimmung der Zeit t_1 , welche erforderlich ist, damit der Punkt m von A nach der tiefsten Stelle C der Bahn gelangt.

Dem Anfangspunkte A entspricht die Ordinate

$$y = a,$$

dem Punkte C die Ordinate

$$y = 0,$$

folglich ist

$$t_1 = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \int_{y=a}^{y=0} \frac{dy}{\sqrt{a \cdot y - y^2}},$$

welcher Werth ohne Rücksicht auf die Grenzen

$$= -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arcsin} \left(\frac{2 \cdot y - a}{a} \right) + C$$

ist. Die Integrationsconstante findet sich für $t = 0$, also für $y = a$ durch

$$0 = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \operatorname{arcsin} 1 + C$$

oder durch

$$C = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{\pi}{2},$$

und es ergibt sich nun schliesslich mit Berücksichtigung der Grenzen

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Liegen die Punkte A und B in gleicher Höhe, und soll der materielle Punkt von A durch C nach B laufen, so wird die erforderliche Zeit

$$T = 2 \cdot t_1$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{g}},$$

und da dieser Ausdruck von der Grösse des Weges AB ganz unabhängig ist, so gilt derselbe für jede Schwingungsweite AB .

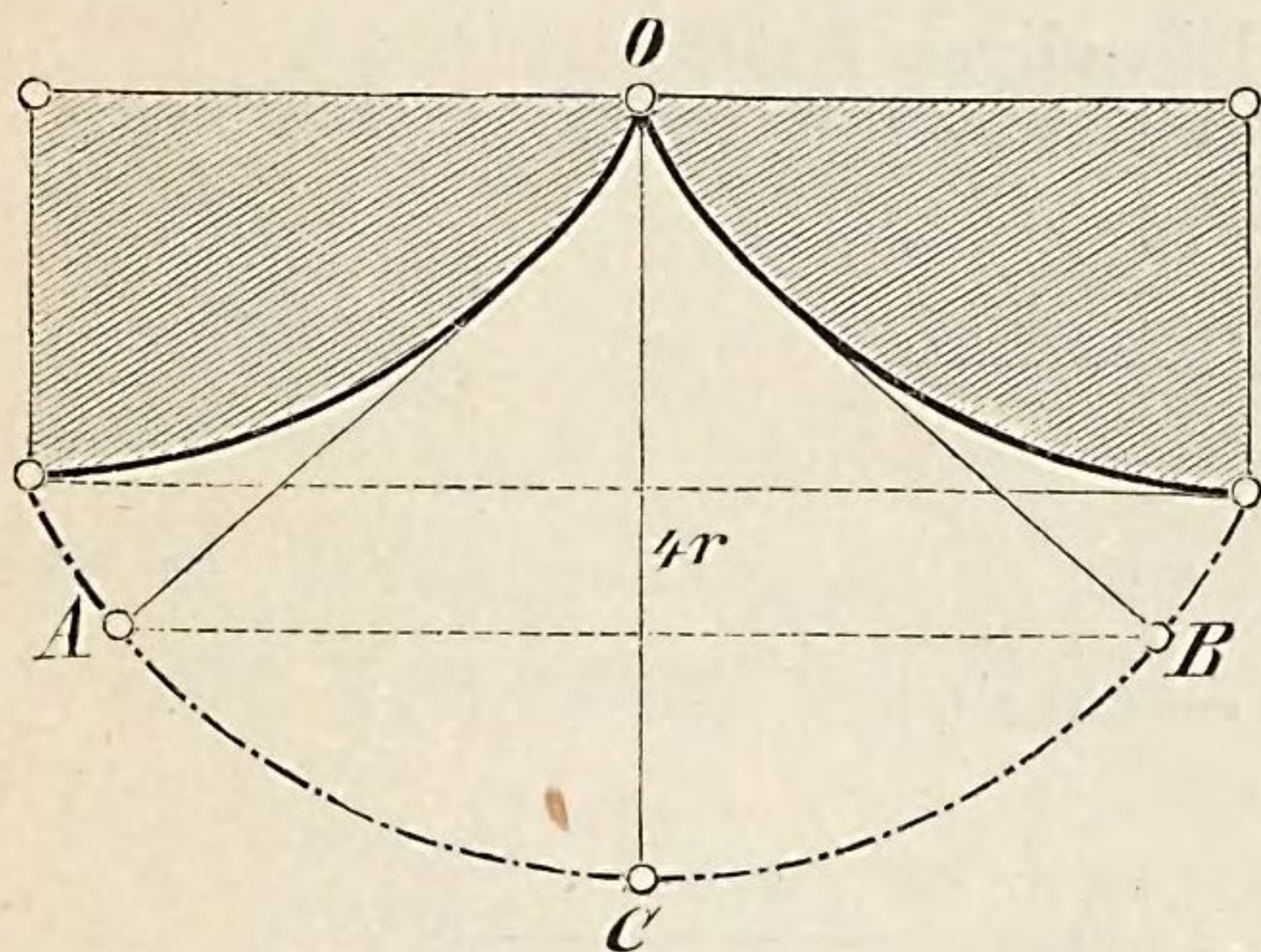


Fig. 182.

Das eigentliche Cycloidenpendel (Fig. 182) entsteht nun, indem man einen materiellen Punkt m an einem gewichtlosen Faden in O (Fig. 182) aufhängt, dessen Länge gleich $4r$, der Länge der halben Cycloide ist, und indem man zu beiden Seiten des Fadens — wie in Fig. 182 — ausgeschnittene Cycloidenhälften

anordnet, welche beim Schwingen des materiellen Punktes die vorgeschriebene Bahn liefern und denselben nöthigen, sich in einer Cycloide ACB zu bewegen.

Mathematisches Kreispendel.

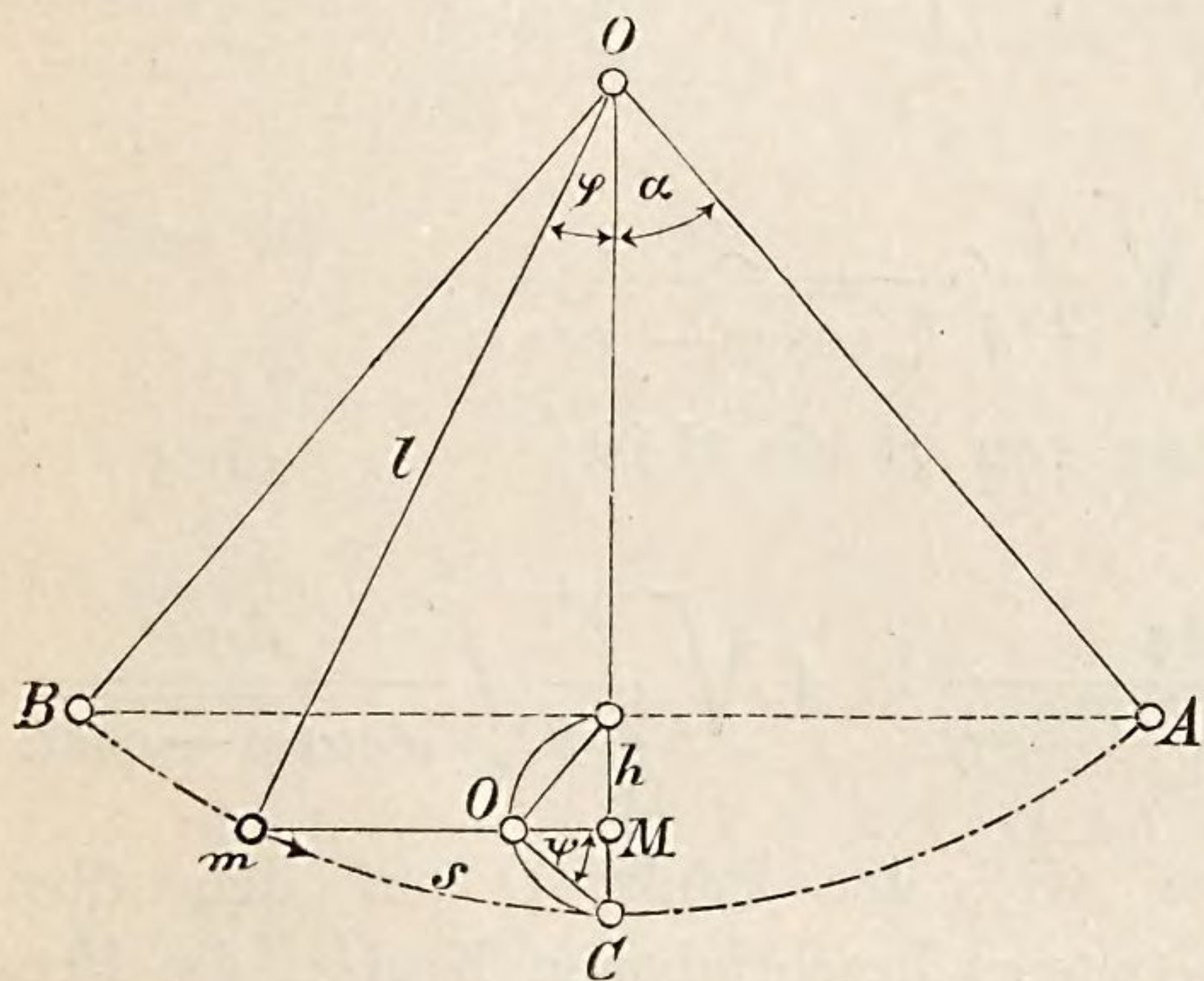


Fig. 183.

Lässt man im vorigen Beispiele die Cycloidenhälften weg, so entsteht das sogenannte mathematische (zum Unterschiede von dem körperlichen oder materiellen) Pendel, bei welchem der materielle Punkt m von A mit der Geschwindigkeit $c=0$ ausgehend in einem Kreisbogen nach dem in derselben

Horizontalen liegenden Punkte B schwingt und in demselben mit der Geschwindigkeit Null anlangt.

Der Weg s des materiellen Punktes werde von der tiefsten Stelle C aus gemessen, und es werde zunächst die Geschwindigkeit v berechnet, welche der Punkt besitzt, wenn er von B bis m (Fig. 183) läuft.

Nach dem Princip der lebendigen Kräfte ist

$$G \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2},$$

es ist aber

$$G = m \cdot g$$

und

$$h = l \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha),$$

also hiermit

$$v = -\frac{ds}{dt} = \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha)};$$

ferner ist

$$s = l \cdot \varphi,$$

$$ds = l \cdot d\varphi,$$

weshalb sich zur Bestimmung der erforderlichen Zeit ergibt

$$-\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}} \cdot \sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}$$

oder

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Die Zeit der Bewegung von B bis C ist

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = +\sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

Statt des Punktes m wird der Punkt O auf dem über dem Durchmesser $l \cdot (1 - \cos \alpha)$ beschriebenen Kreise, die Projection von m , betrachtet.

Es ist nun

$$h = l \cdot (\cos \varphi - \cos \alpha) = l \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi,$$

also

$$\cos \varphi - \cos \alpha = (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi,$$

$$\cos \varphi = \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi,$$

$$\varphi = \arccos [\cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi],$$

$$d\varphi = + \frac{2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - [\cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi]^2}}$$

und also

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \frac{2 \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi}{\sqrt{1 - \cos \alpha} \cdot \cos \psi \cdot \sqrt{1 - [\cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cdot \cos^2 \psi]^2}};$$

das ist nach Ausmultiplication und Einführung von $1 - \sin^2 \psi$ statt $\cos^2 \psi$ in der grossen Wurzel

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \cdot d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}}.$$

Da

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0$$

und

$$\varphi = \alpha \quad \psi = \frac{\pi}{2} \text{ giebt,}$$

so erhält man

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot z^6 + \dots$$

und demnach

$$\begin{aligned} & \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}} = \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^4 \psi + \dots \right) \cdot d\psi. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}^* ;$$

* Bei partieller Integration ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned} \int \sin^{2n} \psi \cdot d\psi &= \int \sin^{2n-1} \psi \cdot \sin \psi \cdot d\psi = -\cos \psi \cdot \sin^{2n-1} \psi \\ &\quad + (2n-1) \cdot \int \cos^2 \psi \cdot \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi \\ &= -\cos \psi \cdot \sin^{2n-1} \psi + (2n-1) \cdot \int (1 - \sin^2 \psi) \cdot \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi \\ &= -\cos \psi \cdot \sin^{2n-1} \psi + (2n-1) \cdot \int \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi - (2n-1) \cdot \int \sin^{2n} \psi \cdot d\psi \\ &\text{und also} \end{aligned}$$

$$2n \cdot \int \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = -\cos \psi \cdot \sin^{2n-1} \psi + (2n-1) \cdot \int \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi,$$

folglich

$$\int \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = -\frac{\cos \psi \cdot \sin^{2n-1} \psi}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \int \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi.$$

Setzt man die Grenzen ein, so verschwindet das vom Integralzeichen freie Glied wegen $\sin 0 = 0$ und $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, und man erhält

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = \frac{2n-1}{2n} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi,$$

und analog ist auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} \psi \cdot d\psi = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-4} \psi \cdot d\psi,$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cdot d\psi = \frac{3}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cdot d\psi,$$

sonach

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^4 \psi + \dots \right]$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

oder

$$t = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \right].$$

Näherungsweise ist auch, weil α und φ sehr klein,

$$\text{also} \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}^{*)}$$

$$\cos \varphi - \cos \alpha = \frac{\alpha^2 - \varphi^2}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi \cdot d\psi = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

mithin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \psi \cdot d\psi = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ etc.}$$

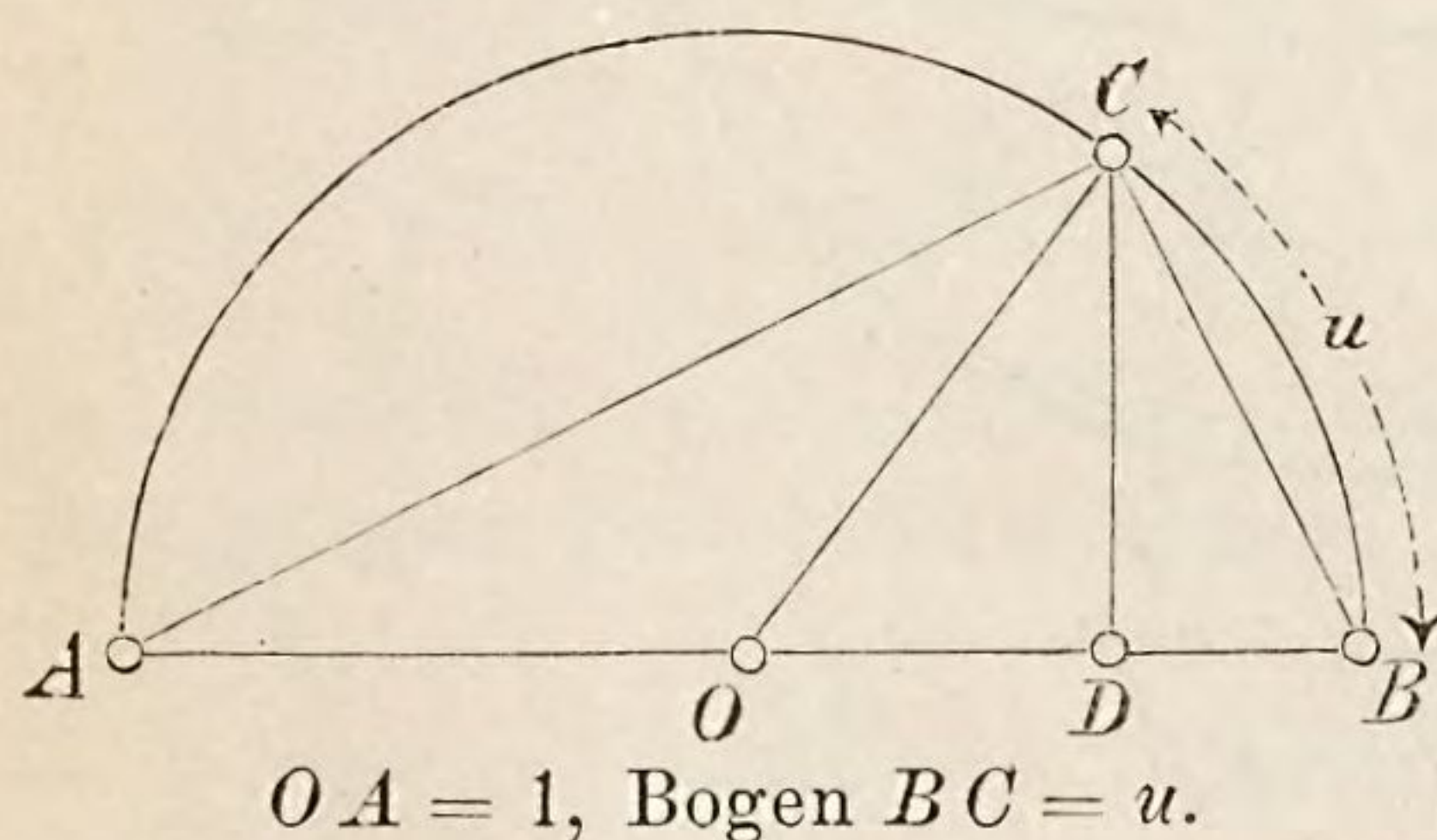


Fig. 184.

$$* \overline{BC}^2 = BD \cdot BA = 2 \cdot (BO - OD) = 2 \cdot (1 - \cos u)$$

also

$$\cos u = 1 - \frac{\overline{BC}^2}{2}.$$

Ist nun u sehr klein, so kann man die geradlinige Sehne $\overline{BC}$ gleich dem Bogen $BC = u$ setzen; dies giebt

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2}$$

und demnach

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}} \cdot \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\arcsin \frac{\varphi}{\alpha} \right]_0^\alpha \\
 &= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot [\arcsin 1 - \arcsin 0] \\
 &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.
 \end{aligned}$$

Bewegung eines materiellen Punktes m in einer Hohlkugel (Conisches Pendel).

In dem Mittelpunkte O der Hohlkugel (Fig. 185) mögen sich die rechtwinklig aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z schneiden; der Halbmesser der Hohlkugel sei r und der Normalwiderstand der Bahn in m heisse N .

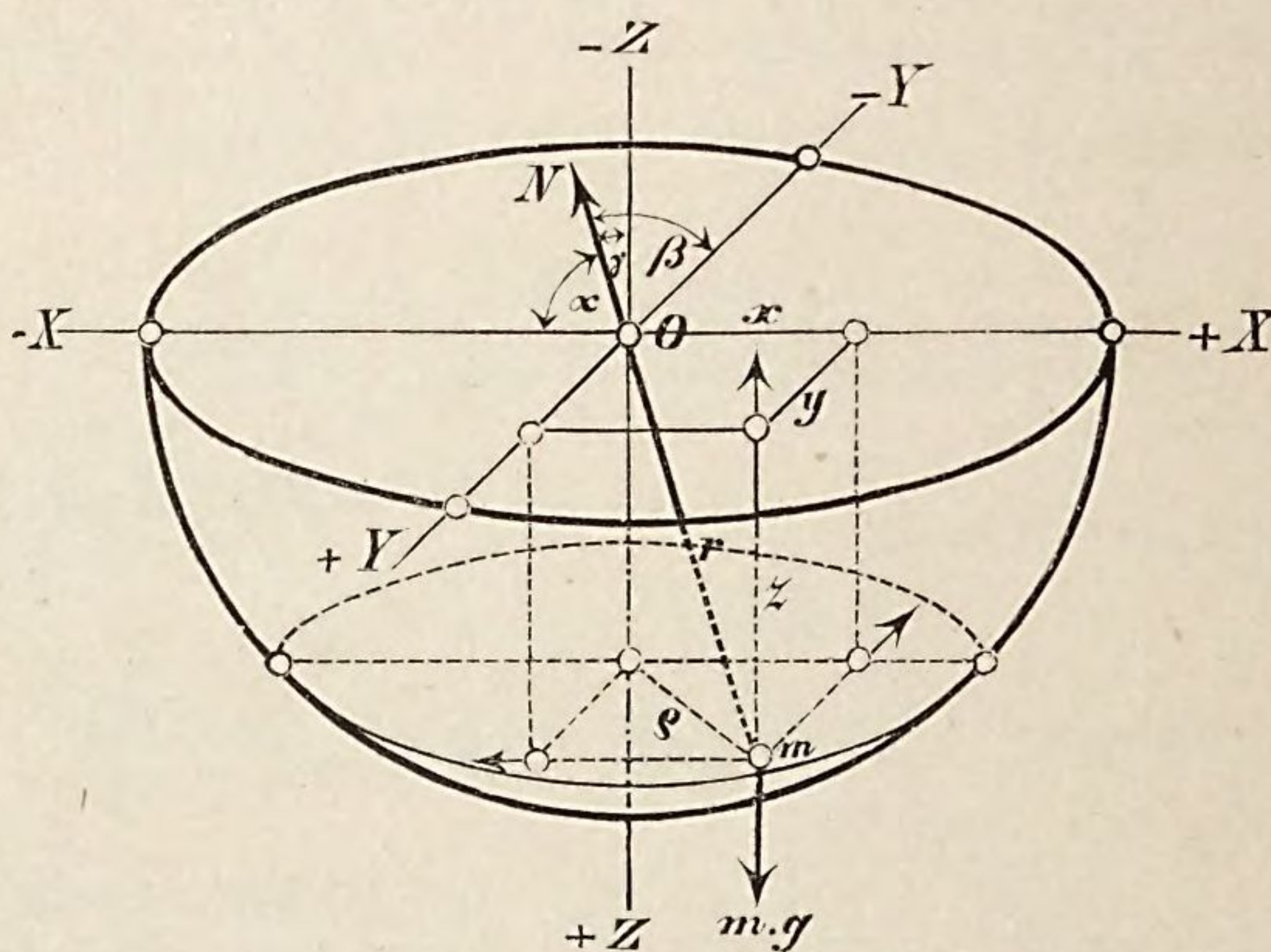


Fig. 185.

Diejenige Totalkraft, welche den materiellen Punkt m beeinflusst, ist die Resultirende aus dem Normaldruck N und dem

III. Unfreie od. gezwungene Bewegung eines materiellen Punktes. 243

Gewichte $G = m \cdot g$, welche, nach den drei Achsenrichtungen zerlegt, die Componenten

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = - N \cdot \cos \alpha = - N \cdot \frac{x}{r},$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = - N \cdot \cos \beta = - N \cdot \frac{y}{r}$$

und

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = - N \cdot \cos \gamma + m \cdot g = - N \cdot \frac{z}{r} + m \cdot g$$

liefert.

Zur Bestimmung des Bahnwiderstandes N multiplicire man die erste Gleichung mit x , die zweite mit y , die dritte mit z und addire, wodurch sich ergibt

$$m \cdot \left(x \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + y \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + z \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = - N \cdot r + m \cdot g \cdot z.$$

Die Gleichung der Kugeloberfläche ist nun

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

welche einmal differentiirt und durch dt dividirt

$$x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} + z \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

und durch nochmalige Differentiation

$$x \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + y \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + z \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 0$$

liefert.

In diesem Ausdrücke ist aber

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = v^2,$$

das Quadrat der resultirenden Geschwindigkeit in der wahren Bewegungsrichtung, folglich giebt der letzte Nullwerth

$$x \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + y \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + z \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = - v^2$$

und die Gleichung zur Bestimmung von N

$$- m \cdot v^2 = - N \cdot r + m \cdot g \cdot z$$

oder

$$N = m \cdot \frac{v^2}{r} + m \cdot g \cdot \frac{z}{r}.$$

Dieses Resultat hätte man auch direct finden können, wenn man bedenkt, dass zur Erzeugung der Bewegungsrichtungsänderung die Centripetalkraft $\frac{m \cdot v^2}{r}$ erforderlich ist und das Gewicht des materiellen Punktes radial auswärts eine Componente

$$m \cdot g \cdot \cos \gamma = m \cdot g \cdot \frac{z}{r}$$

liefert.

Besitzt nun der materielle Punkt im Abstände z_0 eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = c = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ und im Abstände z eine Geschwindigkeit v , dann ergibt sich nach dem Princip der lebendigen Kräfte

$$m \cdot g \cdot (z - z_0) = m \cdot \left(\frac{v^2 - c^2}{2} \right),$$

$$v^2 = c^2 + 2 \cdot g \cdot (z - z_0)$$

$$= 2 \cdot g \cdot (h + z - z_0).$$

Die resultirende stets tangentiale Geschwindigkeit v ist die Resultante aus der Geschwindigkeit $v_z = \frac{dz}{dt}$ in der Richtung der Z-Achse und der Geschwindigkeit v_h des materiellen Punktes

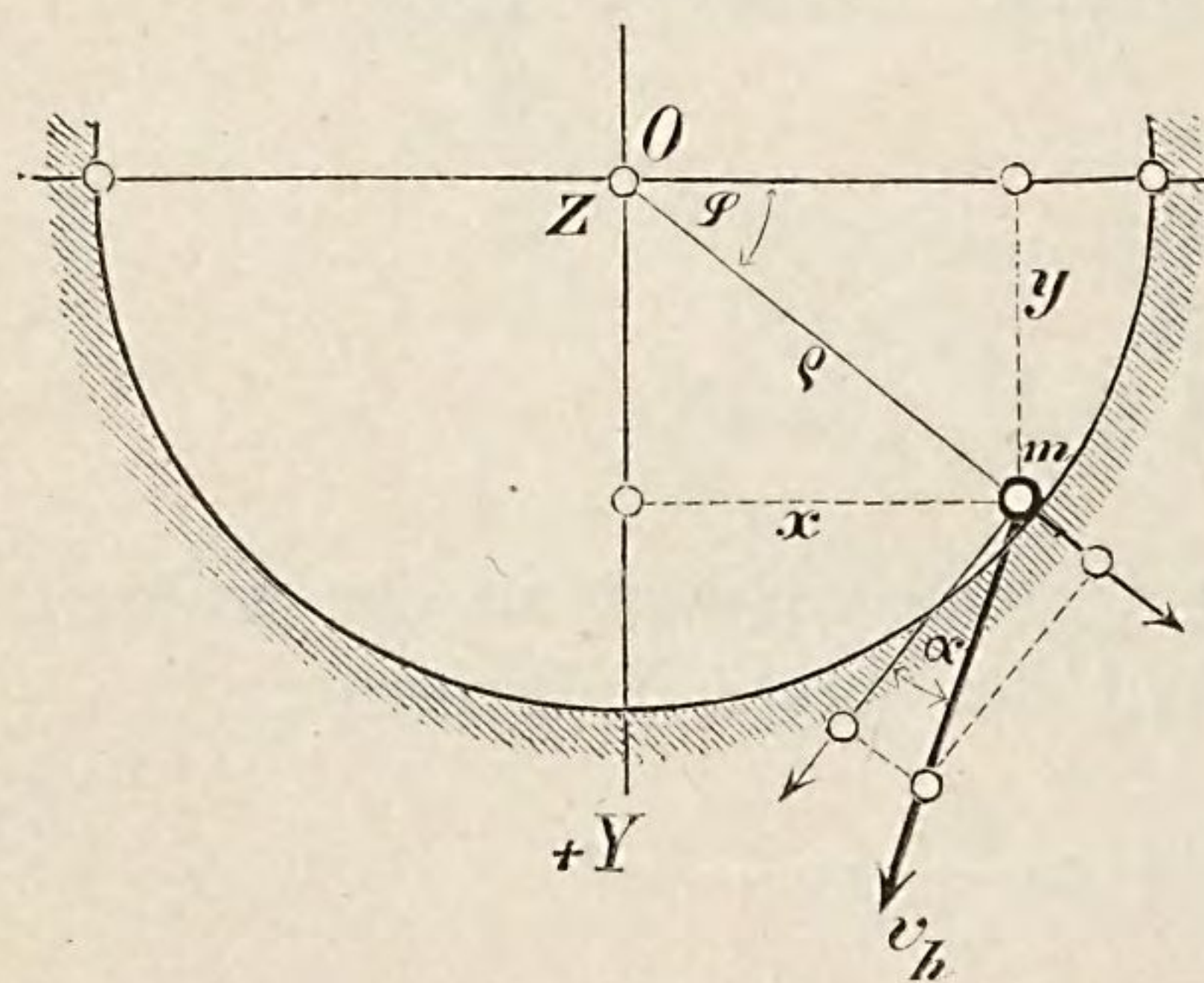


Fig. 186.

in der Horizontalebene; während v_h (Fig. 186) anzusehen ist als die Resultante aus der Geschwindigkeit $\frac{d\rho}{dt}$ in der Richtung des veränderlichen horizontalen Radiusvector ρ und aus der horizontalen Tangentialgeschwindigkeit $\rho \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

Das Moment der Horizontalgeschwindigkeit v_h bezogen auf die Z-Achse ist

$$v_h \cdot \cos \alpha \cdot \varrho = \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Ist im Anfange der Bewegung die Verticalgeschwindigkeit $\frac{dz}{dt} = 0$, so wird $\alpha = 0$ und fällt die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = c$$

tangential in die Horizontalebene.

Bedenkt man weiter, dass die einzige in der Horizontalebene wirkende Kraft die Horizontalcomponente von N

$$\sqrt{\left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right)^2}$$

ist, und dass dieselbe stets durch die Z-Achse hindurchläuft, so ergibt sich, dass die horizontale Projection der wahren Bewegung eine Centralbewegung und infolge dessen

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

die sogenannte Flächengeschwindigkeit, constant ist.

Ist nun der Radiusvector ϱ_0 zur Zeit Null und ausserdem c bekannt, dann gilt infolgedessen

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = c \cdot \varrho_0.$$

Ein zweiter Werth für die Flächengeschwindigkeit findet sich, wenn man die erste Gleichung der Kraft-Componenten mit y , die zweite mit x multiplicirt und die zweite von der ersten abzieht; es folgt

$$x \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

oder

$$x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} \text{ constant,}$$

und setzt man in diese Gleichung die Werthe (Fig. 186)

$$x = \varrho \cdot \cos \varphi$$

und

$$y = \varrho \cdot \sin \varphi$$

ein, so resultirt

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

folglich ist durch Gleichsetzung der erhaltenen Werthe

$$x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} = c \cdot \varrho_0.$$

Ferner lässt sich der nach einmaliger Differentiation der Gleichung für r^2 erhaltene Ausdruck schreiben

$$x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = -z \cdot \frac{dz}{dt};$$

quadriert man diese und die vorige Gleichung und addirt man beide, dann folgt

$$(x^2 + y^2) \cdot \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} = c^2 \cdot \varrho_0^2 + z^2 \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2.$$

Aus der Gleichung für r^2 folgt aber

$$x^2 + y^2 = r^2 - z^2$$

und aus der Gleichung für v^2

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = v^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2;$$

folglich gilt

$$(r^2 - z^2) \cdot \left\{ v^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\} = c^2 \cdot \varrho_0^2 + z^2 \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

und hieraus

$$\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{(r^2 - z^2) \cdot v^2 - c^2 \cdot \varrho_0^2}{r^2}.$$

Führt man in diese Gleichung den nach dem Princip der lebendigen Kräfte erhaltenen Werth für v^2 ein, setzt man ferner

$$\frac{c^2}{2 \cdot g} = h$$

und

$$\varrho_0^2 = r^2 - z_0^2,$$

dann ergibt sich nach einiger Umwandlung

$$\frac{r^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = (z_0 - z) \cdot \{ (h \cdot z_0 - r^2) + h \cdot z + z^2 \},$$

welcher Ausdruck gleich Null wird, wenn der erste Klammerwerth rechts gleich Null, d. h.

$$z = z_0$$

wird, oder wenn sich der zweite Klammerwerth gleich Null ergibt, also wenn

$$h \cdot z_0 - r^2 + h \cdot z + z^2 = 0$$

oder

$$z = z_1 = -\frac{h}{2} \cdot \sqrt{r^2 - h \cdot z_0 + \frac{h^2}{4}}$$

ist.

Wird im speciellen Falle

$$z_0 = z_1,$$

also

$$z_0 = -\frac{h}{2} \cdot \sqrt{r^2 - h \cdot z_0 + \frac{h^2}{4}}$$

oder

$$h = \frac{r^2 - z_0^2}{2 \cdot z_0},$$

so wird die Anfangsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{r^2 - z_0^2}{2 \cdot z_0}} = \varrho_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{z_0}}$$

und die Bahn des materiellen Punktes ein horizontaler Kreis vom Radius ϱ , welcher in der Zeit

$$t = \frac{2 \cdot \varrho_0 \cdot \pi}{c} = \varrho_0 \cdot \sqrt{\frac{g}{z_0}}$$

durchlaufen wird. Alle auftretenden Normaldrücke liegen dabei auf einer Kegeloberfläche, deren Spitze mit dem Mittelpunkte der Hohlkugel zusammenfällt; hängt man daher den materiellen

Punkt mittelst eines Fadens von der Länge r in diesem Punkte auf, so wird der erstere unter gleichen Verhältnissen — auch ohne die Hohlkugel als vorgeschriebene Bahn — die gleiche Bewegung ausführen, denn der Normaldruck N der Bahn wird hier ersetzt durch die Spannung N des Fadens.

Letztere Anordnung nennt man das
„conische Pendel“.

Wird die Hohlkugel als vorgeschriebene Bahn vorausgesetzt

und
$$h > \frac{r^2 - z_0^2}{2 \cdot z_0}, \text{ so wird } z_1 < z_0,$$

und wird
$$h < \frac{r^2 - z_0^2}{2 \cdot z_0}, \text{ so wird } z_1 > z_0.$$

z_0 und z_1 liefern dann die Grenzen, innerhalb welcher der materielle Punkt auf und nieder steigt. Die Wendepunkte der vom Punkte beschriebenen Curve finden sich für

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

IV.

Relative Bewegung eines materiellen Punktes.

Alle Bewegungen in der Welt sind Relativbewegungen, weil sie angegeben werden in Bezug auf einen Punkt oder einen Raum, welcher sich selbst in irgend einer Bewegung befindet und nur als ruhend gedacht wird. So ist beispielsweise diejenige Bewegung, welche der Mond um die Erde beschreibt, seine Relativbewegung in Bezug auf die ruhend gedachte Erde; diejenige Mondbahn aber, welche aus der Bewegung des Mondes um die Erde und der Erde um die Sonne resultirt, die Relativbewegung des Mondes in Bezug auf die ruhend gedachte Sonne.

So ist auch jede Bewegung eines Punktes oder eines Körpers auf der Erdoberfläche — beobachtet von dem Erdbewohner — eine Relativbewegung des Punktes oder Körpers in Bezug auf die ruhend gedachte Erde; während

sich die sogenannte wahre Bewegung dieses Punktes oder Körpers im Weltall ergeben würde aus der Bewegung des ersteren auf der Erde und aus der Bewegung der Erde im Weltall bezogen auf einen im unendlichen Raum gedachten festen Punkt.

Ist nun die Bewegung des Punktes oder Raumes O bekannt, auf welchen die Bewegung eines materiellen Punktes m bezogen werden soll, und ausserdem — wenn die Bewegung eine freie ist — die wahre auf den materiellen Punkt m wirkende Kraft P oder — wenn die Bewegung eine unfreie ist — die Effectivkraft R , so entsteht die Aufgabe, die Relativkraft, die Relativbeschleunigung und die Relativbewegung des materiellen Punktes m in Bezug auf den zwar bewegten, aber als ruhend gedachten Punkt oder Raum O zu bestimmen.

Zur Lösung dieser Aufgabe hat man sich daran zu erinnern, dass die Bewegung desjenigen Punktes O , auf welchen die Relativbewegung bezogen werden soll, ganz allgemein als das Resultat der gleichzeitigen Existenz einer veränderlichen fortschreitenden und einer veränderlichen Dreh-Bewegung angesehen werden kann.

Es sollen daher im Folgenden der Reihe nach Betrachtung finden

- 1) Relativbewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen veränderlich fortschreitenden Punkt oder Raum,
- 2) Relativbewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen in veränderlicher Drehbewegung befindlichen Raum,
- 3) Relativbewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen in beliebiger Bewegung befindlichen Punkt oder Raum und relatives Gleichgewicht eines materiellen Punktes.

Schliesslich soll noch

- 4) die Arbeit der Relativkraft angegeben werden.

1.

Relativbewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen veränderlich fortschreitenden Punkt oder Raum.

Man stelle sich im Weltall ein festliegendes System von drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen A, B, C vor und beziehe auf dasselbe sowohl die wahre fortschreitende Bewegung des materiellen Punktes m , als auch die fortschreitende Bewegung des Punktes O , auf welchen selbst die Relativbewegung des materiellen Punktes m bezogen werden soll.

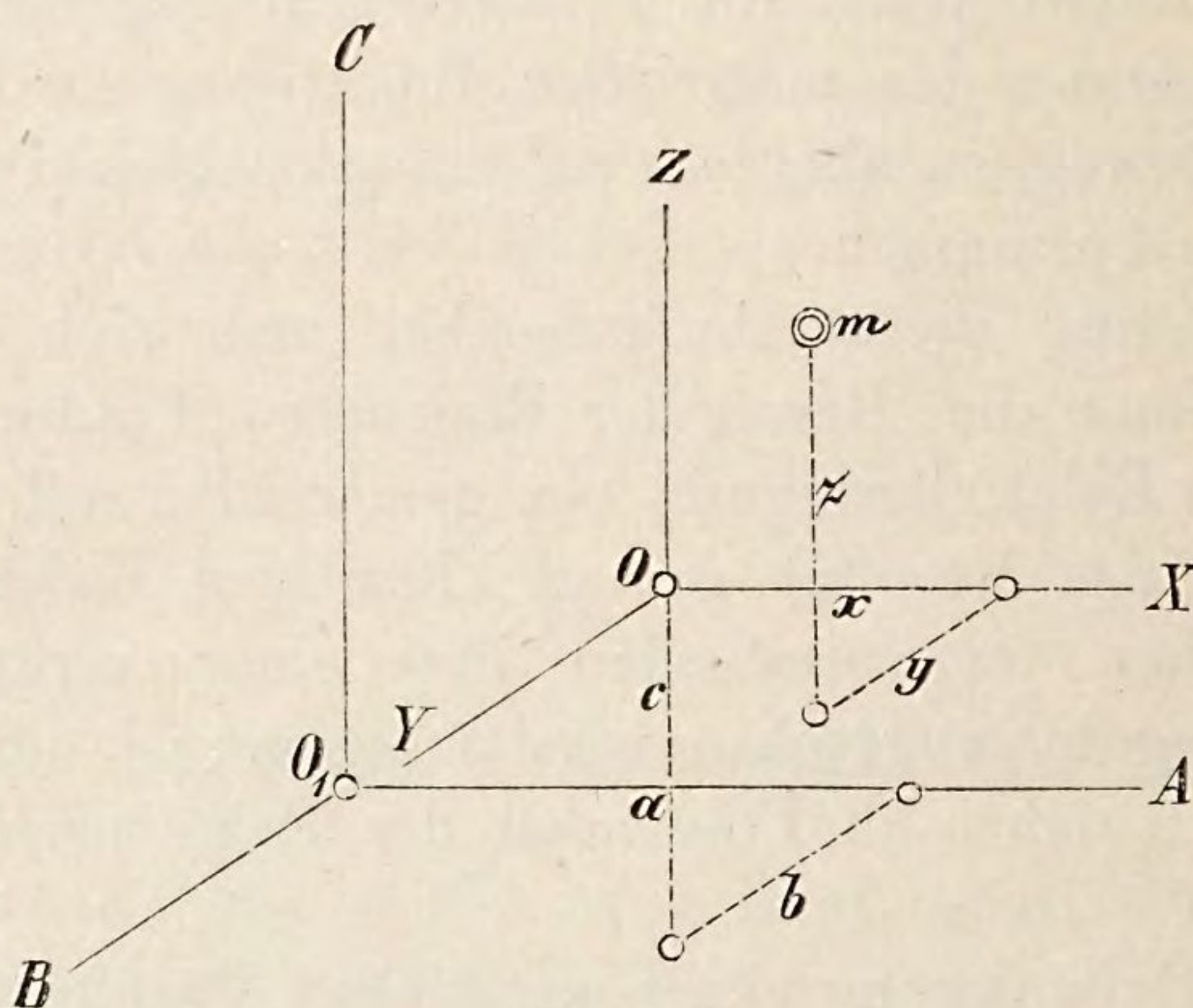


Fig. 187.

Zur Zeit t mögen die Coordinaten des Punktes O heissen (Fig. 187) a, b, c und die des materiellen Punktes m ξ, η, ζ , während zur selben Zeit die Coordinaten der Relativbewegung von m , also bezogen auf die durch O und parallel zu A, B, C gelegten Achsen X, Y, Z x, y, z sein mögen.

Es gilt für die Coordinaten der absoluten oder wahren Bewegung des materiellen Punktes m

$$\xi = a + x,$$

$$\eta = b + y,$$

$$\zeta = c + z,$$

und die wahren Beschleunigungen sind

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der Masse m des materiellen Punktes und setzt man

$$m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = P_\xi,$$

$$m \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} = P_\eta$$

und $m \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = P_\zeta,$

also gleich den Componenten der bewegenden wahren Kraft P (bei unfreier Bewegung der Effectivkraft) nach den Achsen A, B, C resp. X, Y, Z , so ergeben sich die Componenten der Relativkraft, welche die Relativbewegung bezogen auf den ruhend gedachten Punkt O als eine absolute Bewegung erzeugen würde, durch

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = P_\xi - m \cdot \frac{d^2a}{dt^2},$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = P_\eta - m \cdot \frac{d^2b}{dt^2},$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = P_\zeta - m \cdot \frac{d^2c}{dt^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen das Verfahren, welches eingeschlagen werden muss, um bei gegebener Bewegung des Punktes O (resp. des Raumes XYZ) und bei gegebener bewegenden Kraft (resp. Effectivkraft) die Relativkraft, die Relativbeschleunigung und die Relativbewegung zu ermitteln.

Die Gleichungen lehren, „dass man zur Bestimmung der

Relativkraft an dem materiellen Punkte m neben der wahren bewegenden Kraft noch eine zweite Kraft anzubringen hat, welche der den Punkt O bewegenden Kraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet ist, welche also dem materiellen Punkte m eine dem Punkte O resp. dem Achsensystem X, Y, Z eigenthümliche aber entgegengesetzte Beschleunigung ertheilt“.

Specieller Fall: Sind

$$P_{\xi} = m \cdot \frac{d^2 a}{dt^2},$$

$$P_{\eta} = m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2}$$

und $P_{\zeta} = m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2},$

so werden die Componenten der Relativkraft

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

und $m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = 0,$

also auch die Relativ-Kraft und Beschleunigung gleich Null, d. h. aber: „der materielle Punkt m gelangt in Bezug auf den Punkt O resp. das Achsensystem X, Y, Z in relative Ruhe oder er erhält eine relative geradlinige, gleichförmige Bewegung.“

2.

Relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen in veränderlicher Drehbewegung befindlichen Raum.

Der materielle Punkt m besitze, bezogen auf ein fest gedachtes rechtwinkeliges Drei-Achsensystem A, B, C , pa-

parallel zur AB -Ebene (Fig. 188) eine veränderliche Drehbewegung, deren veränderlicher Radiusvector ϱ , deren Anomalie (also in der Zeit t) φ und deren Winkelgeschwindigkeit ω_0 ist. Ist die Bewegung eine freie, so wirkt auf den

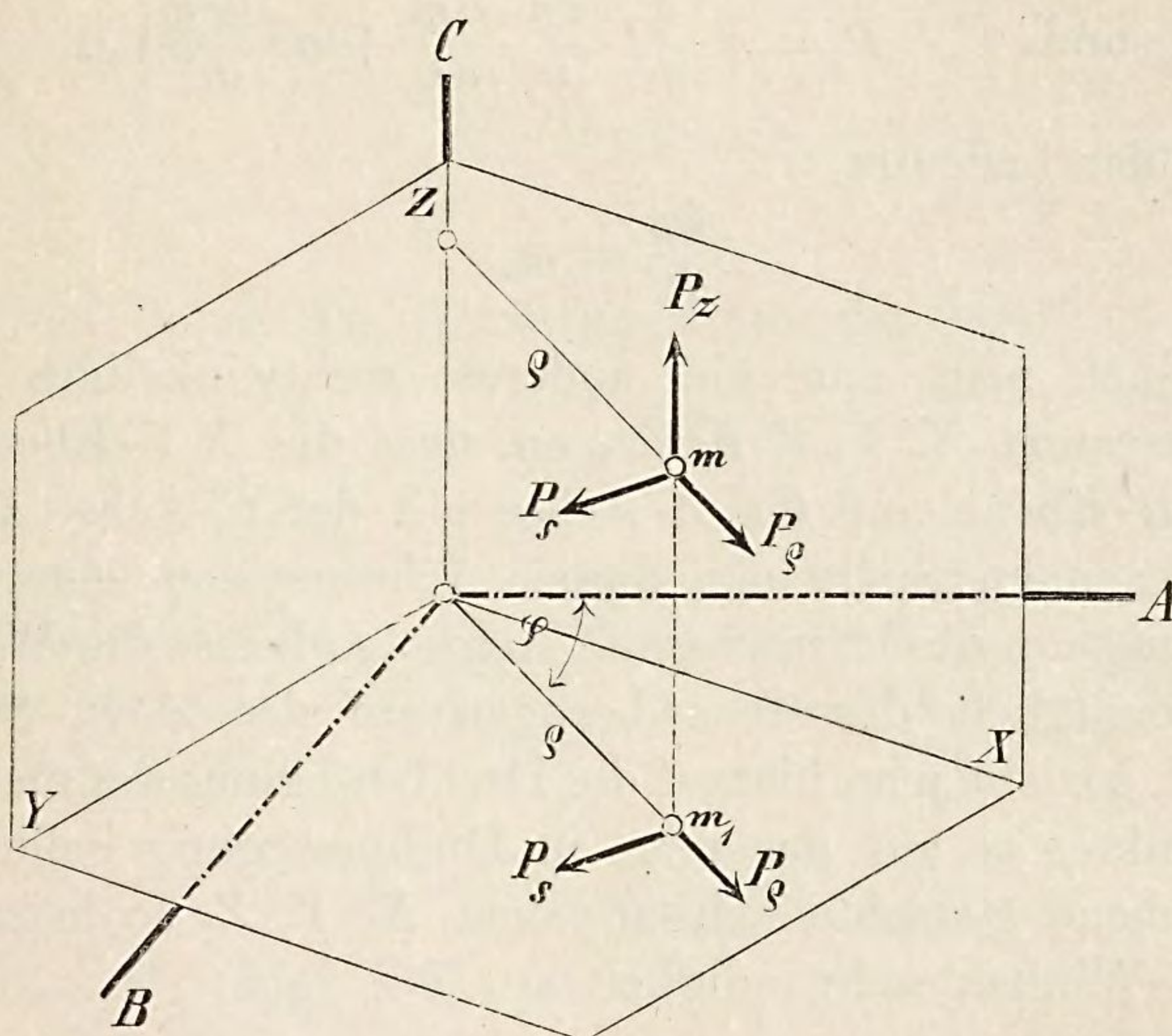


Fig. 188.

materiellen Punkt eine bewegende Kraft P , ist die Bewegung aber eine unfreie, dann wirkt die Effectivkraft R . Zerlegt man in dem einen oder anderen Falle die wirkende wahre Kraft in die Richtung von ϱ , senkrecht dazu parallel der AB -Ebene und schliesslich parallel zur C -Achse, so erhält man die Componenten P_ϱ , P_s und P_z , von denen die beiden ersten die veränderliche Drehbewegung beeinflussen, P_z aber dem materiellen Punkte eine Beschleunigung in der Richtung der C -Achse ertheilt.

Die allgemeinen Gleichungen für diese Kräfte wurden unter dem Kapitel „Flächengeschwindigkeit“ gefunden und heissen:

$$P_z = m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2},$$

$$P_\rho = m \cdot \left\{ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\}$$

$$\text{und} \quad P_s = m \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \rho \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right\},$$

worin hier bedeutet

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0.$$

Ordnet man nun ein anderes rechtwinkeliges Drei-Achsensystem X, Y, Z derart an, dass die XY -Ebene mit der AB -Ebene und die Z -Achse mit der C -Achse zusammenfällt und ertheilt man diesem Achsensystem eine Drehbewegung um die letztgenannte Achse, so heisse die Winkelgeschwindigkeit desselben bezogen auf das ABC -System ω ; und bezieht man hierauf die Drehbewegung des materiellen Punktes m auf das neue in Drehbewegung befindliche aber ruhend gedachte Achsensystem X, Y, Z , so heisse die Relativ-Winkelgeschwindigkeit ω_r .

Dann ist aber

$$\omega_0 = \omega_r + \omega$$

und

$$P_\rho = m \cdot \left\{ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \cdot (\omega_r + \omega)^2 \right\},$$

$$P_s = m \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot (\omega_r + \omega) + \rho \cdot \frac{d(\omega_r + \omega)}{dt} \right\},$$

woraus sich die zur XY -Ebene parallelen Componenten der Relativkraft ergeben

$$m \cdot \left\{ \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \cdot \omega_r^2 \right\} = P_\rho + m \cdot (\rho \cdot \omega^2 + 2 \cdot \rho \cdot \omega + \omega_r)$$

und

$$m \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \omega_r + \rho \cdot \frac{d\omega_r}{dt} \right\} = P_s - m \cdot \left(\rho \cdot \frac{d\omega}{dt} + 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \omega \right).$$

Diese Kräfte, welche die relative Drehbewegung als eine absolute bezogen auf das in Ruhe gedachte XYZ -System erzeugen würden, erhält man, wie die Gleichungen zeigen, durch das Hinzufügen von der Centrifugalkraft

$$m \cdot \varrho \cdot \omega^2$$

und der Radialkraft

$$K_\rho = 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r$$

zu P_ρ ;

und ferner durch das Hinzufügen von der Kraft

$$- m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt},$$

welche dem materiellen Punkte m die entgegengesetzte Winkelbeschleunigung des Achsensystemes X, Y, Z giebt, und der parallel zur XY -Ebene senkrecht zum Radiusvector liegenden Kraft

$$K_s = - 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega$$

zu P_s (Fig. 189).

Die senkrecht aufeinander stehenden Kräfte

$$K_\rho \text{ und } K_s$$

lassen sich aber in der XY -Ebene zu einer Resultirenden K vereinigen (Fig. 189), welche sich schreiben lässt

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{K_\rho^2 + K_s^2} \\ &= 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \sqrt{\varrho^2 \cdot \omega_r^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\frac{d\varrho}{dt}$$

die Geschwindigkeit des materiellen Punktes in der Richtung des Radiusvector und $\varrho \cdot \omega_r$ die Geschwindigkeit senk-

recht zu demselben in der XY -Ebene, folglich ist die Resultirende

$$w = \sqrt{\varrho^2 \cdot \omega_r^2 + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2}$$

die relative Tangentialgeschwindigkeit in der durch die relative veränderliche Drehbewegung erzeugten Curve. Zugleich ist aber auch w die zur XY -Ebene parallele Componente der relativen Geschwindigkeit v des materiellen Punktes, welche letztere unter Berücksichtigung der durch die Kraftcomponente P_z erzeugten Geschwindigkeit v_z parallel zur Z -Achse entsteht. Ist nun die Neigung zwischen v_z und v gegeben durch den Winkel α , dann ist auch

$$w = v \cdot \sin \alpha$$

und folglich

$$K = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \alpha.$$

Bedeutet ferner δ den Richtungswinkel zwischen K und ϱ , so ist

$$\cos \delta = \frac{K_p}{K} = \frac{2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r}{2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \alpha} = \frac{\varrho \cdot \omega_r}{v \cdot \sin \alpha}$$

und

$$\sin \delta = \frac{K_s}{K} = \frac{2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega}{2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \alpha} = \frac{\frac{d\varrho}{dt}}{v \cdot \sin \alpha}.$$

Es stehen aber ϱ und $\varrho \cdot \omega_r$ senkrecht aufeinander, folglich steht auch die Kraft K stets senkrecht auf w , d. h. auf der relativen Bewegungsrichtung in derjenigen Ebene, in welcher die veränderliche Drehbewegung stattfindet. Die Richtung der Kraft K ist abhängig von den Richtungen ihrer Seitenkräfte

$$K_p = 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r$$

$$\text{und} \quad K_s = -2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega,$$

also von dem Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit ω des Achsensystemes X, Y, Z .

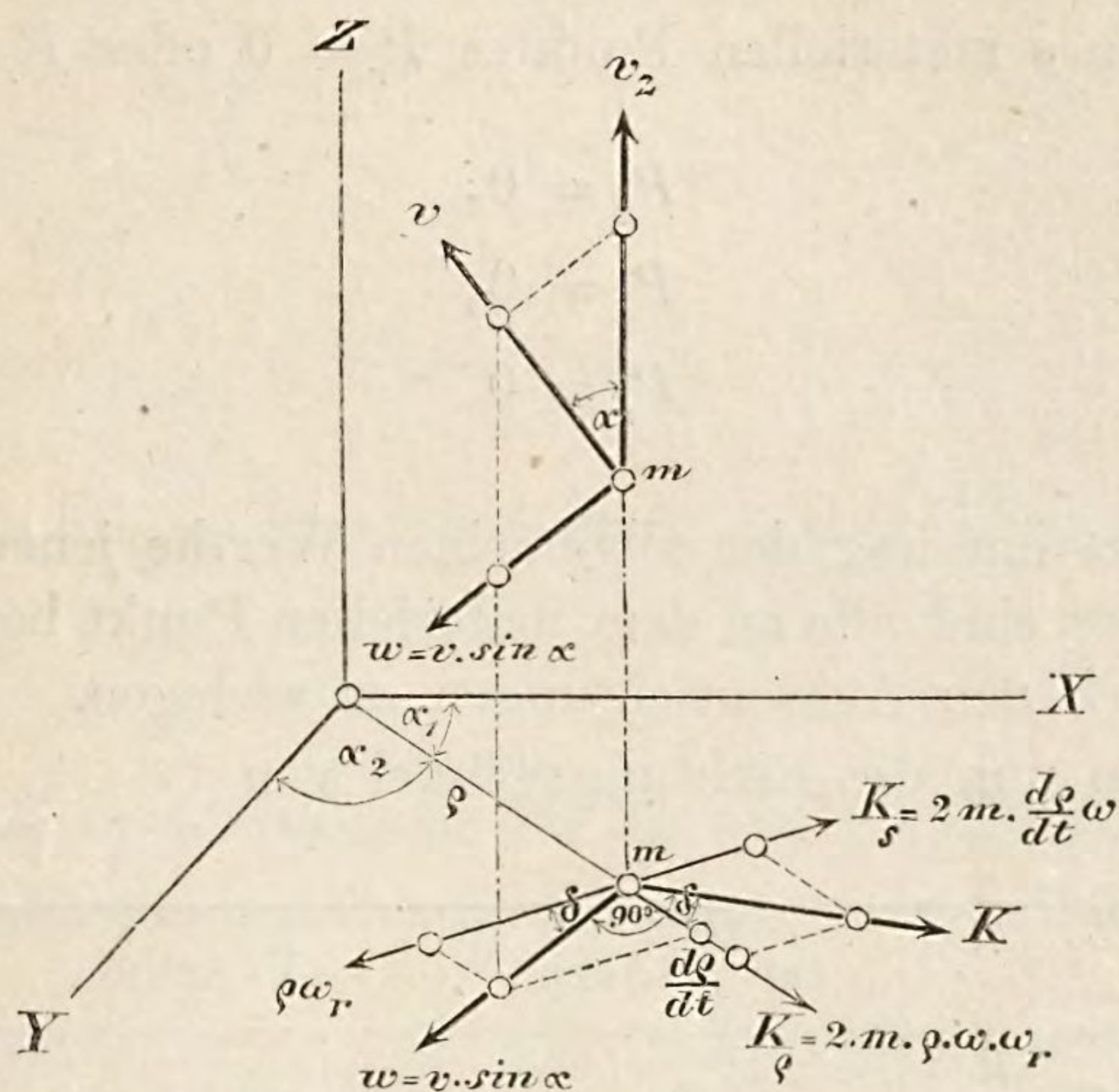


Fig. 189.

3.

Relative Bewegung des materiellen Punktes im Allgemeinen in Bezug auf einen in beliebiger Bewegung befindlichen Punkt oder Raum.

Da jede beliebige Bewegung des Punktes oder des Raumes, auf welchen die relative Bewegung des materiellen Punktes m bezogen wird, als die Zusammensetzung von fortschreitender und Dreh-Bewegung angesehen werden kann, so sind zur Bestimmung der Relativkräfte alle diejenigen Kräfte an den materiellen Punkt anzufügen, welche sowohl unter 1) für die fortschreitende, als auch unter 2) für die Dreh-Bewegung erhalten wurden.

Spezieller Fall: Relatives Gleichgewicht eines materiellen Punktes.

Heissen die Componenten der relativen bewegenden Kraft P_r resp. bei unfreier Bewegung der relativen Effectivkraft R_r nach den Achsen X, Y, Z

$$P_x, P_y, P_z,$$

so müssen, da nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eines materiellen Punktes $P_r = 0$ oder $R_r = 0$ sein muss,

$$P_x = 0,$$

$$P_y = 0,$$

$$P_z = 0$$

werden.

Zur Bestimmung der allgemeinen Werthe jener Componenten aber sind alle an dem materiellen Punkt befindlichen Kräfte nach den Achsenrichtungen zu zerlegen.

Heissen nun die Richtungswinkel von

	zur X-Achse	Y-Achse	Z-Achse
$+ m \cdot \varrho \cdot \omega$	α_1	$90^\circ - \alpha_1$	90°
$+ 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r$	α_1	$90^\circ - \alpha_1$	90°
$- m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt}$	$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$	$90^\circ - \alpha_2 = \alpha_1$	90°
$- 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega$	$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$	$90^\circ - \alpha_2 = \alpha_1$	$90^\circ,$

so folgt

$$P_x = P_\xi - m \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 + 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \cos \alpha_1 \\ - m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \sin \alpha_1 - 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega \cdot \sin \alpha_1 = 0,$$

$$P_y = P_\eta - m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1 + 2 \cdot m \cdot \varrho \cdot \omega \cdot \omega_r \cdot \sin \alpha_1 \\ - m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \cos \alpha_1 - 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega \cdot \cos \alpha_1 = 0,$$

$$P_z = P_\zeta - m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2} = 0.$$

Für relative Ruhe wird

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0$$

und

$$\omega_r = 0,$$

folglich wird

$$P_\xi = m \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1 - m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \sin \alpha_1 = 0,$$

$$\text{und } P_\eta = m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1 - m \cdot \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \cos \alpha_1 = 0$$

$$P_\zeta = m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2} = 0.$$

Ist die Drehbewegung des Raumes gleichförmig, so wird

$$\varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Besitzt der Raum gar keine fortschreitende Bewegung, oder ist dieselbe gleichförmig, so ergibt sich noch

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 b}{dt^2} = 0$$

und

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = 0,$$

und lässt man ϱ mit der X -Achse zusammenfallen, so ist $\alpha_1 = 0$ und infolge dessen

$$P_\xi + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 = 0,$$

$$P_\eta = 0$$

$$\text{und } P_\zeta = 0.$$

Für praktische Untersuchungen sind hierin die Grössen

$$P_\xi, P_\eta \text{ und } P_\zeta$$

aus den auf den materiellen Punkt wirkenden Kräften durch Zerlegung derselben nach den Achsenrichtungen zu ermitteln.

4.

Mechanische Arbeit der Relativkraft.

Allgemein gilt nach dem Princip der lebendigen Kraft

$$\frac{m \cdot (v^2 - c^2)}{2} = \int R \cdot ds \cdot \cos \varphi.$$

Bedeutet nun im vorliegenden Falle c_r die relative Anfangs-, v_r die relative Endgeschwindigkeit, bedenkt man ferner, dass die Arbeit der resultirenden Relativkraft P_r oder R_r gleich ist der Arbeit ihrer Componenten, und dass die Arbeit der senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehenden Componenten gleich Null ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{m \cdot (v_r^2 - c_r^2)}{2} &= \int P \cdot ds \cdot \cos \varphi + L + m \cdot \int \omega^2 \cdot \varrho \cdot d\varrho \\ &\quad - m \cdot \int \varrho^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi; \end{aligned}$$

denn es ist:

$$\int P \cdot ds \cdot \cos \varphi$$

die Arbeit der wahren bewegenden Kraft oder der Effectivkraft

$$P = \sqrt{P_\xi^2 + P_\eta^2 + P_\zeta^2}$$

incl. eines etwa tangential vorhandenen Widerstandes,

L die Arbeit derjenigen Kraft

$$m \cdot \sqrt{\left(\frac{d^2a}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2b}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2c}{dt^2}\right)^2},$$

welche die veränderliche fortschreitende Bewegung des materiellen Punktes m aufhebt,

$$m \cdot \int \omega^2 \cdot \varrho \cdot d\varrho$$

die Arbeit der Centrifugalkraft; ferner ist die Arbeit der Kraft

$$K = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot v \cdot \sin \alpha$$

gleich Null und schliesslich

$$- m \cdot \int \varrho \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \varrho \cdot d\varphi$$

die Arbeit derjenigen Kraft, welche die der Drehbewegung des Achsensystemes X, Y, Z entsprechende Drehbewegung des materiellen Punktes m aufhebt.

1) Specieller Fall: Für gleichförmige Drehbewegung des Achsensystemes X, Y, Z ist die Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ desselben gleich Null und die Winkelgeschwindigkeit ω constant, folglich ist dann

$$\frac{m \cdot (v_r^2 - c_r^2)}{2} = \int P \cdot ds \cdot \cos \varphi + L + \frac{m \cdot \omega^2}{2} \cdot (\varrho^2 - \varrho_o^2),$$

worin ϱ_o den Radiusvector zur Zeit Null, ϱ den Radiusvector zur Zeit t bedeutet.

2) Specieller Fall: Ist die wahre bewegende Kraft P resp. die Effectivkraft R und ausserdem der tangential Widerstand gleich Null, ferner die Drehbewegung des Achsensystemes X, Y, Z gleichförmig und die fortschreitende Bewegung desselben gleich Null, dann ist

$$\frac{m \cdot (v_r^2 - c_r^2)}{2} = \frac{m \cdot \omega^2}{2} \cdot (\varrho^2 - \varrho_o^2)$$

oder
$$v_r^2 - c_r^2 = \omega^2 \cdot (\varrho^2 - \varrho_o^2).$$

Ein materieller Punkt m , welcher auf der Innenseite einer sich um die verticale Z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig drehenden Rotationsfläche liegt, befinde sich in Bezug auf letztere in relativer Ruhe.

Die Erzeugende der Rotationsfläche sei gegeben durch

$$\varrho = f(z),$$

wenn ϱ den veränderlichen Radiusvector der Erzeugenden bedeutet.

Das Achsensystem X, Y, Z (Fig. 190) drehe sich mit der Rotationsfläche, und es falle ϱ mit der X -Achse zusammen.

Allgemein kommen hier die Gleichungen

$$P_{\xi} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 = 0,$$

$$P_{\eta} = 0$$

und

$$P_{\zeta} = 0$$

in Anwendung, in denen P_{ξ} , P_{η} , P_{ζ} die Componenten der wahren bewegenden Effectivkraft nach den Achsenrichtungen sind.

Der materielle Punkt m wird nun parallel zur Z -Achse abwärts durch sein Eigengewicht $G = m \cdot g$ und ausserdem durch den Normalwiderstand N der Bahn beeinflusst, welcher letzterer, nach den Achsenrichtungen zerlegt, mit Bezug auf Fig. 190 in der X -Achse die Componente

$$N \cdot \sin \varphi = N \cdot \frac{d\varrho}{\sqrt{(d\varrho)^2 + (dz)^2}},$$

in der Richtung der Y -Achse eine Componente gleich Null, und in der Richtung der Z -Achse eine Componente

$$N \cdot \cos \varphi = N \cdot \frac{dz}{\sqrt{(d\varrho)^2 + (dz)^2}}$$

liefert; demnach ist aber

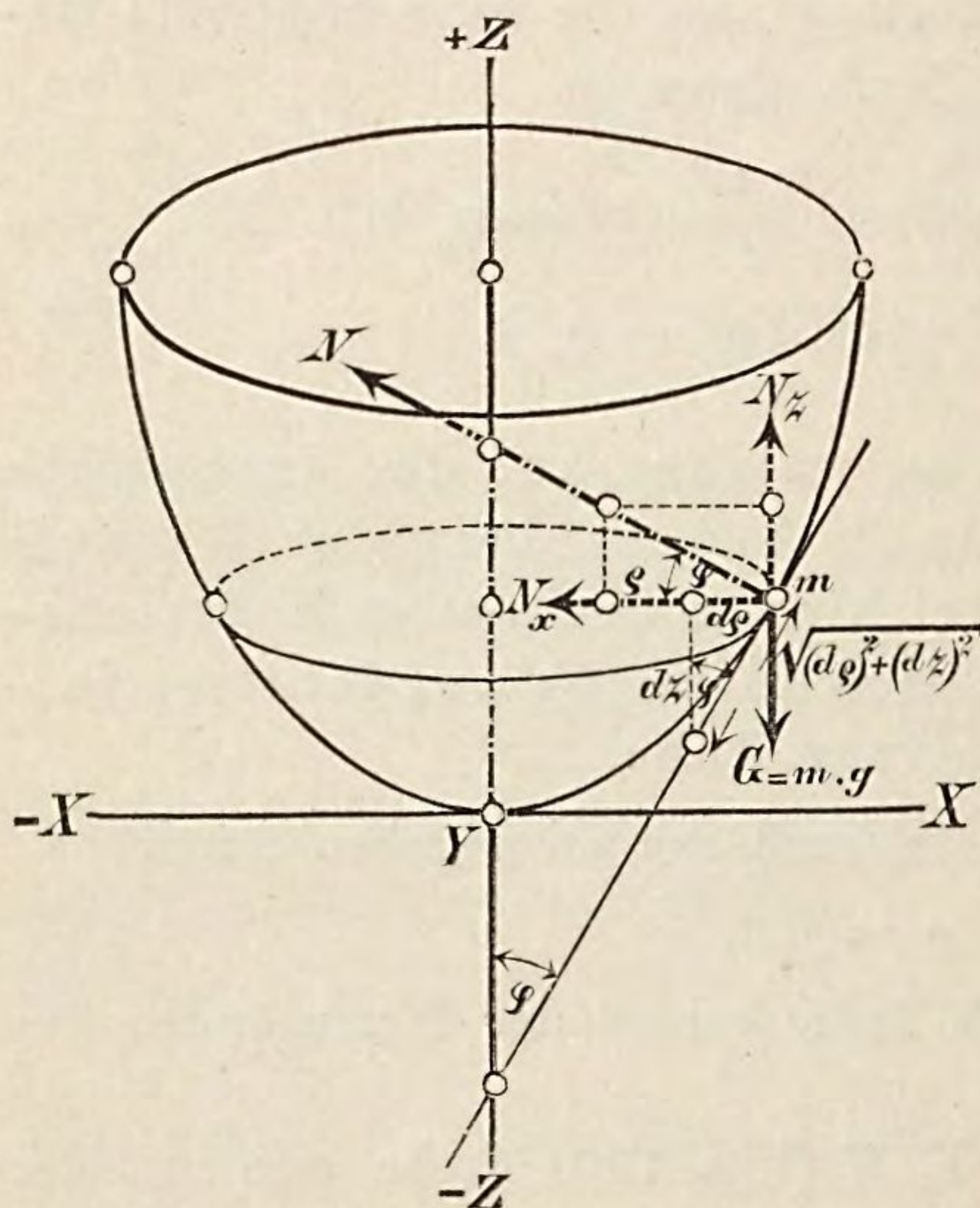


Fig. 190.

$$P_{\xi} = - N \cdot \cos \varphi,$$

$$P_{\eta} = 0,$$

$$P_{\zeta} = + N \cdot \sin \varphi - m \cdot g,$$

und es folgt durch Einsetzung in die allgemeinen Gleichungen:

$$- N_x + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 = 0,$$

$$+ N_z - m \cdot g = 0$$

oder

$$N \cdot \cos \varphi = m \cdot \varrho \cdot \omega^2,$$

$$N \cdot \sin \varphi = m \cdot g.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so berechnet sich φ , also auch die Lage von m durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{g}{\varrho \cdot \omega^2}.$$

Quadrirt und addirt man beide Gleichungen, so ergibt sich die Grösse des Normaldruckes

$$N = m \cdot \sqrt{g^2 + \varrho^2 \cdot \omega^4}.$$

Anziehungskraft der Erde und Aenderung der Acceleration g der Schwere an der Erdoberfläche.

Die Acceleration der Schwere g ist je nach dem Orte an der Erdoberfläche eine andere und durch Versuche mit einem sogenannten materiellen Pendel bestimmbar. Der an einem bestimmten Orte durch den Versuch für g ermittelte Werth enthält aber nicht nur den Einfluss der Anziehungskraft der Erde, sondern auch die Einwirkung der Centrifugalkraft, welche ein materieller Punkt infolge der Erddrehung (von Westen nach Osten) und infolge seines Abstandes von der Drehachse besitzt.

Würde sich die Erde nicht um eine Achse drehen, so würde die Schwerkraft mit der wahren Anziehungskraft

$$A = m \cdot p$$

an demselben Orte übereinstimmen. Infolge der gleichförmigen Drehbewegung der Erde aber erscheint A nur als eine Relativkraft, und es entsteht die Aufgabe, aus der für einen Ort ermittelten Acceleration der Schwere g und der dem Orte zukommenden Centrifugalkraft die wahre Anziehungskraft der Erde nach Grösse und Richtung zu ermitteln, oder aus der resultirenden Gleichung den Einfluss der wahren Erdanziehung und der Centrifugalkraft auf die Acceleration der Schwere nachzuweisen.

Die Z -Achse (Fig. 191) sei Drehachse, ϱ der Radiusvector des materiellen Punktes m , das Achsensystem X, Y, Z rotire mit der Erde und ϱ falle in die XZ -Ebene. Da die Drehbewegung der Erde gleichförmig ist, gelten für die relative Ruhe des Punktes m die allgemeinen Gleichungen

$$P_{\xi} + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 = 0,$$

$$P_{\eta} = 0,$$

$$P_{\zeta} = 0,$$

und es bilden hier diese Grössen die Componenten der aus der

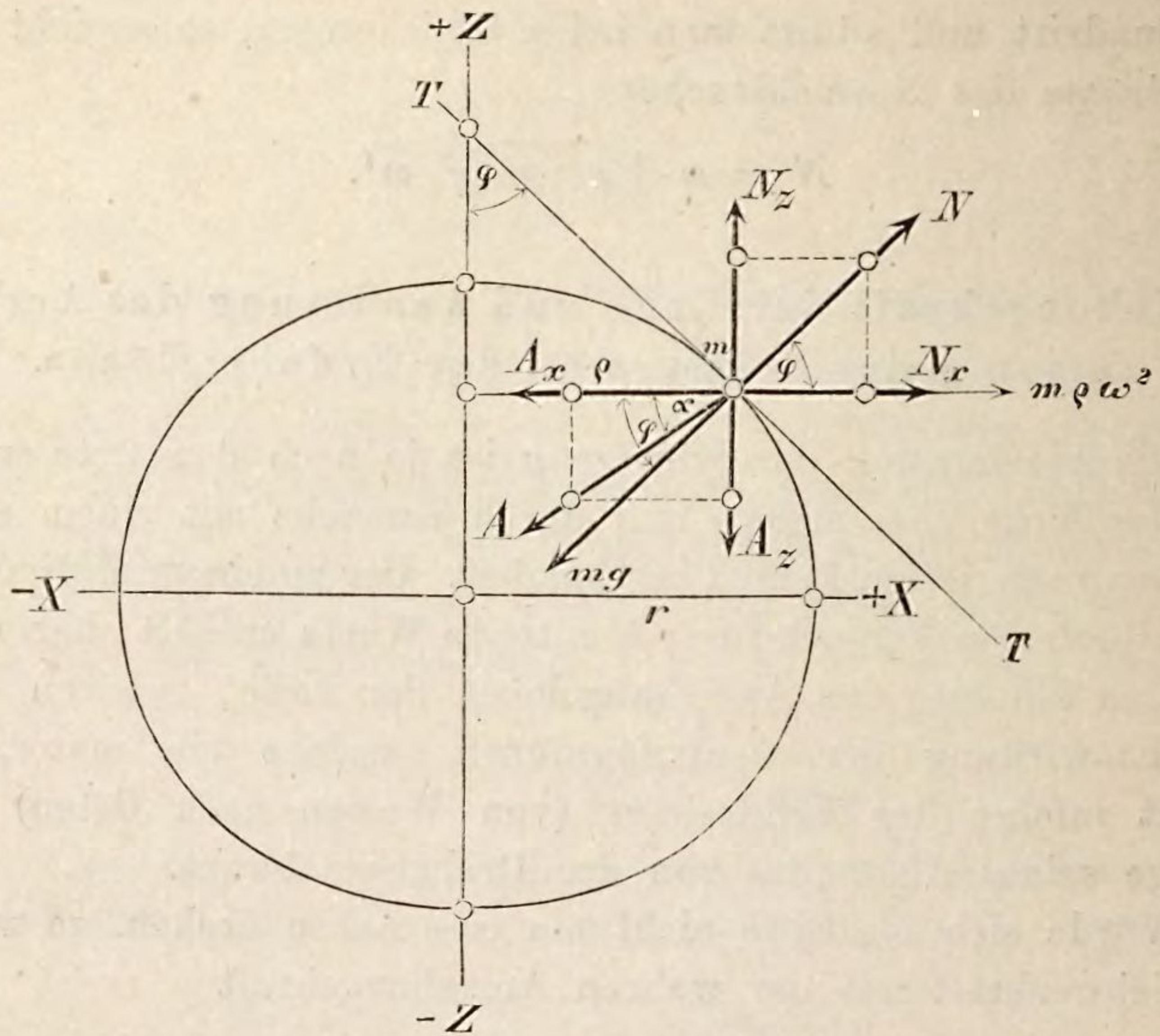


Fig. 191.

Anziehungskraft A und dem Normalwiderstand N der Erdoberfläche entstehenden Effectivkraft; daher ist

$$P_{\xi} = N_x - A_x,$$

$$P_r = 0,$$

$$P_z = N_z - A_z.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe folgt

$$N_x - A_x + m \cdot \rho \cdot \omega^2 = 0,$$

$$N_z - A_z = 0$$

oder

$$A_x = N_x + m \cdot \rho \cdot \omega^2$$

und

$$A_z = N_z.$$

Ist nun durch φ die geographische Breite des Ortes m bestimmt und bedenkt man, dass die Schwere normal zur Tan-

gente TT , also in der Richtung des Normalwiderstandes, aber demselben entgegen wirkt, dann ist

$$N_x = m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

und

$$N_z = m \cdot g \cdot \sin \varphi;$$

und setzt man

$$A_x = m \cdot p_x$$

und

$$A_z = m \cdot p_z,$$

wobei p_x und p_z die Componenten nach X und Z der lediglich durch die Anziehungskraft A bedingten Beschleunigung p sind, dann folgt aus den Gleichungen für A_x und A_z

$$p_x = g \cdot \cos \varphi + \varrho \cdot \omega^2$$

und

$$p_y = g \cdot \sin \varphi.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so ergibt sich die Richtung der wahren Anziehungskraft A durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_z}{p_x} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + \frac{\varrho \cdot \omega^2}{g}},$$

wofür auch geschrieben werden kann

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{\varrho \cdot \omega^2}{g \cdot \cos \varphi}} \right),$$

oder auch nach ausgeführter Division, Kürzung und der Berücksichtigung, dass für die Erde annähernd

$$\varrho = r \cdot \cos \varphi$$

ist,

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cdot \left(1 - \frac{r \cdot \omega^2}{g} \right).$$

Der Ausdruck $\frac{r \cdot \omega^2}{g}$ findet sich für den Aequator zu

$$\frac{1}{289},$$

also sehr klein, und es folgt daher, dass

$$\alpha < \varphi,$$

die Differenz aber sehr klein und ausserdem bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 90^\circ$ gleich Null wird.

Die Beschleunigung der wahren Anziehungskraft der Erde oder — wie man auch sagen kann — die Anziehungskraft der Masse Eins ist nach Fig. 191

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p_x^2 + p_z^2} \\ &= \sqrt{g^2 + 2 \cdot g \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi + (\varrho \cdot \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ oder $\varphi = 90^\circ$, d. h. für den Nord- resp. Südpol wird

$$p = g,$$

für den Aequator aber ist $\varphi = 0$ und $x = r$ also

$$p = \sqrt{g^2 + 2 \cdot g \cdot r \cdot \omega^2 + (r \cdot \omega^2)^2},$$

oder

$$p = g + r \cdot \omega^2$$

und

$$A = m \cdot g + m \cdot r \cdot \omega^2.$$

Beurtheilt man aus den erhaltenen Resultaten nur die Veränderung der Acceleration der Schwere g und schreibt man zu dem Zwecke mit Hilfe der Gleichung für p

$$g = \sqrt{p^2 - \varrho^2 \cdot \omega^4 \cdot (1 - \cos^2 \varphi)} - \varrho \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi,$$

so findet man, dass g für $x = 0$, also an den Polen am grössten ist, weil daselbst die Centrifugalkraft gleich Null wird und wegen der Form der Erde die Anziehungskraft am grössten ist, und dass g für $x = r$, also am Aequator, seinen kleinsten Werth erhält, weil hier die Centrifugalkraft ihren grössten und die Anziehungskraft ihren kleinsten Werth annimmt.

Bewegung eines materiellen Punktes m in einem Rohre, welches sich gleichförmig um eine normal zur Bildebene stehende Achse dreht. (Das Gewicht des materiellen Punktes werde vernachlässigt.)

a) Die Achse laufe durch das Rohrende O (Fig. 192). Der anfangs ruhend gedachte materielle Punkt m erleidet infolge

der Drehbewegung und in ihrem Sinne seitens der Rohrwand

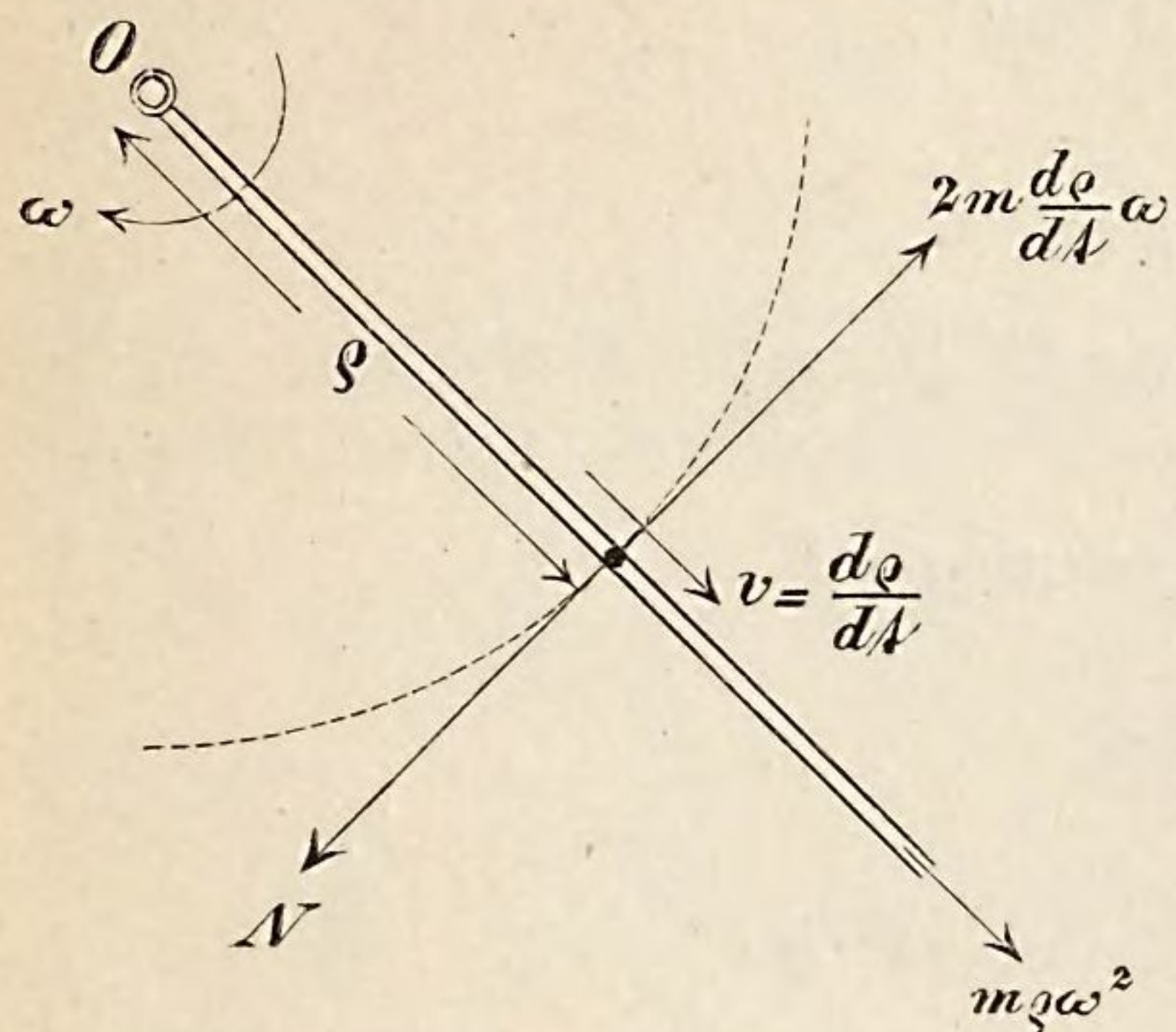


Fig. 192.

einen Normaldruck N , welcher den materiellen Punkt nöthigt an der Drehbewegung des Rohres (Raumes) Theil zu nehmen; die relative Winkelgeschwindigkeit ω_r wird infolge dessen gleich Null. Während die einzelnen materiellen Punkte des Rohres selbst ihre ursprüngliche Entfernung von der Drehachse O dadurch beibehalten, dass die, infolge der Drehbewegung ent-

stehenden Centrifugalkräfte von den, in der starren Verbindung mit der Drehachse wirkenden, gleich grossen Centripetalkräfte aufgehoben werden, erhält der materielle Punkt m durch die Drehbewegung die Centrifugalkraft $m \cdot \rho \cdot \omega^2$ und bewegt sich infolge derselben mit einer veränderlichen Geschwindigkeit

$$v = \frac{d\rho}{dt}$$

in der Rohrachse auswärts.

Lässt man nun die X -Achse (Fig. 192) mit der Rohrachse zusammenfallen, macht man also $\alpha_1 = 0$ (Fig. 189), lässt man ausser der mitnehmenden Kraft N keine andere Kraft auf den materiellen Punkt m wirken und bedenkt man ausserdem, dass die fortschreitende Bewegung des Rohres (Raumes) gleich Null ist, dann folgt mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen der relativen Bewegung und mit Berücksichtigung der Werthe

$$P_\xi = 0; \quad P_\eta = N \text{ und } P_\zeta = 0,$$

in der Richtung der X -Achse (kein Gleichgewicht)

$$P_x = m \cdot \rho \cdot \omega^2,$$

in der Richtung der Y -Achse (Gleichgewicht)

$$P_y = N - 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega = 0$$

oder

$$N = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega.$$

Für P_x kann auch geschrieben werden

$$m \cdot \frac{d^2\varrho}{dt^2} = m \cdot \varrho \cdot \omega^2,$$

woraus sich die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = + \omega^2 \cdot \varrho$$

in der Richtung der Rohrachse ergibt.

Dieser Ausdruck steht dem früher bei der Betrachtung geradliniger Schwingungen erhaltenen Werthe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - k^2 \cdot x$$

gegenüber und, da sich letzterer für die Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstände von einem festen Anziehungscentrum proportionalen „Anziehungskraft“ ergab, so gilt der erstere Werth, welcher sich in der Form nur auf der rechten Seite durch das Vorzeichen unterscheidet, unter sonst gleichen Verhältnissen für eine „Abstossungskraft“.

Das Integral dieser Gleichung ist allgemein

$$\varrho = A \cdot e^{+\omega t} + B \cdot e^{-\omega t}$$

und hieraus folgt für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{d\varrho}{dt} = A \cdot \omega \cdot e^{+\omega t} - B \cdot \omega \cdot e^{-\omega t}.$$

Bestimmung der Integrationsconstanten A und B .

Für $t = 0$ mögen die Werthe gelten

$$\varrho = \varrho_0$$

und

$$v = c,$$

mit welchen man

$$\varrho_o = A + B$$

und

$$v_o = A \cdot \omega - B \cdot \omega$$

erhält. Berechnet man hieraus A und B und setzt man diese Grössen in die Gleichungen für ϱ und v ein, so folgt

$$\varrho = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\varrho_o + \frac{c}{\omega} \right) \cdot e^{+\omega t} + \left(\varrho_o - \frac{c}{\omega} \right) \cdot e^{-\omega t} \right\}$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (\varrho_o \cdot \omega + c) \cdot e^{+\omega t} - (\varrho_o \cdot \omega - c) \cdot e^{-\omega t} \right\}.$$

Durch Elimination von t aus diesen beiden Gleichungen kann v als Function von ϱ dargestellt werden.

Man gelangt aber auch zu demselben Resultate, indem man

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \omega^2 \cdot \varrho$$

mit $2d \cdot \varrho$ multiplicirt, wodurch sich

$$2 \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot d\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = 2 \cdot \omega^2 \cdot \varrho \cdot d\varrho,$$

$$\int_c^v v \cdot dv = \omega^2 \int_{\varrho_o}^{\varrho} \varrho \cdot d\varrho$$

oder

$$v^2 - c^2 = \varrho^2 \cdot \omega^2 - \varrho_o^2 \cdot \omega^2$$

ergiebt.

b) Die Drehachse laufe durch den beliebigen Punkt O (Fig. 193).

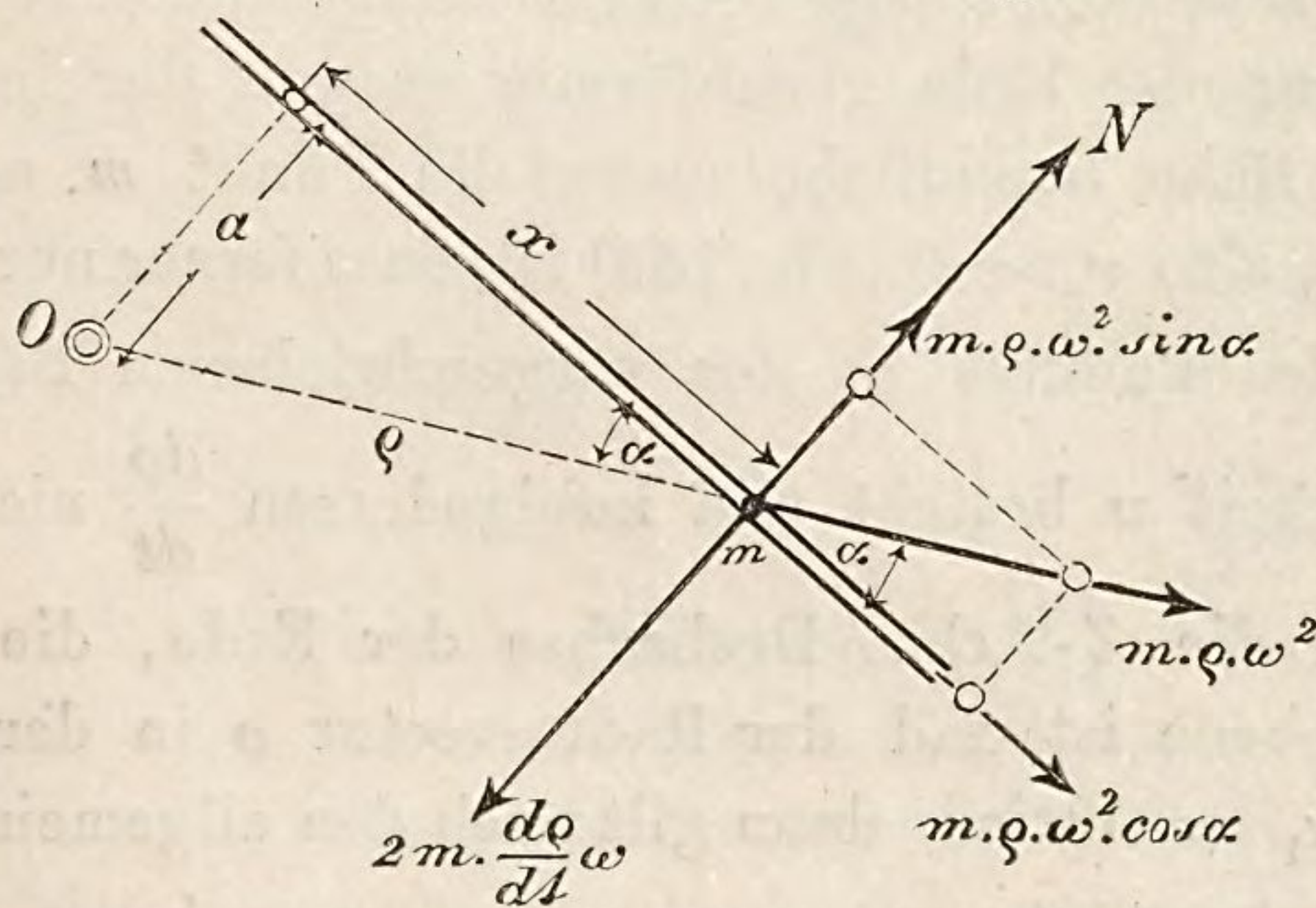


Fig. 193.

In diesem Falle hat die Centrifugalkraft die Richtung Om , sie muss folglich in die Richtung des Rohres und normal zu demselben zerlegt werden.

Analog dem Obigen folgt dann

$$N + m \cdot \varrho \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega,$$

oder, da

$$\varrho \cdot \sin \alpha = a \text{ ist,}$$

$$N = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega - m \cdot a \cdot \omega^2,$$

und es wird dieser Normaldruck gleich Null für

$$0 = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega - m \cdot a \cdot \omega^2$$

oder für

$$v = \frac{a \cdot \omega}{2};$$

negativ hingegen wird er für

$$v < \frac{a \cdot \omega}{2}.$$

Für die Beschleunigung der relativen Bewegung gilt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varrho \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha = \omega^2 \cdot x$$

und da diese Form mit derjenigen des ersten Falles übereinstimmt, so gelten auch hier die oben erhaltenen Resultate.

Bewegung eines materiellen Punktes in einer vorgeschriebenen Bahn auf der Erdoberfläche.

Wenn W den totalen Widerstand, welchen die vorgeschriebene Bahn auf den materiellen Punkt äussert, und $m \cdot p$ die wahre Anziehung der Erde bedeutet, wenn man die fortschreitende Bewegung der Erde nicht in Betracht bringt und bedenkt, dass die Drehbewegung der Erde gleichförmig ist und der in der vorgeschriebenen Bahn befindliche materielle Punkt m an derselben Theil nimmt, also $v_r = 0$ (Fig. 189) ist, dass ferner nur die relative Bewegung des Punktes in der vorgeschriebenen Bahn mit der Geschwindigkeit v besteht und in folgedessen $\frac{d\varrho}{dt}$ nicht Null ist; wenn weiter die Z -Achse Drehachse der Erde, die XY -Ebene Aequatorialebene ist und der Radiusvector ϱ in der XZ -Ebene liegt, also $\alpha_1 = 0$ wird, dann gilt nach den allgemeinen Formeln der Relativbewegung

$$\begin{aligned}
 P_x &= (W_x - m \cdot p_x) + m \cdot \varrho \cdot \omega^2, \\
 P_y &= (W_y - m \cdot p_y) + 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega, \\
 P_z &= (W_z - m \cdot p_z).
 \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Fig. 191

$$\begin{aligned}
 m \cdot p_x &= m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \varrho \cdot \omega^2, \\
 m \cdot p_y &= 0, \\
 m \cdot p_z &= m \cdot g \cdot \sin \varphi,
 \end{aligned}$$

und infolgedessen

$$\begin{aligned}
 P_x &= W_x - m \cdot g \cdot \cos \varphi, \\
 P_y &= W_y - 2 \cdot m \cdot \frac{d\varrho}{dt} \cdot \omega, \\
 P_z &= W_z - m \cdot g \cdot \sin \varphi.
 \end{aligned}$$

Bewegt sich der materielle Punkt beispielsweise in einer auf einem Meridian vorgeschriebenen Bahn (Fig. 194 und 195)

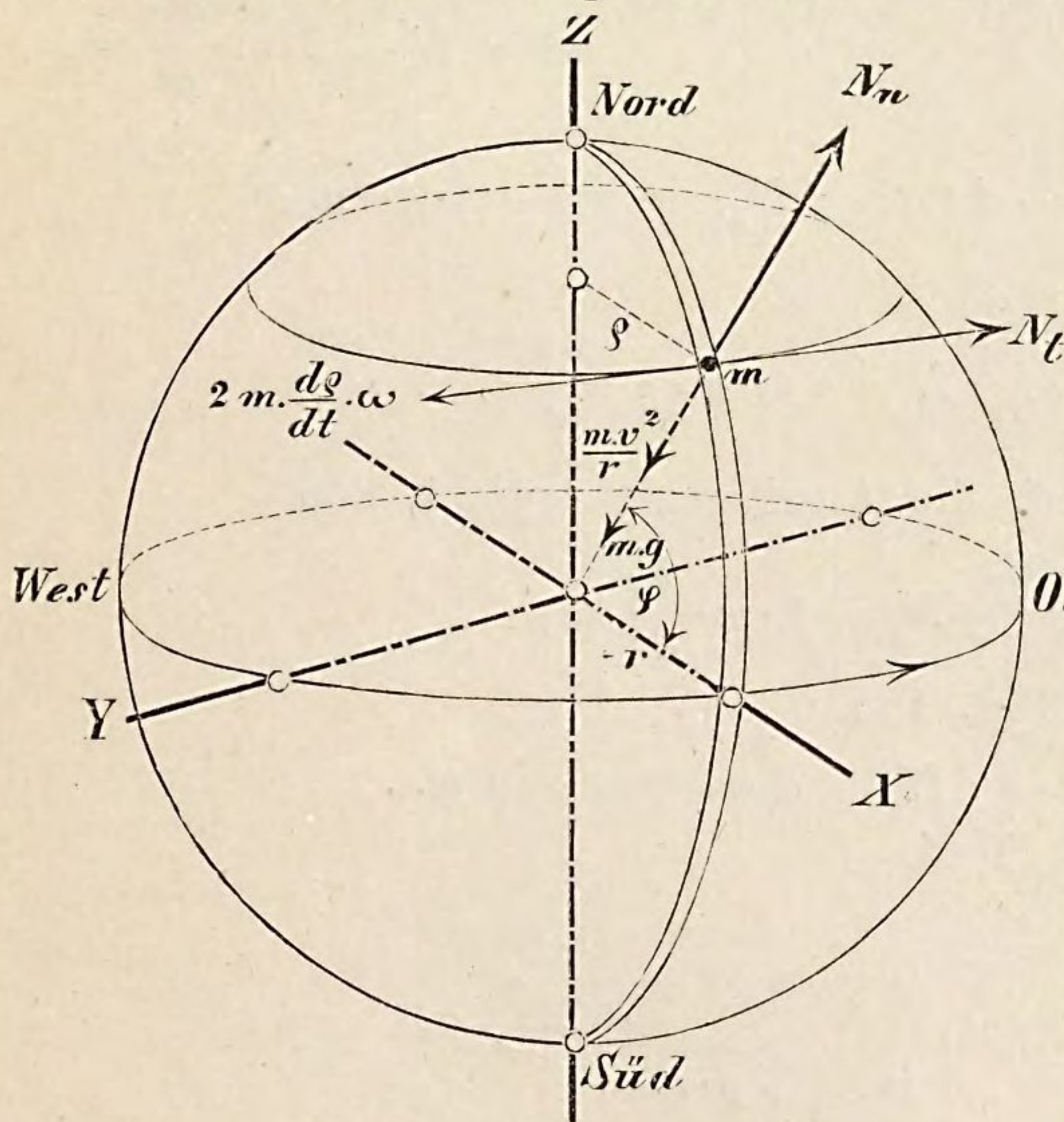


Fig. 194.

(dieselbe als eine durch die Centripetalkraft $\frac{m \cdot v^2}{r}$

bedingte Kreisbahn angesehen) mit der relativen Geschwindigkeit

v , dann besteht der totale Bahnwiderstand W aus dem tangentialen Widerstand N_t , vermöge dessen der materielle Punkt m an der Drehbewegung der Erde Theil nimmt, und

aus dem zur Erde normalen Widerstande N_n , welchen die Bahn zur Erzeugung der Kreisbewegung abgeben muss.

Die Kraft, welche die Kreisbewegung bedingt, ist im vorliegenden Falle durch ihre Componenten ausgedrückt

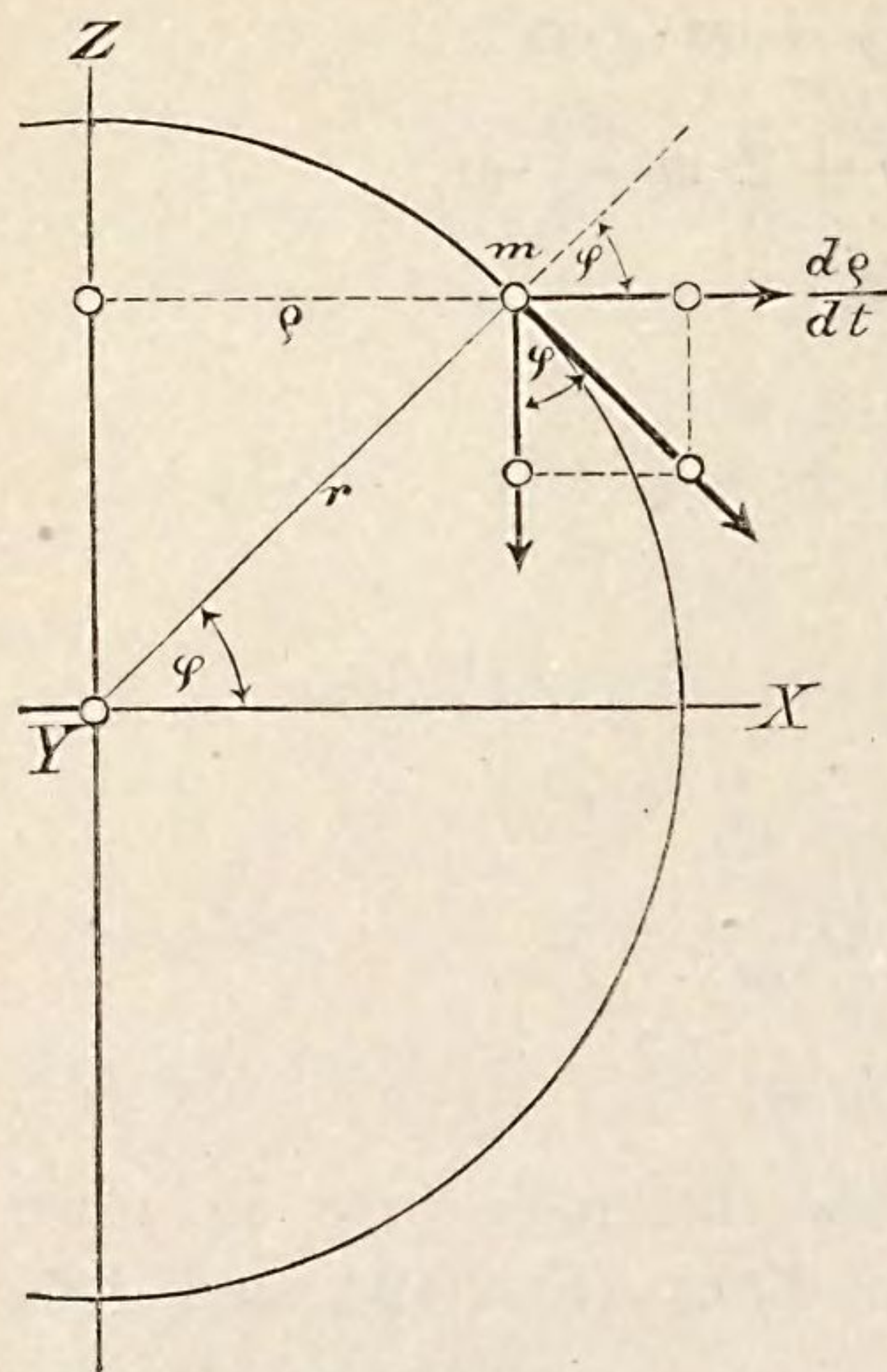


Fig. 195.

$$P_x = -\frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \cos \varphi,$$

$$P_y = 0,$$

$$P_z = -\frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \sin \varphi,$$

ferner ist

$$W_x = N_n \cdot \cos \varphi,$$

$$W_y = N_t,$$

$$W_z = N_n \cdot \sin \varphi,$$

und es ergibt sich daher durch
Einsetzung in die oben erhaltenen
allgemeinen Gleichungen für
 P_x , P_y und P_z

$$-\frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \cos \varphi = N_n \cdot \cos \varphi - m \cdot g \cdot \cos \varphi,$$

$$0 = N_t - 2 \cdot m \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \omega,$$

$$-\frac{m \cdot v^2}{r} \cdot \sin \varphi = N_n \cdot \sin \varphi - m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

oder

$$N_n = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{r},$$

was sich schon durch die Anschauung ergibt, und

$$N_t = 2 \cdot m \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \omega;$$

und mit Hilfe von Fig. 195 ist

$$N_t = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega \cdot \sin \varphi.$$

N_n wird Null für

$$0 = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{2}$$

und hieraus wird

$$v = \sqrt{g \cdot r}.$$

Es ist

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{86164,1} = 0,00007292$$

und

$$r = 6370000^{\text{met.}}$$

Dritter Abschnitt.

Bewegungslehre eines Körpers oder Dynamik.

Die Dynamik oder die Bewegungslehre der Körper behandelt die „Bewegung“ und als speciellen Fall das „Gleichgewicht“ der Körper unter Berücksichtigung aller Bewegungsursachen.

Hierbei versteht man unter einem Körper ein System von mit einander verbundenen materiellen Punkten, welches Raum erfüllt.

Man nennt den Körper einen

„starren“ oder „festen“,

wenn die materiellen Punkte im System unveränderlich mit einander verbunden sind, d. h. wenn die Art der Verbindung der materiellen Punkte keinerlei gegenseitige Verschiebung der letzteren erlaubt.

„Lose“ oder „elastisch“

hingegen heisst ein Körper, wenn die Art der Vereinigung gewisse Verschiebungen der materiellen Punkte im System zulässt.

Enthalten gleiche Volumentheile eines Körpers gleichviel Masse, so ist derselbe

„homogen“ oder „gleichförmig dicht“;

und ist jene Bedingung nicht erfüllt, so sagt man der Körper ist

„ungleichförmig dicht“.

Bewegung eines starren Körpers.

I.

Geometrisches über die Bewegung eines Körpers.

Ein Körper hat eine „geradlinig fortschreitende“ Bewegung, wenn die geraden Verbindungslinien von drei an dem Körper gegebenen Punkten, durch welche die Lage des Körpers vollkommen bestimmt ist, stets parallel zu ihrer ursprünglichen Lage bleiben.

In diesem Falle bleibt auch jede zwischen je zwei Punkten des Körpers gezogene Gerade parallel zu ihrer ursprünglichen Lage, und alle Punkte des Körpers erhalten parallele Bewegungsrichtungen in demselben Sinne und zur selben Zeit gleich grosse Geschwindigkeiten.

Hieraus ergibt sich aber, dass zur Bestimmung einer „geradlinig fortschreitenden“ Bewegung eines Körpers nur die Bewegung eines einzigen Punktes desselben zu untersuchen ist.

Ein Körper besitzt eine „Drehbewegung“, wenn während der Bewegung zwei Punkte, also auch die in der geraden Verbindungslinie der letzteren liegenden Punkte des Körpers im Ruhezustand verbleiben.

Jene gerade Verbindungslinie nennt man die

„Dreh- oder Rotations-Achse“;

um sie beschreiben alle materiellen Punkte des Körpers — und zwar wegen der Starrheit des Systemes — mit gleicher Winkelgeschwindigkeit Kreise in senkrecht auf der Drehachse stehenden Ebenen.

Besitzt ein Körper gleichzeitig zwei oder mehrere geradlinig fortschreitende Bewegungen, so gilt zur Bestimmung der wahren Bewegung eines jeden Punktes des Körpers das bereits in der geometrischen Bewegungslehre gefundene Parallelogrammgesetz.

Hat ein Körper beispielsweise in drei aufeinander senkrecht stehenden Achsen X , Y , Z geradlinig fortschreitende Bewegungen, und sind die Wege x , y , z des Körpers in den Achsen zur Zeit t bekannt, dann sind auch nach obigem Gesetze die wahren Bahnen der einzelnen Punkte des Körpers leicht bestimmbar.

Besitzt ferner ein Körper gleichzeitig zwei oder mehrere Drehbewegungen, so lässt sich die resultirende Bewegung eines jeden Punktes ebenfalls nach den Principien des Zusammensetzens finden, während umgekehrt jede Drehbewegung eines Körperpunktes in augenblickliche Drehbewegungen um vorgeschriebene Achsen zerlegt werden kann.

Besitzt nun ein Körper gleichzeitig fortschreitende Bewegung und Drehbewegung um eine im Raume XYZ liegende durch den Schnittpunkt der Achsen X , Y , Z laufende Drehachse, dann können je nach der Art der fortschreitenden und der Dreh-Bewegung alle denkbaren Bewegungen der Körperpunkte resp. des Körpers entstehen.

In jedem Zeitpunkte der Bewegung aber lassen sich die fortschreitende Bewegung für sich und die Drehbewegung für sich in Bezug auf drei senkrecht aufeinander stehende Achsen X , Y , Z , also im Ganzen in sechs Einzelbewegungen zerlegen.

II.

Kräfte an einem starren Körper.

An einem Körper sind im Allgemeinen

„äussere“ und

„innere“ Kräfte

zu unterscheiden.

Während die äusseren Kräfte ihren Sitz ausserhalb des Körpers haben, also von aussen her auf den Körper ein-

wirken und an demselben Formveränderungen anstreben, haben die inneren Kräfte ihren Sitz im Inneren des Körpers; sie bewirken als „anziehende“ und „abstossende“ Kräfte den Zusammenhang der einzelnen materiellen Punkte und zwar der Art, dass sie den angestrebten Formveränderungen als Widerstände entgegentreten. Bei starren Körpern werden daher die inneren Kräfte jede Formveränderung, also eine Entfernung oder Näherung der einzelnen materiellen Punkte verhindern, bei elastischen Körpern hingegen werden sie nach stattgefundener Formveränderung die ursprüngliche Form des Körpers wieder herzustellen suchen.

1.

Äussere Kräfte an einem starren Körper.

Die directe Einwirkung der äusseren Kräfte auf einen Körper kann im Allgemeinen an verschiedenen Stellen desselben stattfinden; man pflegt daher denjenigen Ort am Körper, welcher direct von einer äusseren Kraft beeinflusst wird, mit dem Namen

„Angriffspunkt“

einer Kraft zu belegen.

Mit Rücksicht hierauf ist nunmehr zur Feststellung einer äusseren Kraft an einem Körper die Bestimmung

der „Grösse“,

der „Richtung“

und des „Angriffspunktes“

erforderlich.

In Folgendem mögen äussere Kräfte am Körper mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte und solche mit verschiedenen Angriffspunkten nach obigen drei Gesichtspunkten bestimmt werden, wobei jedoch noch unterschieden werden soll, ob die Kräfte in ein und derselben Ebene liegen oder beliebig im Raume gerichtet sind.

- a) Aeussere Kräfte an einem starren Körper in ein und derselben Ebene und mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte.

Zur Aufsuchung der Resultirenden aus beliebig vielen Kräften, welche in ein und derselben Ebene liegen und an einem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte des Körpers angreifen, gelten die nämlichen Regeln, welche früher für Kräfte an einem materiellen Punkt erhalten wurden.

Waren X und Y die Resultirenden aus den Componenten von beliebig vielen Kräften nach einer X - und einer senkrecht auf ihr stehenden Y -Achse und bedeutete φ den Richtungswinkel zwischen der Resultirenden R und der X -Achse, dann galt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

und $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}.$

- b) Aeussere Kräfte an einem starren Körper beliebig im Raume gerichtet und mit gemeinschaftlichem Angriffspunkte.

Auch hier gelten die Regeln, welche für beliebig im Raume gerichtete Kräfte an einem materiellen Punkte erhalten wurden.

Sind X, Y und Z die Resultirenden aus den Componenten von beliebig vielen Kräften an demselben Angriffspunkte nach drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z , sind x, y, z die Coordinaten des Angriffspunktes und α, β, γ die Richtungswinkel der Resultirenden R zu den Achsen, dann gilt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{R},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

c) Aeussere Kräfte an einem starren Körper in ein und derselben Ebene mit verschiedenen Angriffspunkten.

Die „Angriffspunkte“ der äusseren Kräfte an einem Körper werden bestimmt durch ihre Coordinaten bezogen auf ein festes Achsensystem, während die „Richtung“ und die „Grösse“ der Kraft sich nach dem bisherigen Verfahren ergeben.

Zur Bestimmung der Resultirenden aus mehreren Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten aber ist noch folgender Erfahrungssatz erforderlich:

„Wirkt eine Kraft auf ein starres System, so kann dieselbe in ihrer eigenen Richtung beliebig rückwärts oder vorwärts verlegt werden, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern; es besteht also diese Thatsache, wenn der neue Angriffspunkt mit dem ursprünglichen eine starre Verbindung hat.“

Sind beispielsweise zwei Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 196) gegeben, deren Angriffspunkte durch ihre Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 bezogen auf das beliebige in der Bildebene gelegene rechtwinkelige Achsensystem X, Y und deren Richtungen durch die Neigungswinkel α_1 und α_2 zur X -Achse bekannt sind, so findet man ihre Resultirende R , indem man die Krafrichtungen bis zu ihrem Durchschnitt O_1 ver-

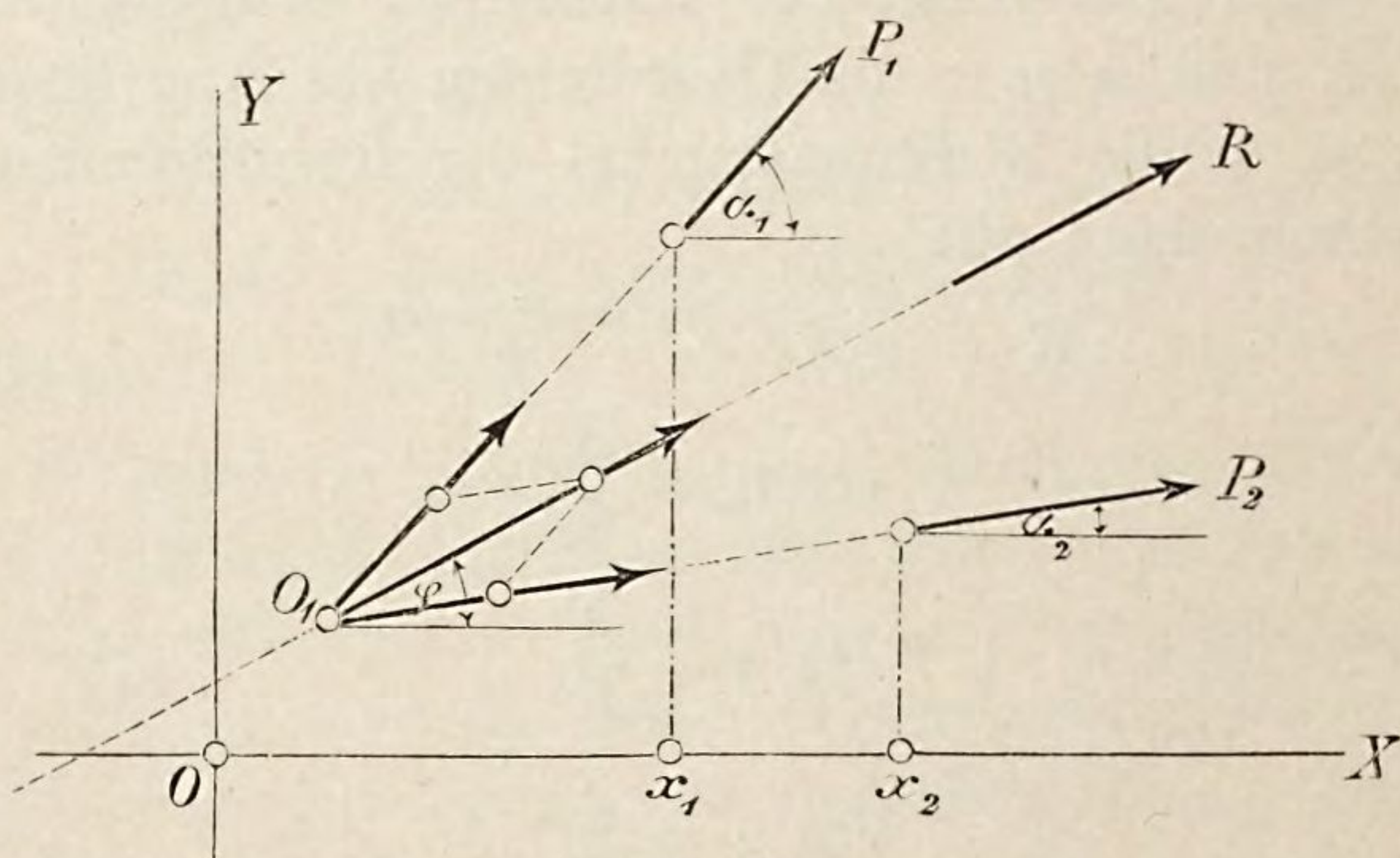


Fig. 196.

längert, die Kräfte selbst — ohne die Wirkung zu ändern — nach O_1 verlegt und dieselben an dieser Stelle nach dem Parallelogrammgesetz zusammensetzt.

Wäre der Neigungswinkel der Resultirenden R zur X -Achse φ , so würde für die Componenten von R in den Achsenrichtungen gelten

$$X = R \cdot \cos \varphi = \Sigma(P \cdot \cos \alpha),$$

$$Y = R \cdot \sin \varphi = \Sigma(P \cdot \sin \alpha),$$

und die Resultirende selbst würde sich ihrer „Grösse“ nach bestimmen, wie früher, durch

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2};$$

ihre „Richtung“ hingegen findet sich durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Die vorstehenden Resultate gelten auch für beliebig viele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten in derselben Ebene.

Der „Angriffspunkt“ der Resultirenden kann nun nach dem obigen Erfahrungsgesetz jeder Punkt des Körpers sein, welcher in der Richtung der Resultirenden liegt; folglich ist, wenn beliebig viele Kräfte nach Grösse, Richtung und Angriffspunkt durch

$$P_1, P_2, P_3 \dots$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$$

$$x_1, x_2, x_3 \dots$$

$$y_1, y_2, y_3 \dots$$

gegeben sind, zur Bestimmung der möglichen Angriffspunkte die Gleichung derjenigen Geraden zu bestimmen, welche mit der Richtung von R zusammenfällt.

Zu dem Zwecke mögen x und y die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Geraden, $a_1, a_2 \dots$ die senkrechten Abstände, die Hebelarme, der Einzelkräfte und r

der senkrechte Abstand der Resultirenden R vom Coordinatenanfang O , denselben als Drehpunkt betrachtet, sein; dann gilt aber mit Bezug auf Fig. 197

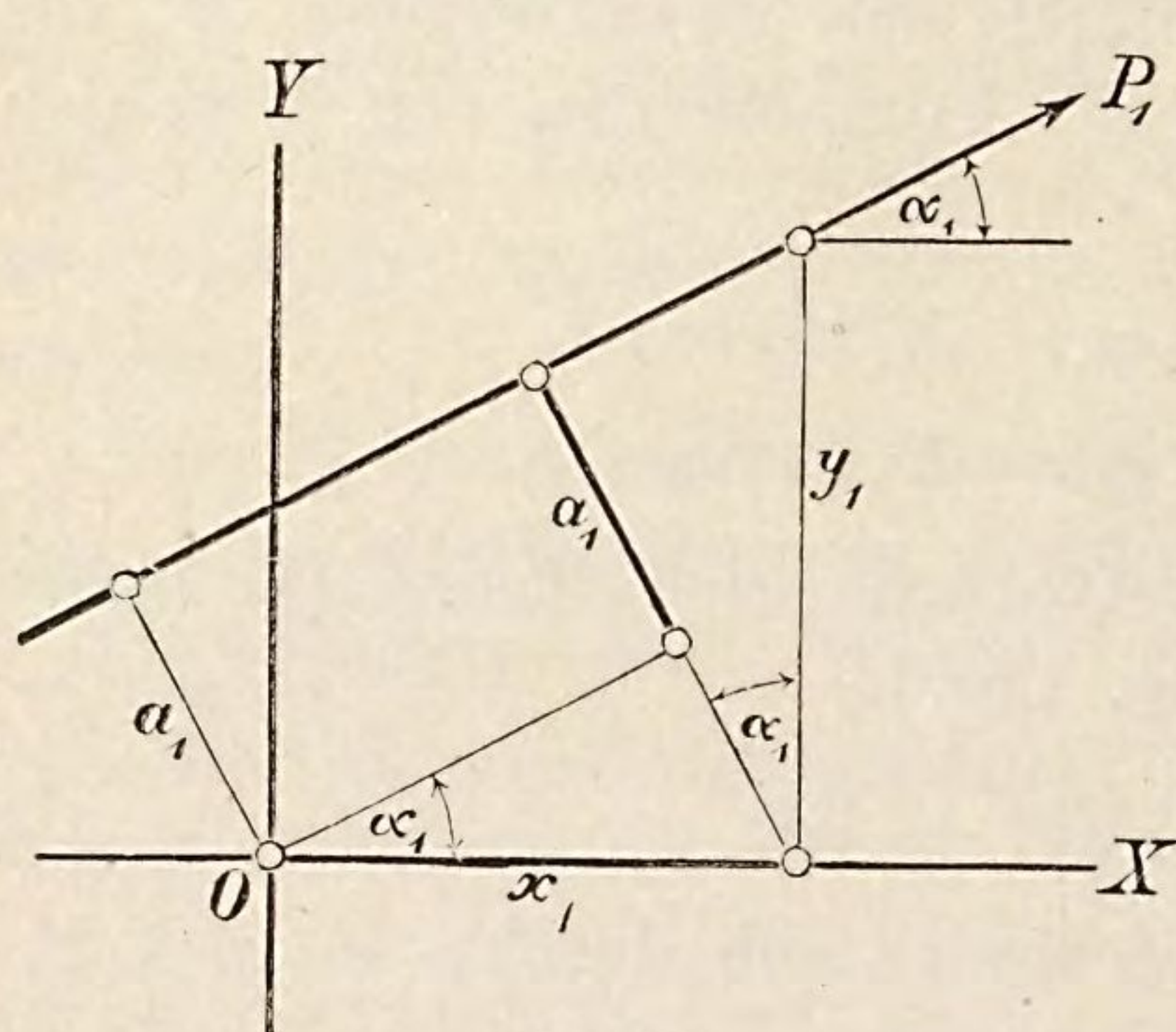


Fig. 197.

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 \cdot \cos \alpha_1 - x_1 \cdot \sin \alpha_1, \\ a_2 &= y_2 \cdot \cos \alpha_2 - x_2 \cdot \sin \alpha_2, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

und

$$r = y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi.$$

Nun ist aber nach dem Gesetz der statischen Momente

$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot a),$$

also nach Einsetzung der Werthe

$$R \cdot (y \cdot \cos \varphi - x \cdot \sin \varphi) = \Sigma\{P \cdot (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)\}$$

oder

$$R \cdot \cos \varphi \cdot y - R \cdot \sin \varphi \cdot x = \Sigma(P \cdot \cos \alpha \cdot y) - \Sigma(P \cdot \sin \alpha \cdot x),$$

wofür nach der üblichen Schreibweise auch gesetzt werden darf

$$X \cdot y - Y \cdot x = \Sigma(X \cdot y) - \Sigma(Y \cdot x);$$

hieraus ergibt sich aber

$$y = \frac{\Sigma(X \cdot y)}{X} + \frac{Y \cdot x - \Sigma(Y \cdot x)}{X}.$$

Zur schnelleren Bestimmung der Geraden mögen nach dieser Gleichung die Coordinaten x' und y' (Fig. 198) der Durchschnittspunkte der Geraden mit der X- und Y-Achse berechnet werden.

Für x' ist $y = 0$, also

$$0 = \Sigma(X \cdot y) + Y \cdot x' - \Sigma(Y \cdot x),$$

$$x' = \frac{\Sigma(Y \cdot x) - \Sigma(X \cdot y)}{Y},$$

und für y' ist $x = 0$, also

$$y' = \frac{\Sigma(X \cdot y) - \Sigma(Y \cdot x)}{X},$$

mit welchen Grössen sich ebenfalls die Richtung der Geraden resp. der Resultirenden R ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'}.$$

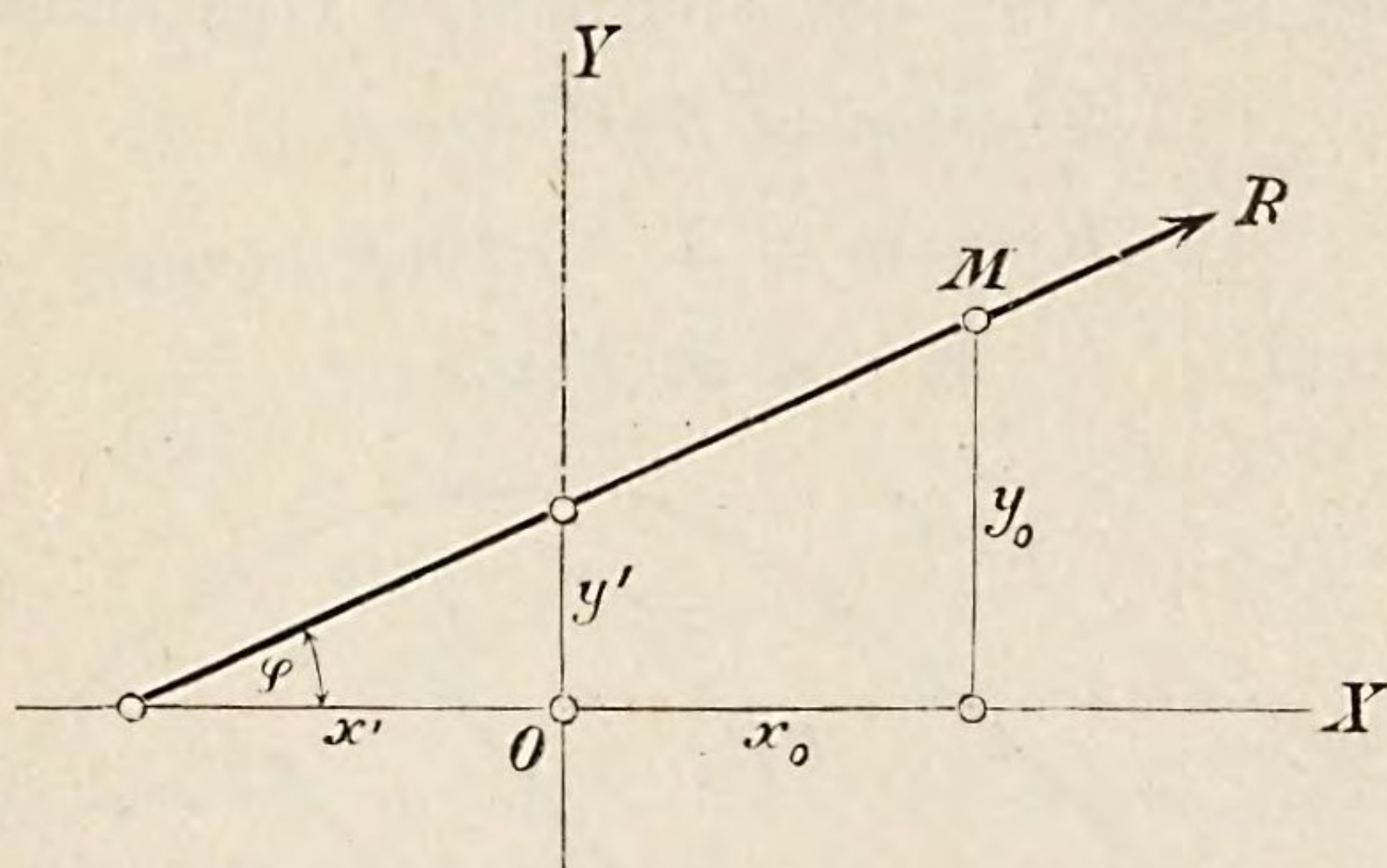


Fig. 198.

Die allgemeine Gleichung der Geraden liefert nun noch zwei ganz bestimmte Werthe für x und y , welche mit x_0 und y_0 bezeichnet werden sollen. Bedenkt man, dass

$$Y \cdot x = \Sigma(Y \cdot x)$$

ist, dann folgen

$$x_0 = \frac{\Sigma(Y \cdot x)}{Y}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(X \cdot y)}{X},$$

die Coordinaten des sogenannten „Mittelpunktes“ der Kräfte, welcher die Eigenthümlichkeit besitzt, für die Gerade der Resultirenden als Drehpunkt aufzutreten, falls sämtliche Einzelkräfte in derselben Ebene an ihren Angriffspunkten um denselben Winkel und in demselben Sinne verdreht werden. Der Mittelpunkt M der Kräfte bleibt

daher stets — trotz der Verdrehung der Geraden um denselben Winkel — der Angriffspunkt der Resultirenden R .

Spezieller Fall: Sind die Kräfte in derselben Ebene „Parallelkräfte“,

dann ist die Neigung α zur X -Achse für alle Kräfte constant und sind je nach der Richtung die Kräfte positiv oder negativ (Fig. 199).

Es folgt daher aus den allgemeinen Gleichungen

$$R \cdot \cos \varphi = \Sigma(P) \cdot \cos \alpha,$$

$$R \cdot \sin \varphi = \Sigma(P) \cdot \sin \alpha$$

und
$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot a).$$

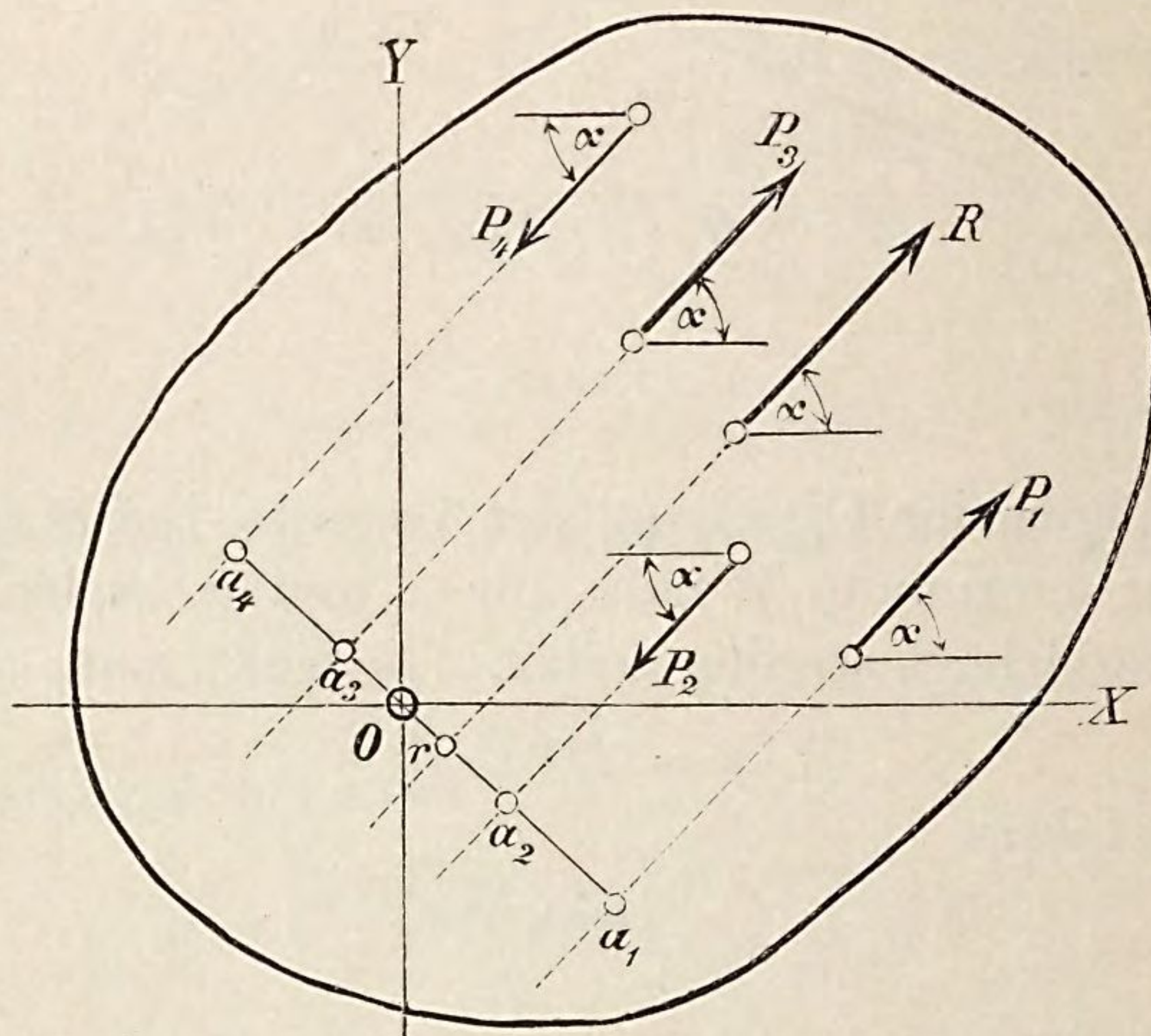


Fig. 199.

Hieraus ergibt sich aber

$$\varphi = \alpha,$$

$$R = \Sigma(P)$$

und
$$r = \frac{\Sigma(P \cdot a)}{R},$$

wodurch sich die Resultierende R sowohl nach der Grösse

und der Richtung, als auch nach ihrem Angriffspunkte bestimmen lässt.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes der Resultirenden R genügt auch die Kenntniss der Richtung derselben und die Bestimmung des Mittelpunktes der Parallelkräfte, für welchen gilt

$$x_0 = \frac{\Sigma(Y \cdot x)}{Y} = \frac{\Sigma(P \cdot \sin \alpha \cdot x)}{\Sigma(P \cdot \sin \alpha)}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(X \cdot y)}{X} = \frac{\Sigma(P \cdot \cos \alpha \cdot y)}{\Sigma(P \cdot \cos \alpha)},$$

oder, da α constant ist,

$$x_0 = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{R},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(P \cdot y)}{R}.$$

Der vorliegende specielle Fall für Parallelkräfte führt noch auf den Begriff des

„Kräftepaares“.

Sind in ein und derselben Ebene zwei gleich grosse parallel und entgegengesetzt gerichtete Kräfte P mit verschiedenen Angriffspunkten gegeben, deren senkrechter Abstand a ist, so folgt bezogen auf einen beliebigen, aber in

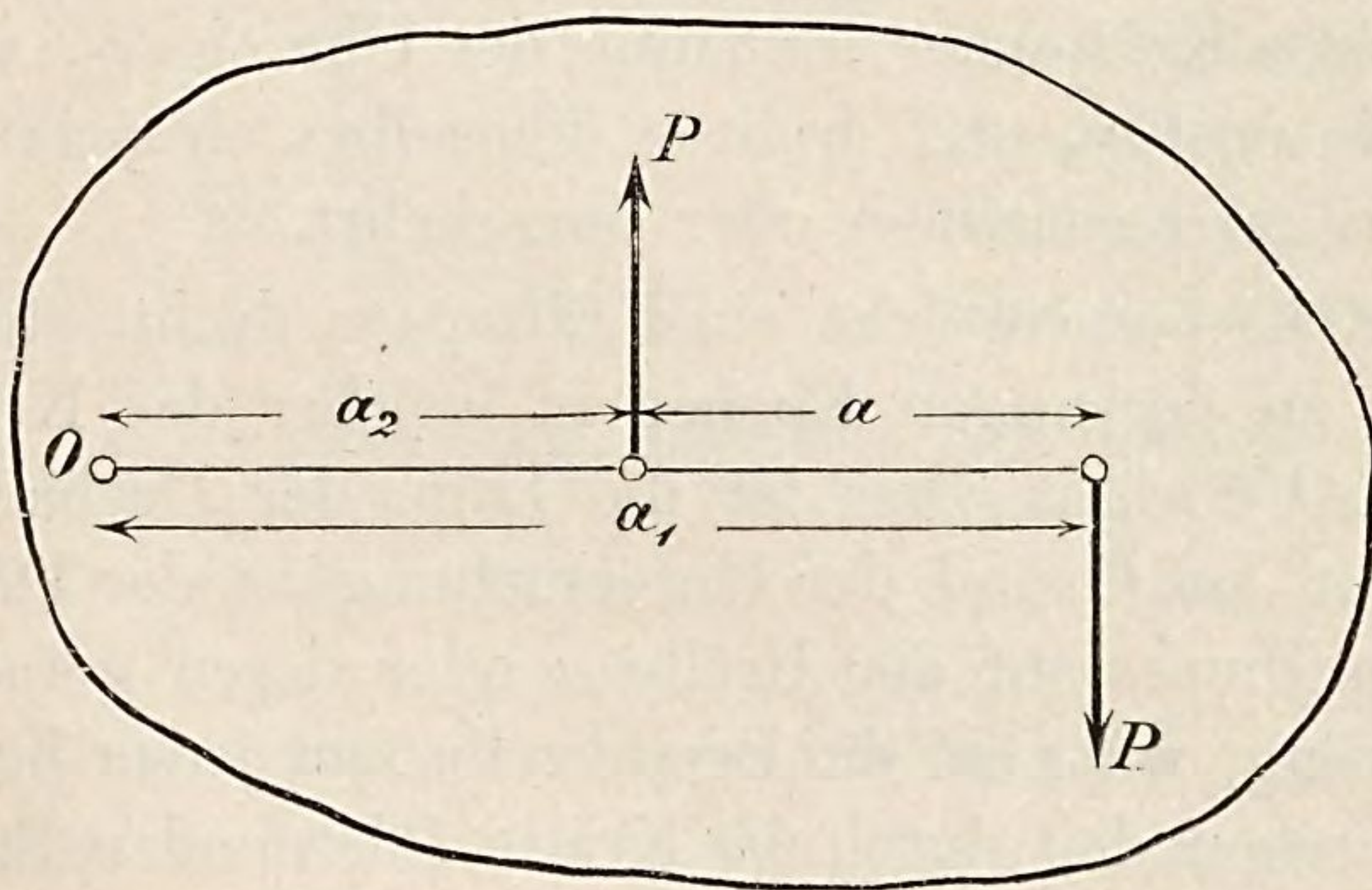


Fig. 200.

der Richtung von a liegenden Drehpunkt O und mit Rücksicht auf Fig. 200

$$R = \Sigma(P) = P - P,$$

$$! R = 0 !$$

$$\text{und} \quad r = \frac{\Sigma(P \cdot a)}{0} = \infty,$$

$$\text{also} \quad R \cdot r = P \cdot (a_1 - a_2)$$

$$\text{oder} \quad R \cdot r = P \cdot a \\ = 0 \cdot \infty,$$

woraus sich ergibt,

„dass zwei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Parallelkräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, ein sogenanntes «Kräftepaar», keine Resultirende, wohl aber ein Moment liefern, also keine fortschreitende, sondern nur Dreh-Bewegung erzeugen“;

zugleich ergibt sich aber auch, dass, wenn $R = 0$ ist, „nicht“ das Moment

$$R \cdot r = P \cdot a$$

gleich Null sein muss.

Man pflegt den senkrechten Abstand a der beiden gleichen Kräfte die „Breite“ oder den „Hebelarm“ des Kräftepaares zu nennen.

Dreht das Kräftepaar im Sinne des Uhrzeigers, so pflegt man es als positiv, und dreht es demselben entgegengesetzt, als negativ zu bezeichnen oder umgekehrt.

„Die Achse, um welche ein Kräftepaar dreht, steht stets senkrecht zu derjenigen Ebene, in welcher das Kräftepaar liegt“; im Uebrigen aber ist die Lage der Drehachse beliebig, denn auf Grund der Untersuchung ist der Drehort O irgend ein Punkt auf der Breite a oder deren geradlinigen Verlängerung, während die Breite selbst an jeder beliebigen Stelle zwischen den durch die Kräfte P laufenden Parallelen gemessen werden kann.

„Ein Kräftepaar kann stets durch ein anderes von gleichem Moment und gleichem Drehsinn ersetzt werden“, wenn nur (Fig. 201 und 202)

$$+ P \cdot a = + Q \cdot b$$

ist.

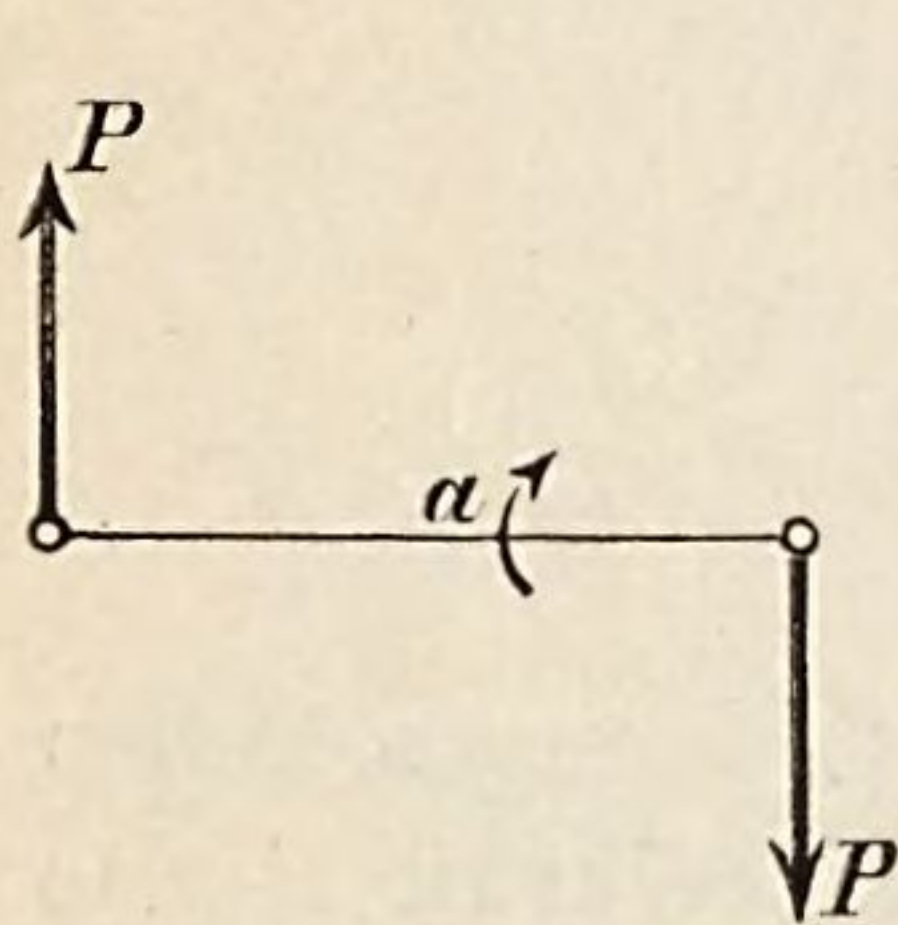


Fig. 201.

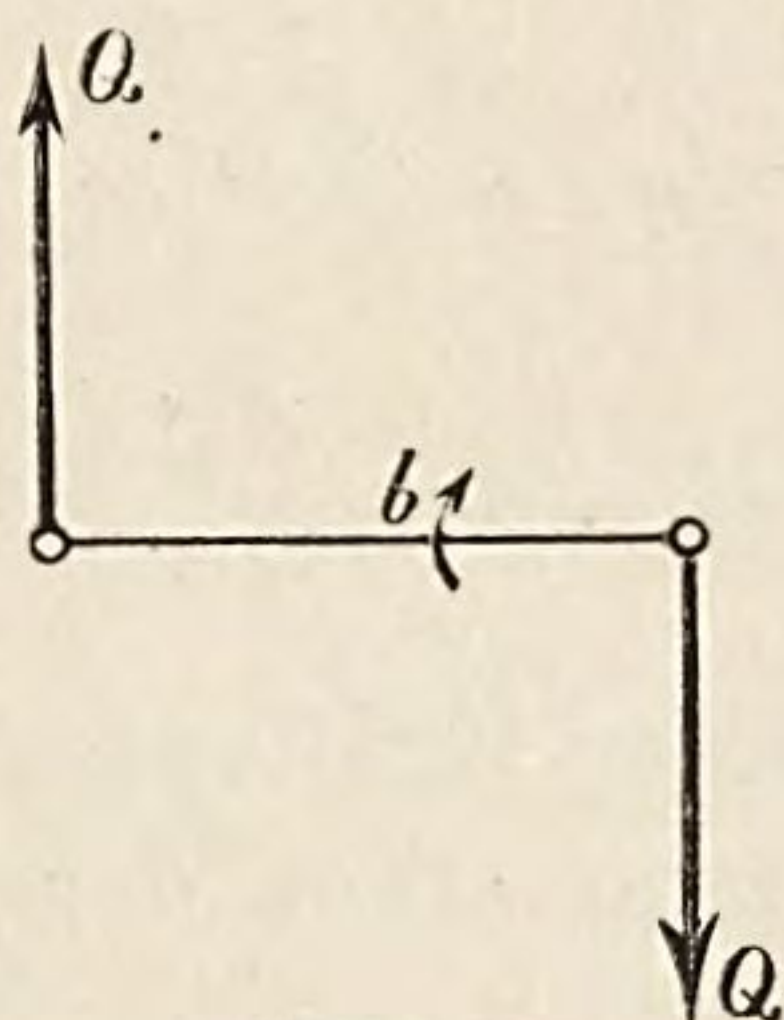


Fig. 202.

Man nennt die Umwandlung eines gegebenen Kräftepaares $+ P \cdot a$ auf die gegebene Breite b „das Reduciren des Kräftepaares $+ P \cdot a$ auf die Breite b “, und es ergibt sich die Grösse der neuen Kräfte durch

$$Q = \frac{P \cdot a}{b}.$$

„Zwei Kräftepaare von gleicher Grösse und entgegengesetztem Drehsinn heben einander auf“ (Fig. 203 und 204).

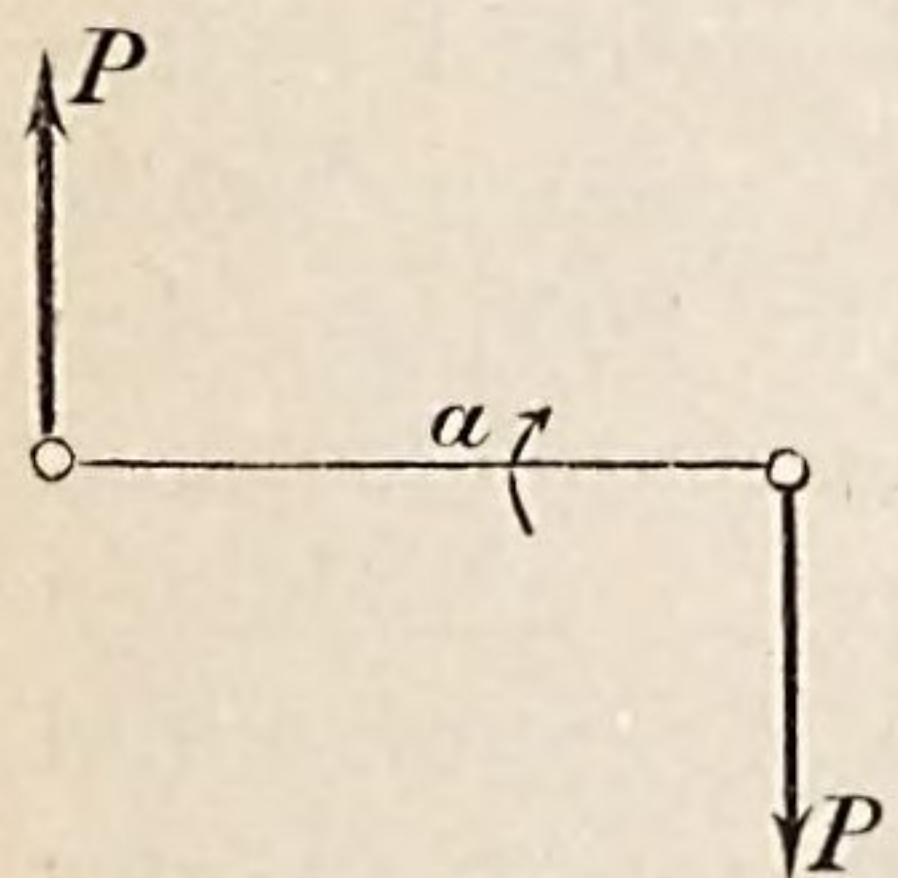


Fig. 203.

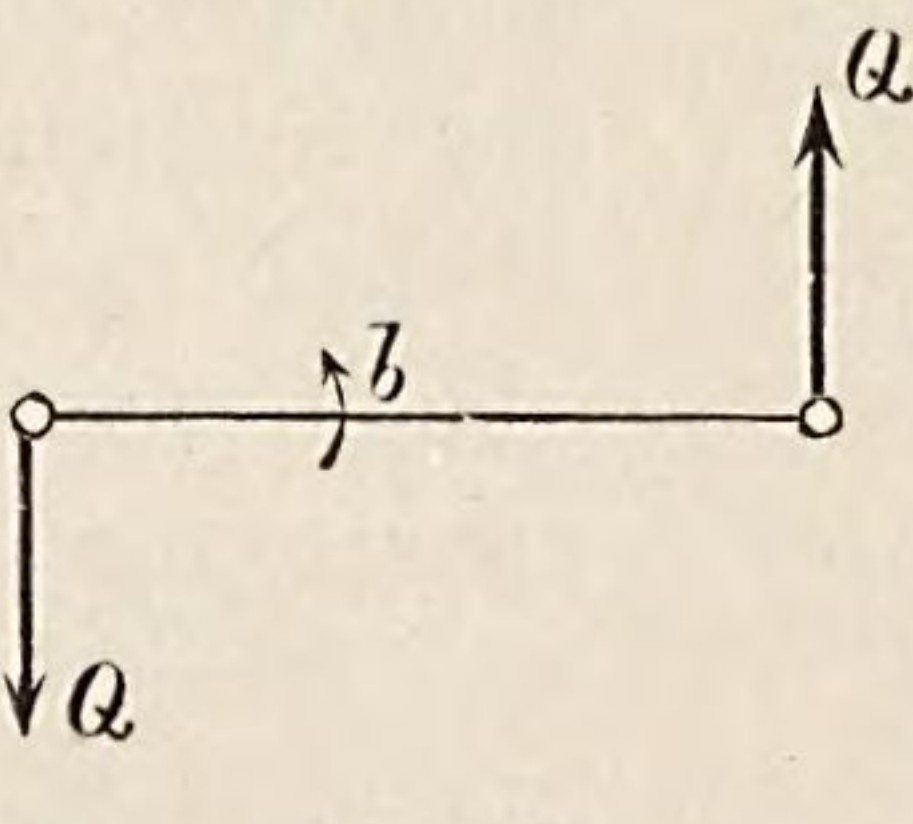


Fig. 204.

„Mehrere Kräftepaare in derselben Ebene lassen sich unter Anwendung «der Reduction auf dieselbe Breite» zu einem resultirenden Kräftepaar vereinigen.“

Sind z. B. in derselben Ebene n Kräftepaare

$$- P_1 \cdot a_1, \quad + P_2 \cdot a_2, \quad \dots \dots + P_n \cdot a_n$$

und die Breite r des resultirenden Kräftepaares gegeben, so finden sich die neuen Kräfte $R_1, R_2 \dots R_n$ der einzelnen Kräftepaare für die Breite r durch

$$- R_1 \cdot r = - P_1 \cdot a_1$$

$$\text{oder} \quad - R_1 = - \frac{P_1 \cdot a_1}{r},$$

$$+ R_2 \cdot r = + P_2 \cdot a_2$$

$$\text{oder} \quad + R_2 = + \frac{P_2 \cdot a_2}{r},$$

$$\text{und schliesslich} \quad + R_n \cdot r = + P_n \cdot a_n$$

$$\text{oder} \quad + R_n = + \frac{P_n \cdot a_n}{r};$$

die Kräfte R des resultirenden Kräftepaares hingegen finden sich durch algebraische Summation der Einzelkräfte, also durch

$$R = \Sigma(R),$$

und es ist somit das resultirende Kräftepaar selbst

$$R \cdot r = \Sigma(R \cdot r) = \Sigma(P \cdot a).$$

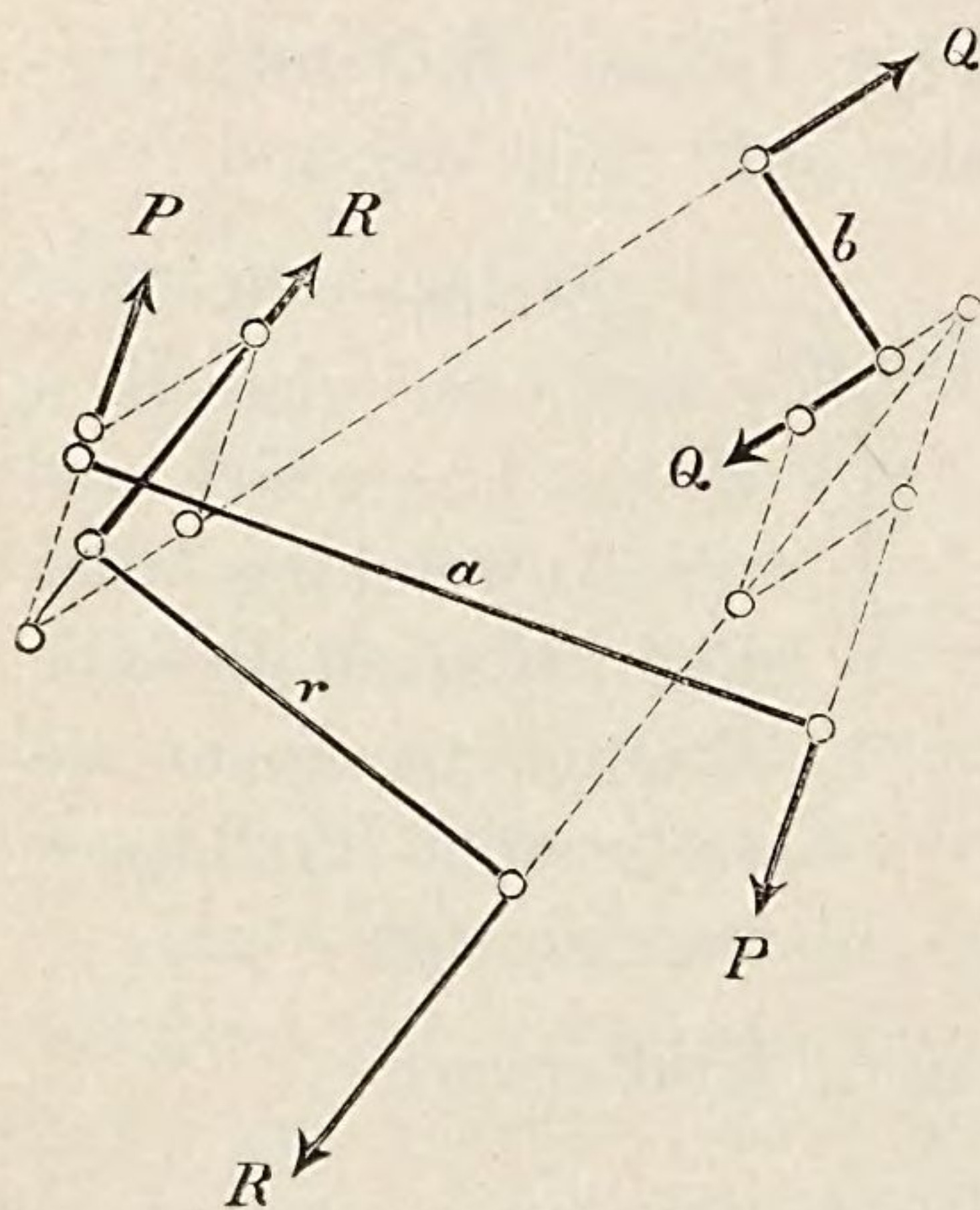


Fig. 205.

Zu demselben Resultate gelangt man auch mit Hilfe des Parallelogrammgesetzes, indem man die auf gleichen Seiten der Breiten liegenden Kräfte P und Q (Fig. 205) zu den gleich grossen parallelen und entgegengesetzt gerichteten Resultirenden R vereinigt und die neue Breite direct aus der Zeichnung oder durch

$$r = \frac{\Sigma(P \cdot a)}{R}$$

bestimmt.

Stellt man — wie unter „Statischen Momenten“ gezeigt wurde — auch die Momente der Kräftepaare als Gerade, als sogenannte Achsen der Kräftepaare, dar (Fig. 206) und

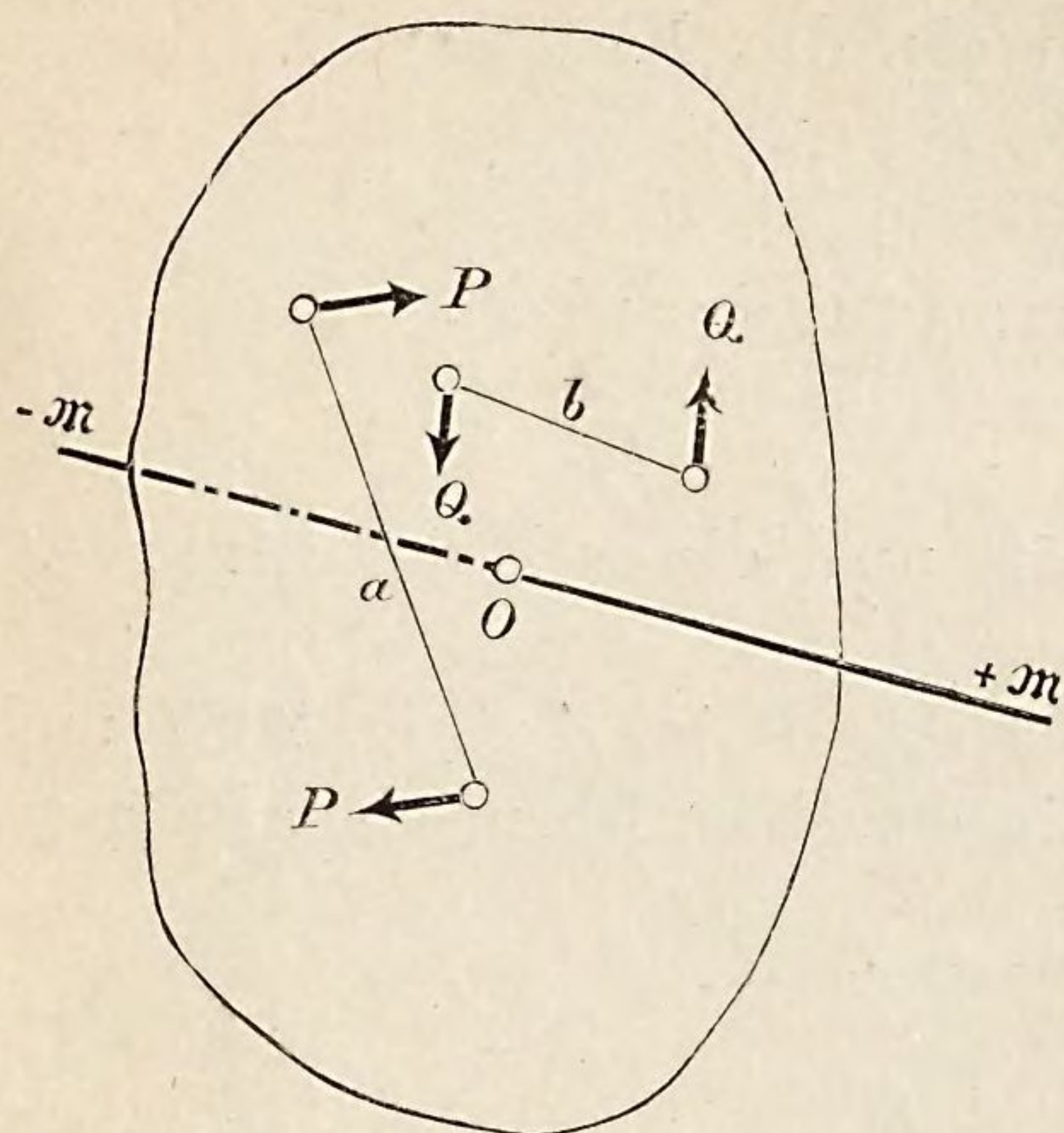


Fig. 206.

trägt man — wenn die Kräftepaare in derselben Ebene liegen — die positiven Momente auf eine Drehachse von O aus nach rechts, die negativen nach links, so liefert die graphische Summation die Achse des resultierenden Kräftepaares nach Grösse und Vorzeichen.

Transportieren und Versammeln von Kräften in ein und derselben Ebene eines Körpers.

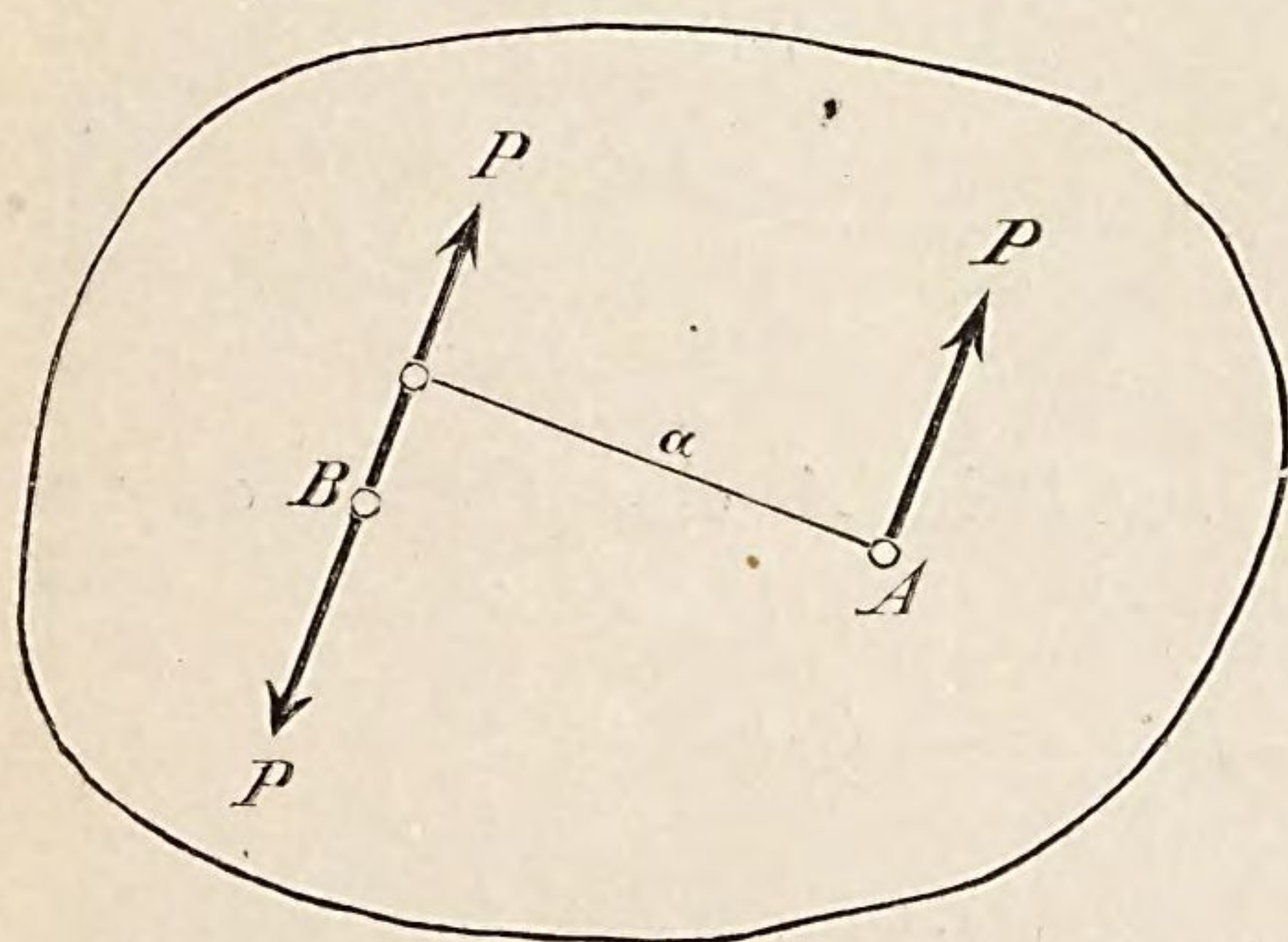


Fig. 207.

Soll eine Kraft P von ihrem Angriffspunkte A (Fig. 207) derartig nach einem vorgeschriebenen neuen Angriffspunkte B verlegt werden, dass an der Wirkung nichts geändert wird, so fügt man in B zwei mit P in A parallele gleich grosse, aber unter sich

entgegengesetzt gerichtete Kräfte an, auf welche Weise eine Kraft P in B und ausserdem ein Kräftepaar $P \cdot a$ resultirt.

Das Verfahren selbst nennt man das

„Transportieren einer Kraft“.

Transportirt man mehrere Kräfte nach einem gemeinschaftlichen Punkt B , so nennt man diese Operation

das „Versammeln der Kräfte“
und den Punkt B

den „Versammlungspunkt“.

Vereinigung einer Kraft und eines Kräftepaares.

Zur Vereinigung einer Kraft P in A (Fig. 208) und eines Kräftepaares — $Q \cdot b$ in derselben Ebene eines Körpers

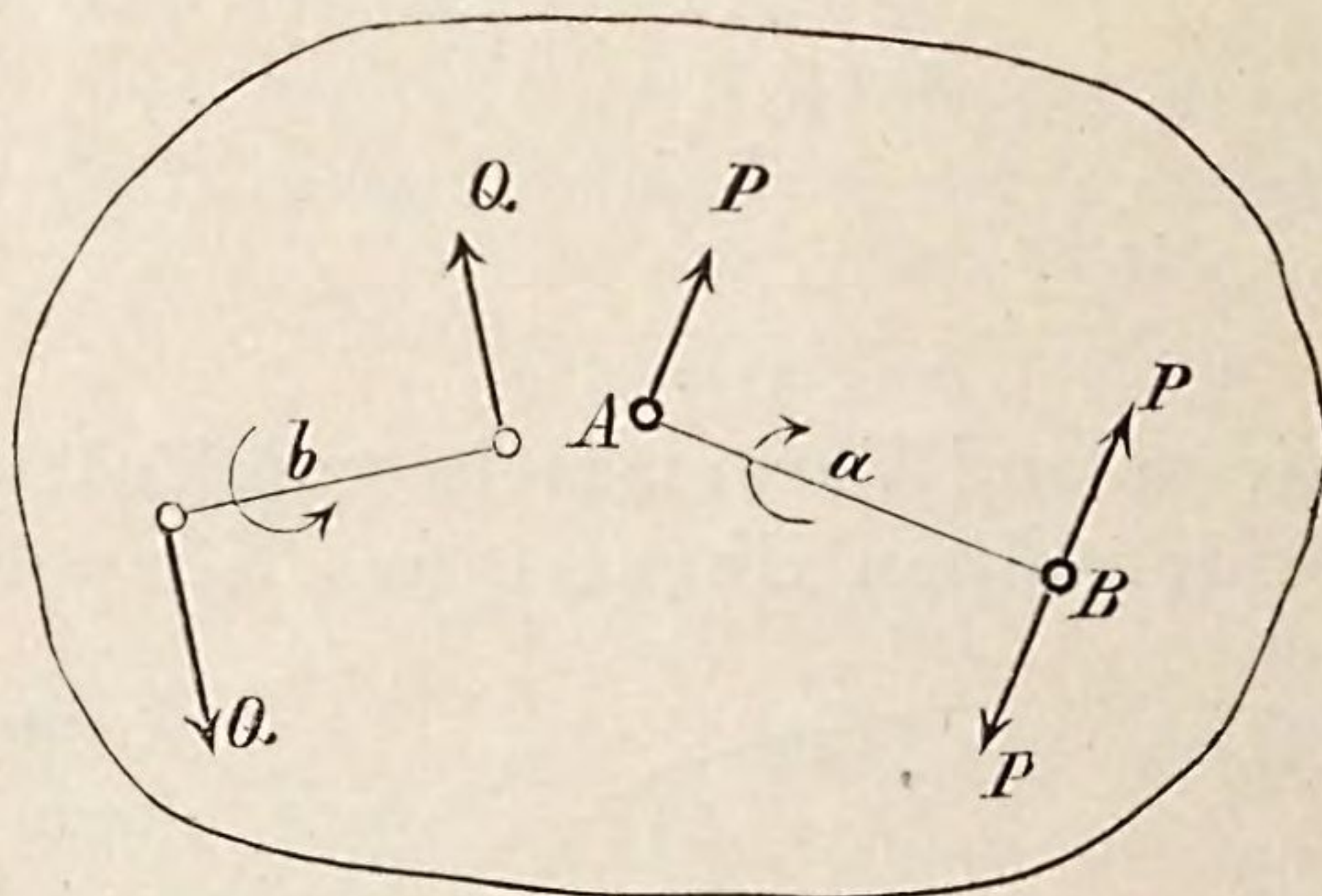


Fig. 208.

errichte man senkrecht zu P in A eine Gerade a , von solcher Grösse, dass

$$+ P \cdot a = - Q \cdot b$$

oder

$$a = \frac{Q \cdot b}{P}$$

wird.

Hierauf füge man in B zwei mit P in A gleich grosse und parallele, aber unter sich entgegengesetzte Kräfte P an, wodurch sich eine Kraft P in B und ein Kräftepaar $P \cdot a$ gleich, aber entgegengesetzt drehend dem Kräftepaare $Q \cdot b$ ergeben. Infolgedessen heben sich die Kräftepaare auf und P resultirt mit dem neuen Angriffspunkte in B .

- d) Aeussere beliebig im Raum gerichtete Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem starren Körper.

Heissen die beliebig gerichteten Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten P_1, P_2 bis P_n , die zugehörigen Richtungswinkel zu den senkrecht auf einander stehenden Achsen X, Y, Z : $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, sind die Coordinaten der Angriffspunkte der Kräfte $x_1, y_1, z_1 \dots x_n, y_n, z_n$, bedeuten ferner R die Resultirende aus allen Kräften, α, β, γ ihre Richtungswinkel zu den Achsen und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Mittelpunktes der Kräfte, welcher letztere stets als Angriffspunkt der Resultirenden angesehen werden kann, dann gilt für die Resultirenden* in den Achsenrichtungen

$$X = R \cdot \cos \alpha = \Sigma(P \cdot \cos \alpha),$$

$$Y = R \cdot \cos \beta = \Sigma(P \cdot \cos \beta),$$

$$Z = R \cdot \cos \gamma = \Sigma(P \cdot \cos \gamma).$$

Die statischen Momente** der Kräfte bezogen auf je eine Coordinatenachse sind (in der betreffenden Achsenrichtung nach dem Durchschnitt der Achsen X, Y, Z gesehen, werde die Uhrzeigerrichtung positiv, die entgegengesetzte Richtung negativ genommen)

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma(Z \cdot y) - \Sigma(Y \cdot z) \text{ (Fig. 209),}$$

$$\mathfrak{M}_y = \Sigma(X \cdot z) - \Sigma(Z \cdot x) \text{ (Fig. 210),}$$

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma(Y \cdot x) - \Sigma(X \cdot y) \text{ (Fig. 211).}$$

* Man denkt sich zunächst nach dem bei Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten in derselben Ebene gezeigten Verfahren zwei Kräfte miteinander vereinigt, hierauf die sich ergebende Resultirende mit einer dritten Kraft u. s. w.

** Das Gesetz der statischen Momente auf Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem Körper ausgedehnt, lautet nach früherer Bezeichnungsweise (vergleiche Gesetz der statischen Momente, Abschnitt II.)

$$R \cdot \cos \alpha \cdot L = \Sigma(P \cdot \cos \alpha \cdot L),$$

weil L auf der rechten Seite der Gleichung hier der Reihe nach die Hebelarme $L_1, L_2 \dots$ der Kräfte $P_1, P_2 \dots$ bezogen auf ein und dieselbe Drehachse bedeutet.

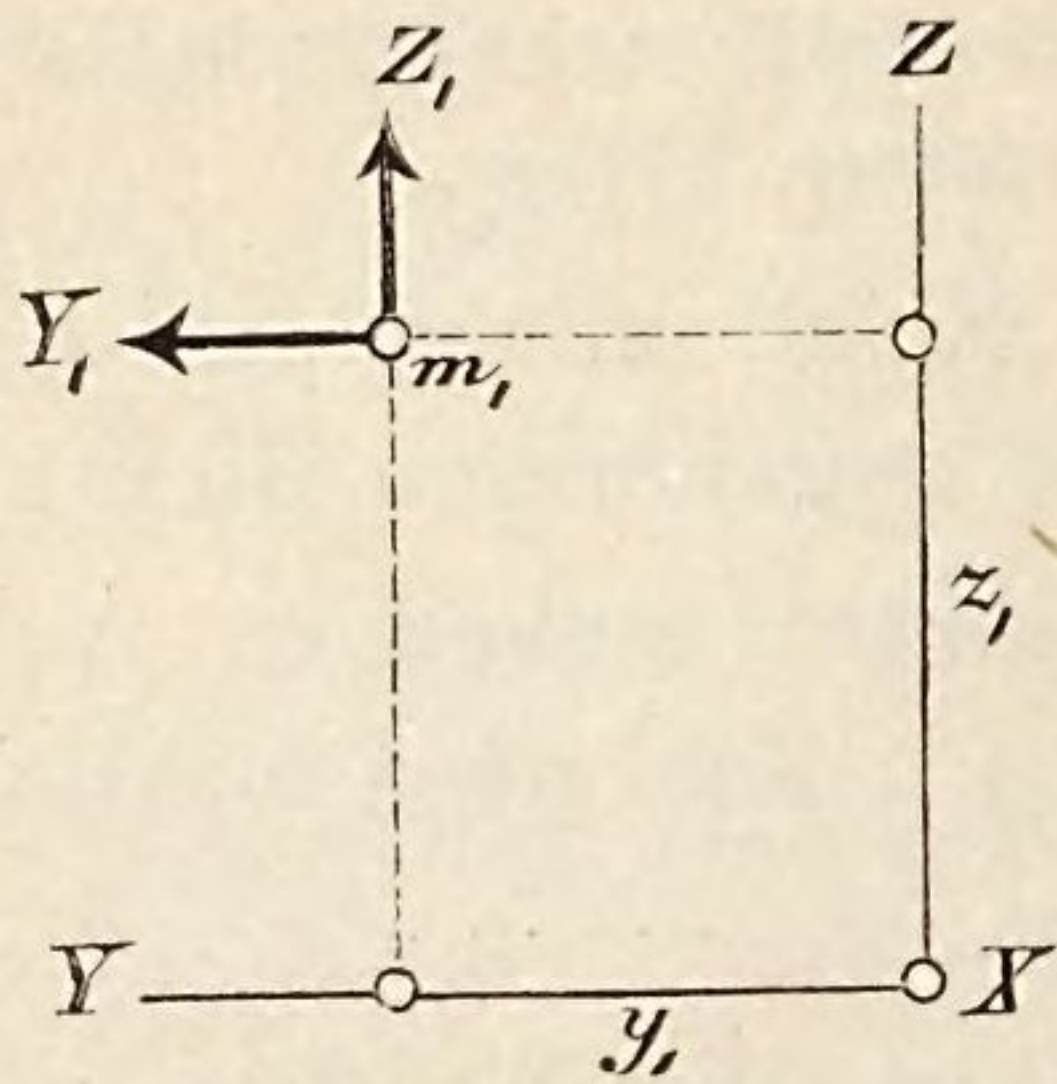


Fig. 209.

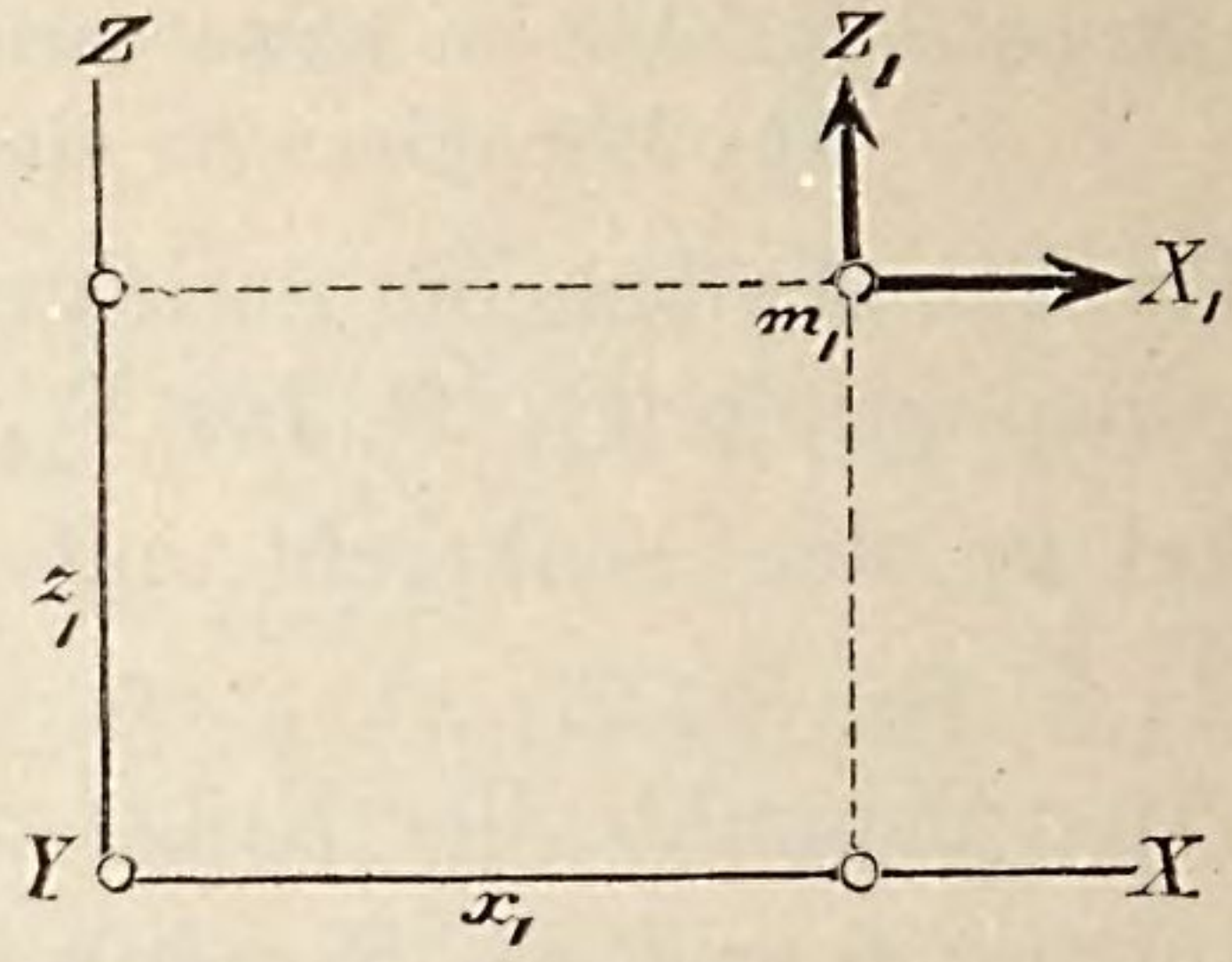


Fig. 210.

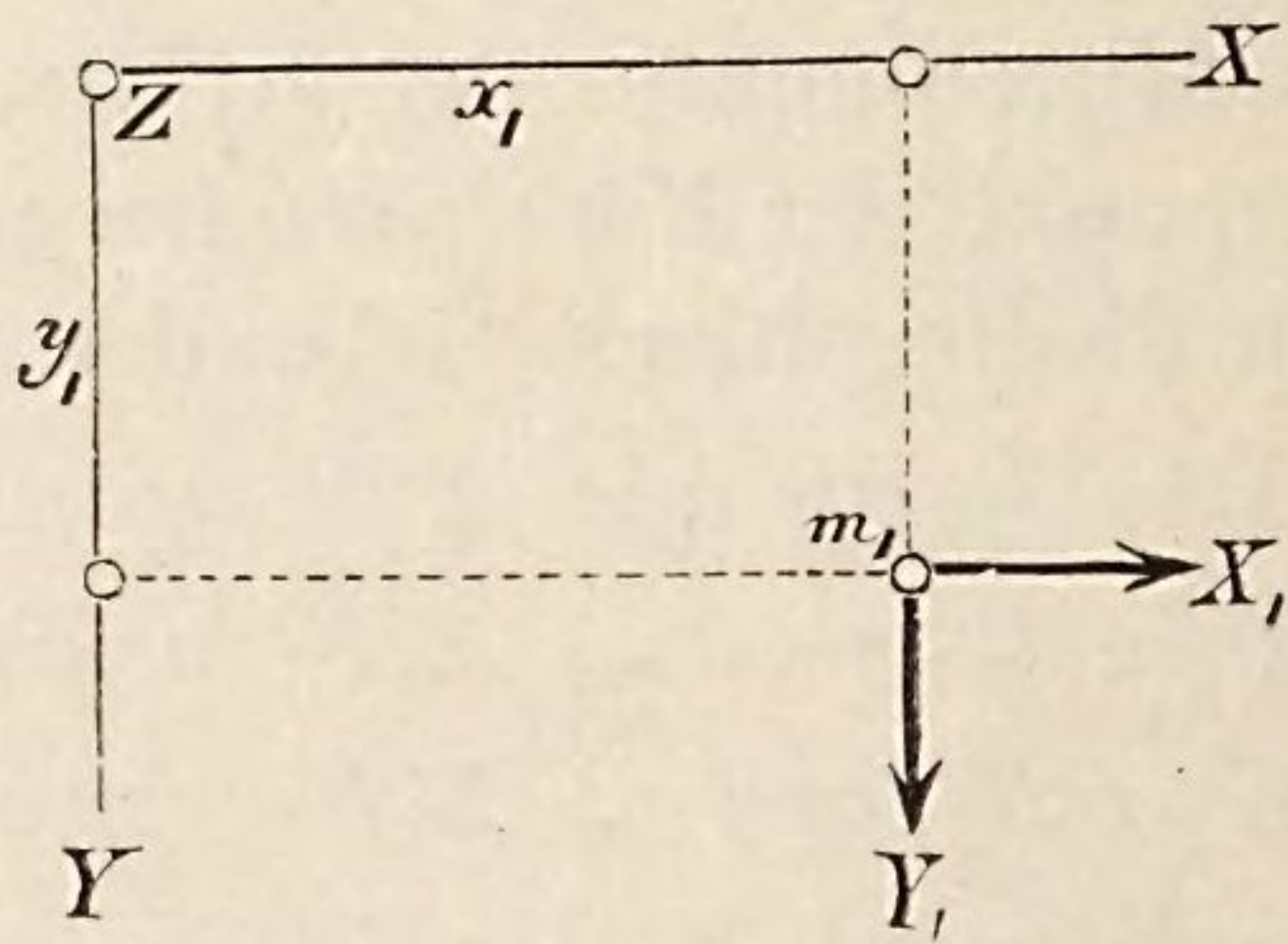


Fig. 211.

Weiter ergibt sich durch Zusammensetzung die Resultirende aus allen Kräften durch

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und ihre Richtung durch

$$\cos \alpha = \frac{X}{R},$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{R},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{R};$$

das resultirende Moment hingegen findet sich durch Zusammensetzung der Momenten-Achsen, also durch

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2},$$

während die Richtung der zugehörigen Achse durch

$$\cos \alpha' = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}},$$

$$\cos \beta' = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}},$$

$$\cos \gamma' = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}$$

bestimmt wird, wenn α' , β' , γ' die Richtungswinkel der resultirenden Momentenachse zu den Coordinatenachsen bedeuten.

Zur Bestimmung derjenigen Geraden, auf welcher alle denkbaren Angriffspunkte der Resultirenden liegen, genügt die bereits bestimmte Richtung der letzteren und ausserdem die Ermittlung des Mittelpunktes der Kräfte.

In den Gleichungen für die Momente $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ kann nach dem Gesetz der statischen Momente geschrieben werden

$$\Sigma(Z \cdot y) = Z \cdot y_0 \text{ oder } y_0 = \frac{\Sigma(Z \cdot y)}{Z},$$

$$\Sigma(Y \cdot z) = Y \cdot z_0 \text{ oder } z_0 = \frac{\Sigma(Y \cdot z)}{Y},$$

$$\Sigma(X \cdot z) = X \cdot z_0 \text{ oder } z_0 = \frac{\Sigma(X \cdot z)}{X},$$

$$\Sigma(Z \cdot x) = Z \cdot x_0 \text{ oder } x_0 = \frac{\Sigma(Z \cdot x)}{Z},$$

$$\Sigma(Y \cdot x) = Y \cdot x_0 \text{ oder } x_0 = \frac{\Sigma(Y \cdot x)}{Y},$$

$$\Sigma(X \cdot y) = X \cdot y_0 \text{ oder } y_0 = \frac{\Sigma(X \cdot y)}{X},$$

durch welche Gleichungen der Mittelpunkt der Kräfte doppelt bestimmt ist.

Specieller Fall: Sämmtliche am Körper angreifenden Kräfte mögen positive oder negative Parallelkräfte sein; dann ist

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = \alpha_3 \dots = \alpha_n, \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta_3 \dots = \beta_n, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \gamma_3 \dots = \gamma_n.\end{aligned}$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

die Grösse der Resultirenden durch

$$R = \sqrt{\{\Sigma(P)\}^2 \cdot \{\cos^2 \alpha_n + \cos^2 \beta_n + \cos^2 \gamma_n\}} = \Sigma(P)$$

und ihre Richtung durch

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{X}{R} = \frac{\Sigma(P) \cdot \cos \alpha_n}{\Sigma(P)} = \cos \alpha_n, \\ \cos \beta &= \frac{Y}{R} = \frac{\Sigma(P) \cdot \cos \beta_n}{\Sigma(P)} = \cos \beta_n, \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{R} = \frac{\Sigma(P) \cdot \cos \gamma_n}{\Sigma(P)} = \cos \gamma_n,\end{aligned}$$

das heisst aber, es ist

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 = \dots = \alpha_n, \\ \beta &= \beta_1 = \dots = \beta_n, \\ \gamma &= \gamma_1 = \dots = \gamma_n.\end{aligned}$$

Die Richtung der Resultirenden zu den Achsen X, Y, Z ist also dieselbe, wie die der gegebenen Parallelkräfte.

Ferner gilt nach den allgemeinen Formeln für die Momente bezogen auf je eine Coordinaten-Achse

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= \Sigma(P \cdot y) \cdot \cos \gamma - \Sigma(P \cdot z) \cdot \cos \beta, \\ \mathfrak{M}_y &= \Sigma(P \cdot z) \cdot \cos \alpha - \Sigma(P \cdot x) \cdot \cos \gamma, \\ \mathfrak{M}_z &= \Sigma(P \cdot x) \cdot \cos \beta - \Sigma(P \cdot y) \cdot \cos \alpha,\end{aligned}$$

und für das resultirende Moment

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}, \\ \cos \alpha' &= \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}}, \\ \cos \beta' &= \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}}, \\ \cos \gamma' &= \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}.\end{aligned}$$

Schliesslich findet sich der Mittelpunkt der Kräfte mit den allgemeinen Gleichungen durch die einfacheren Werthe

$$x_0 = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{\Sigma(P)},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(P \cdot y)}{\Sigma(P)},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma(P \cdot z)}{\Sigma(P)}.$$

An den speciellen Fall der Parallelkräfte im Raum anschliessend sind noch beliebig im Raum liegende Kräftepaare zu betrachten:

Kräftepaare in nicht parallelen, aber starr miteinander verbundenen Ebenen können mit Hilfe des Reducirens auf gleiche Breite und unter Anwendung des Parallelogrammgesetzes zu einem resultirenden Kräftepaar vereinigt werden.“

Sind gegeben die Momente (Fig. 212)

$$\mathfrak{M}_I = - P \cdot a \text{ in der Ebene I}$$

und

$$\mathfrak{M}_{II} = + Q \cdot b \text{ in der Ebene II,}$$

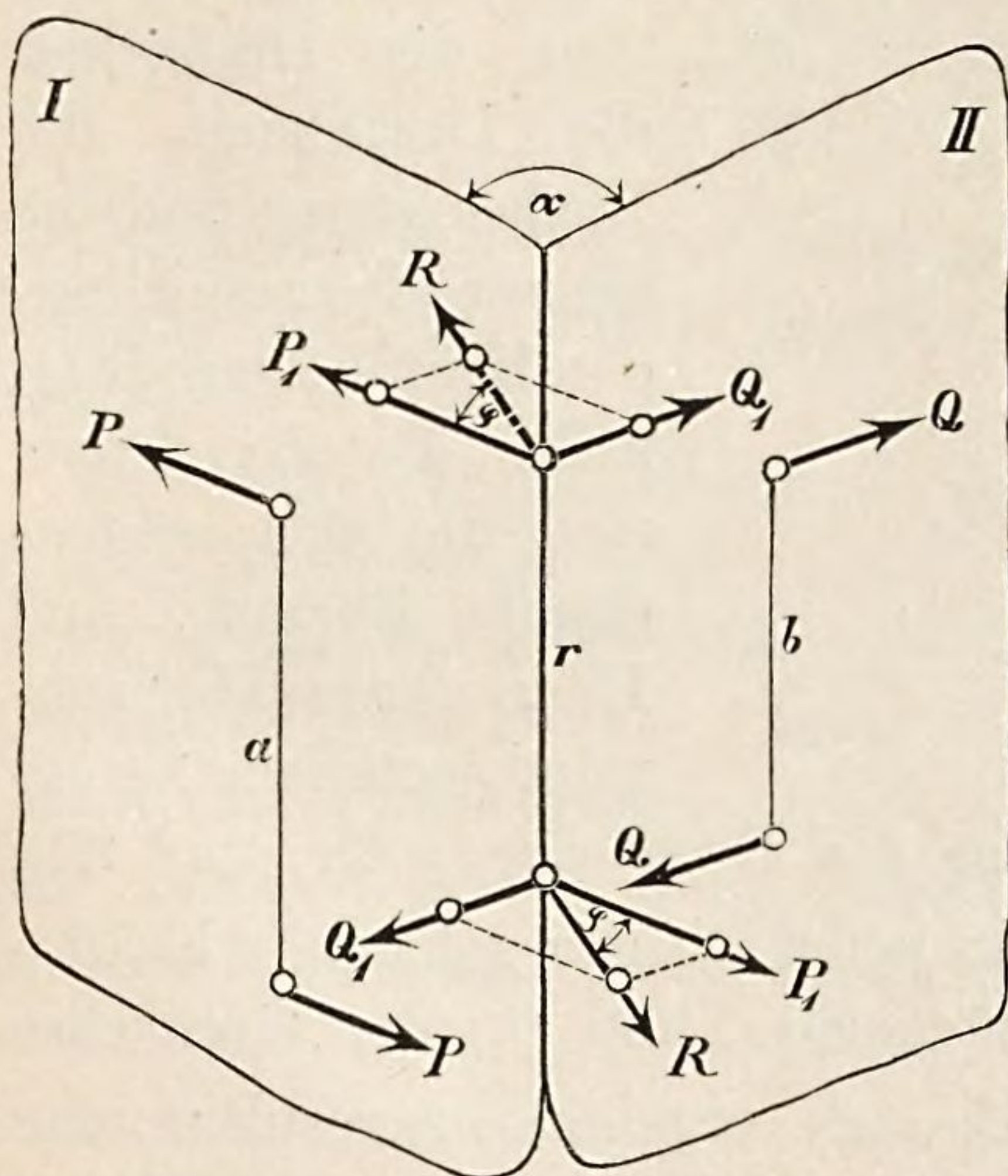


Fig. 212.

sind die Ebenen unter einem Winkel α zu einander geneigt, und soll das resultirende Kräftepaar nach Grösse und Lage bestimmt werden, dann reducirt man beide Kräftepaare auf dieselbe im Durchschnitt der Ebenen I und II liegende Breite r , macht also (Fig. 212)

$$- P_1 \cdot r = - P \cdot a,$$

$$P_1 = \frac{P \cdot a}{r}$$

und

$$+ Q_1 \cdot r = + Q \cdot b,$$

$$Q_1 = \frac{Q \cdot b}{r}$$

und vereinigt hierauf an je einem Ende der Breite r die Kräfte P_1 und Q_1 zu gleichen parallelen und entgegengesetzt gerichteten Resultirenden R . Hierdurch ergeben sich das resultirende Kräftepaar $R \cdot r$ in der unter dem Winkel φ zur Ebene I geneigten Ebene RrR und die zugehörige senkrecht zu dieser Ebene liegende Drehachse.

Zu demselben Resultat gelangt man, wenn man die Kräftepaare in den beiden Ebenen durch ihre Momenten-

Achsen ausdrückt und diese nach dem Parallelogrammgesetz zu einer Achse zusammensetzt. Letztere liefert dann die Richtung der Drehachse, die Drehebene, die Drehrichtung und die Grösse des resultirenden Kräftepaares (Fig. 213). In der Figur sind die sich schneidenden Ebenen I und II in ihren Horizontalprojektionen hergestellt

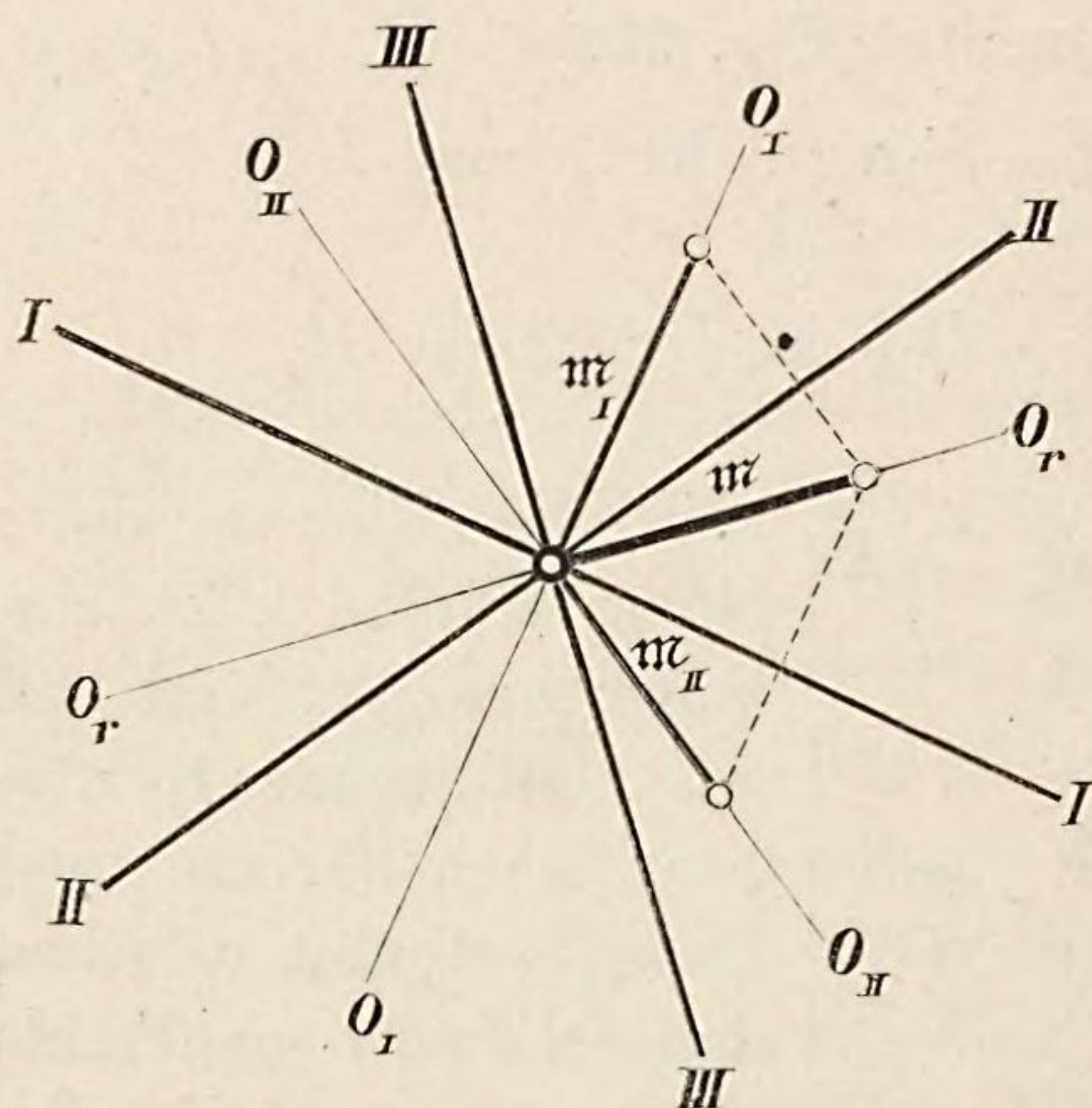


Fig. 213.

stellt, O_I und O_{II} bedeuten die Drehachsen, M_I und M_{II} die Momentenachsen der in jenen Ebenen gelegenen Kräftepaare. M ist die Momentenachse und O_r die Drehachse des in der Drehebene III sich ergebenden resultirenden Kräftepaares.

Sind mehrere Kräftepaare in verschiedenen, aber starr miteinander verbundenen Ebenen gegeben, so drückt man sie am besten durch ihre Momenten-Achsen aus, zerlegt diese der Reihe nach in die Richtung von drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z , addirt die Componenten in den einzelnen Achsenrichtungen algebraisch und bildet aus den erhaltenen Resultirenden $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ in den Achsen, die Achse des resultirenden Kräftepaares.

Nach üblicher Bezeichnung ist dieses Verfahren angedeutet durch

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \cos \alpha),$$

$$\mathfrak{M}_y = \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \cos \beta),$$

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma(\mathfrak{M} \cdot \cos \gamma).$$

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

und $\cos \alpha = \frac{\mathfrak{M}_x}{\mathfrak{M}},$

$$\cos \beta = \frac{\mathfrak{M}_y}{\mathfrak{M}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}}.$$

„Ein Kräftepaar kann in starr miteinander verbundene parallele Ebenen verlegt werden, ohne die Wirkung zu ändern.“

Ist z. B. in der Ebene A (Fig. 214) ein Kräftepaar $+ P \cdot a$ gegeben, so wird an der Wirkung nichts geändert, wenn in der zu A parallelen Ebene B an den Enden einer gleichgerichteten Breite a nach entgegengesetzten Richtungen Kräfte P von gleicher Grösse wie in A angefügt werden; denn die nach links gerichteten Kräfte in m und p und die in n und o nach rechts gerichteten Kräfte liefern je eine Resultirende $R = 2P$ von entgegengesetzter Richtung, aber demselben Angriffspunkte. Desshalb heben sich diese Kräfte in ihren Wirkungen auf und in der Ebene B

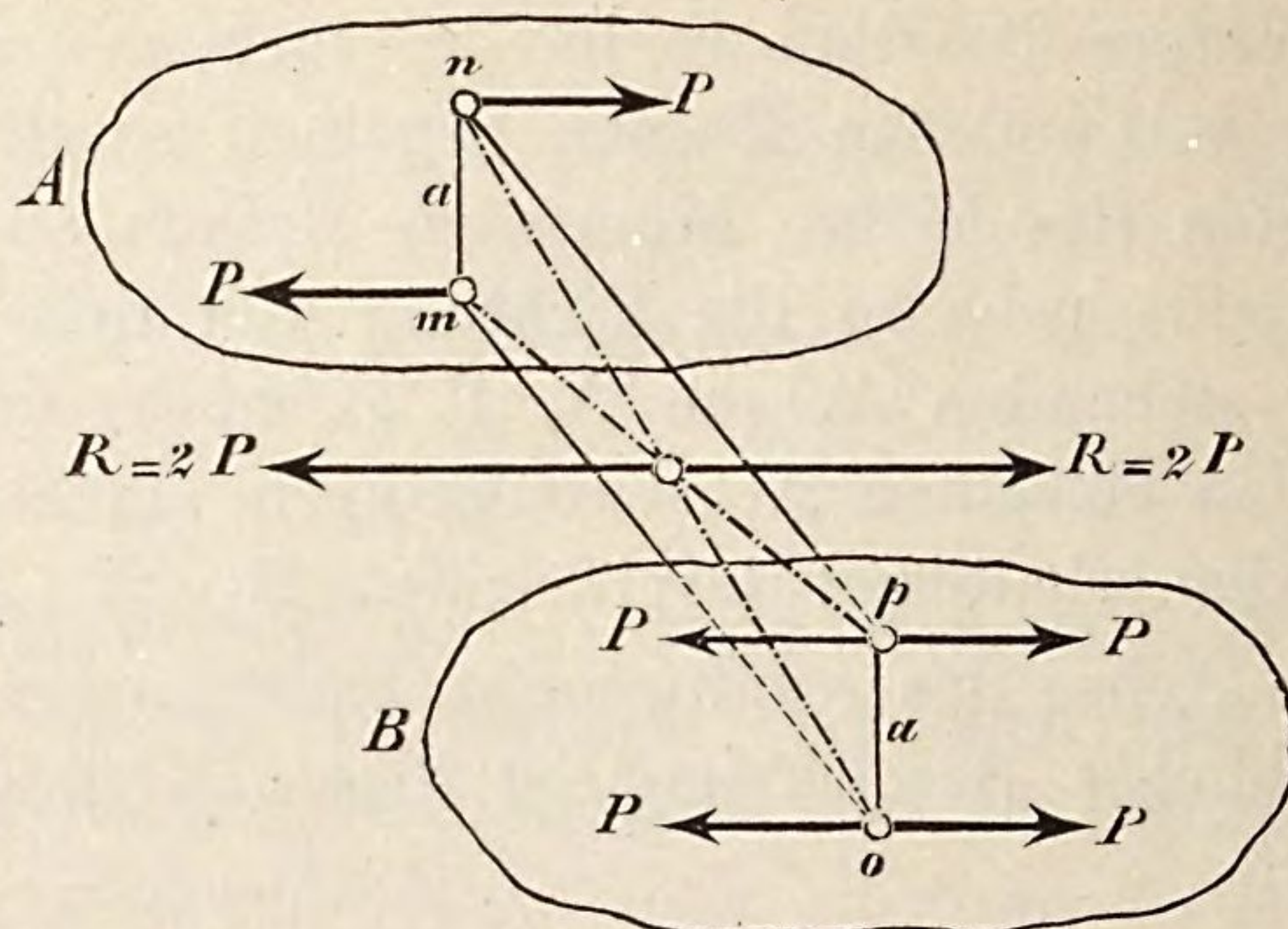


Fig. 214.

bleibt ein Kräftepaar $+ P \cdot a$ von gleicher Grösse und gleichem Drehsinn, wie ursprünglich in der Ebene A , übrig, was zu beweisen war.

Die Grösse

$$R = 2P$$

ergiebt sich aus

$$R = \Sigma(P),$$

und dass der Angriffspunkt für beide entgegengesetzt gerichteten Resultirenden R derselbe ist, erhellt aus

$$R \cdot r = \Sigma(P \cdot a),$$

welcher Werth für je zwei der obigen Parallelkräfte P zu demselben Resultate führt.

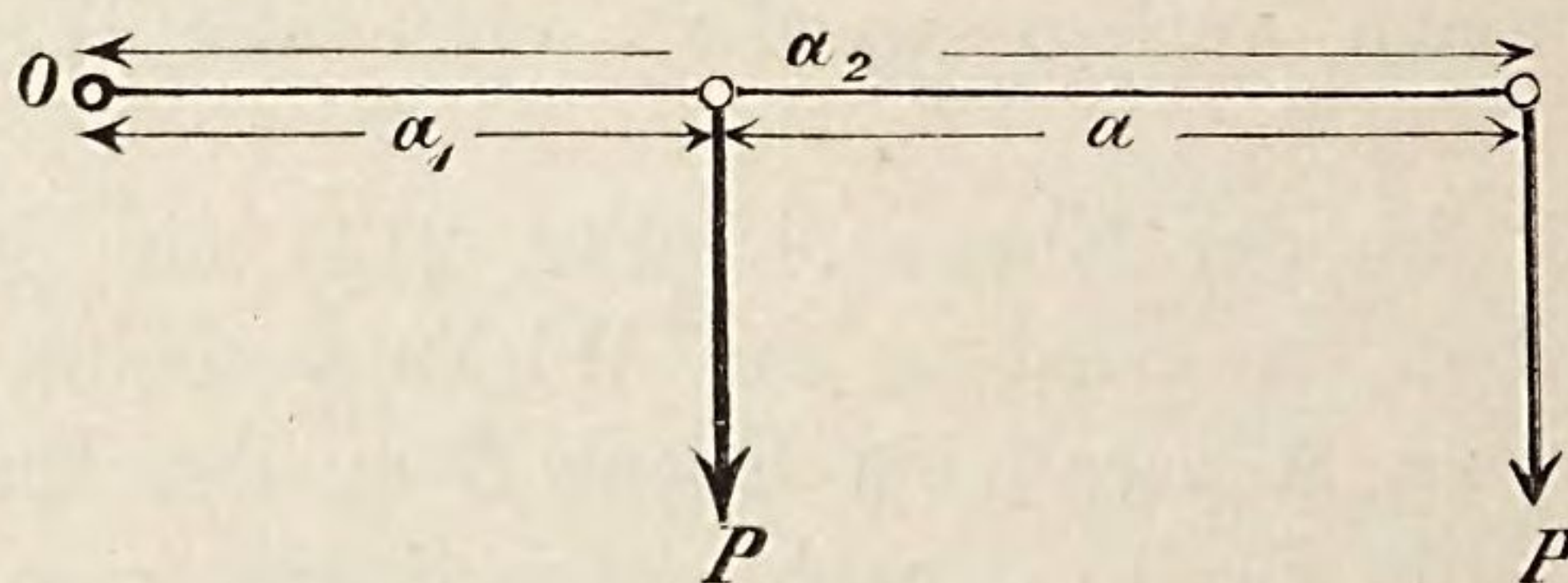


Fig. 215.

Ist O (Fig. 215) ein beliebiger Drehpunkt und sind a_1 und a_2 die Hebelarme der gleichen Parallelkräfte P bezogen auf denselben, dann ist der Hebelarm r der Resultirenden R

$$r = \frac{\Sigma(P \cdot a)}{R} = \frac{P \cdot a_1 + P \cdot a_2}{2P} = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Nun kann, wenn a der senkrechte Abstand der beiden Parallelkräfte ist, auch

$$a_2 = a_1 + a,$$

$$\text{also} \quad r = a_1 + \frac{a}{2}$$

gesetzt werden, woraus sich ergibt, dass die Resultirende in der Mitte zwischen zwei gleichgerichteten Parallelkräften liegt.

„Sind die Ebenen parallel, in welchen Kräftepaare liegen, so sind auch die Dreh-Achsen der Kräftepaare parallel, und sind die parallelen Ebenen starr mit einander verbunden, so kann man die Kräftepaare sämmtlich in eine der unter sich parallelen Ebenen verlegen und daselbst unter Anwendung der Reduction auf gleiche Breite zu einem resultirenden Kräftepaar vereinigen.“

Ableitung der Schwerpunkts Gleichungen eines starren Körpers aus den Gleichungen des Mittelpunktes der Parallelkräfte.

Denkt man sich den ganzen Körper in einzelne materielle Punkte $m_1, m_2 \dots m_n$ zerlegt und lässt man auf dieselben gleich grosse gleichgerichtete Parallelkräfte $P_1, P_2, \dots P_n$ wirken, welche den einzelnen materiellen Punkten gleiche Beschleunigung p ertheilen, dann ist die Resultirende aller Kräfte

$$R = \Sigma(P), \\ = m_1 \cdot p + m_2 \cdot p + \dots$$

$$\text{oder} \quad R = \Sigma(m) \cdot p.$$

$$\text{Nun ist} \quad M = \Sigma(m)$$

die ganze Masse des Körpers, folglich

$$R = M \cdot p.$$

Kräfte, welche sich nach dem Angeführten verhalten, sind die Schwerkkräfte resp. die Gewichte der einzelnen materiellen Punkte

$$G_1 = m_1 \cdot g,$$

$$G_2 = m_2 \cdot g,$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

weshalb für sie die Resultierende R gleich dem Körpergewichte

$$G = M \cdot g$$

wird.

Als Angriffspunkt des Gewichtes G ist aber der Mittelpunkt der Schwerkkräfte, der sogenannte „Massenmittelpunkt“ oder

„Schwerpunkt“

zu betrachten, dessen Coordinaten sind

$$x_0 = \frac{\Sigma(P \cdot x)}{R} = \frac{\Sigma(G \cdot x)}{G},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(P \cdot y)}{R} = \frac{\Sigma(G \cdot y)}{G},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma(P \cdot z)}{R} = \frac{\Sigma(G \cdot z)}{G}$$

oder

$$x_0 = \frac{\Sigma(m \cdot x)}{M},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(m \cdot y)}{M}$$

und
$$z_0 = \frac{\Sigma(m \cdot z)}{M}.$$

Wie man den Körper zu den stets vertical abwärts gerichteten Gewichten der einzelnen materiellen Punkte auch verdrehen mag, der Schwerpunkt bleibt stets Angriffspunkt des Gesamtgewichtes G vom Körper.

Specieller Fall: Legt man das rechtwinkelige Achsen-system X, Y, Z derart, dass der Schnittpunkt der Achsen mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, dann wird

$$\begin{aligned}
 & x_0 = 0, \\
 & y_0 = 0, \\
 & z_0 = 0 \\
 \text{und} & \\
 & \Sigma(m \cdot x) = 0, \\
 & \Sigma(m \cdot y) = 0 \\
 \text{und} & \Sigma(m \cdot z) = 0.
 \end{aligned}$$

2.

Innere Kräfte des starren Körpers und Wirkung derselben.

Je zwei materielle Punkte eines Körpers sind durch Kräfte mit einander verbunden, welche bei elastischen Körpern eine Veränderung der Entfernung der einzelnen Punkte erlauben, bei starren Körpern hingegen nicht. Von diesen Kräften, „innere Kräfte“ genannt, wirkt (Fig. 216) die eine vom materiellen Punkte m_1 auf den Punkt m_2 und die andere von m_2 auf m_1 ; die Wirkung ist also eine gegenseitige und es müssen daher nach dem Gesetze der Wechselwirkung je zwei der inneren Kräfte gleich gross sein und

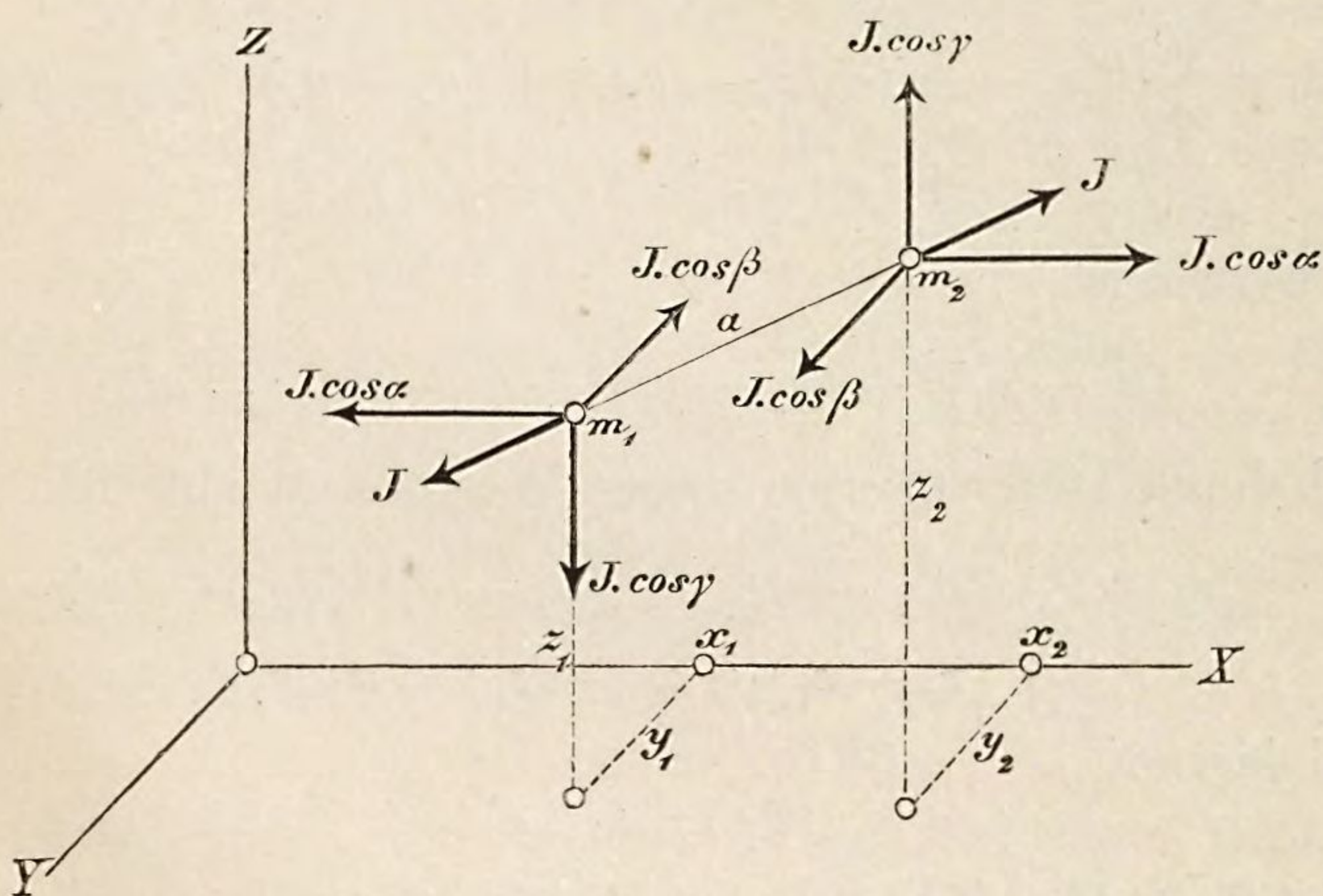


Fig. 216.

entgegengesetzt in der geraden Verbindungslinie von zwei materiellen Punkten liegen.

Erfährt nun im Allgemeinen die Entfernung a der beiden materiellen Punkte m_1 und m_2 bei einer beliebigen fingirten, aber möglichen Bewegung des Körpers eine Verlängerung oder Verkürzung da , so entsteht die Aufgabe, die Grösse der von den beiden inneren Kräften J geleisteten Arbeit $\mathfrak{A}_1$ zu bestimmen.

Heissen die Componenten der Kräfte J in den Richtungen der X -, Y - und Z -Achse $J \cdot \cos \alpha$, $J \cdot \cos \beta$ und $J \cdot \cos \gamma$, dann ist nach dem Gesetz der mechanischen Arbeit

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= J \cdot \cos \alpha \cdot dx_2 - J \cdot \cos \alpha \cdot dx_1 + J \cdot \cos \beta \cdot dy_2 - J \cdot \cos \beta \cdot dy_1 + \dots \\ &= J \cdot \cos \alpha \cdot (dx_2 - dx_1) + J \cdot \cos \beta \cdot (dy_2 - dy_1) + J \cdot \cos \gamma \cdot (dz_2 - dz_1) \\ &= J \cdot \{ \cos \alpha \cdot (dx_2 - dx_1) + \cos \beta \cdot (dy_2 - dy_1) + \cos \gamma \cdot (dz_2 - dz_1) \}.\end{aligned}$$

Nun ist aber auch, da der Abstand a dieselbe Neigung wie je eine Kraft J hat,

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{a}; \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{a},$$

folglich ist auch

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= \frac{J}{a} \cdot \{ (x_2 - x_1) \cdot (dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1) \cdot (dy_2 - dy_1) \\ &\quad + (z_2 - z_1) \cdot (dz_2 - dz_1) \}.\end{aligned}$$

Ferner ist

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = a^2$$

und durch Differentiation dieses Werthes ergibt sich

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1) \cdot (dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1) \cdot (dy_2 - dy_1) \\ + (z_2 - z_1) \cdot (dz_2 - dz_1) = a \cdot da,\end{aligned}$$

und hiermit

$$\mathfrak{A}_1 = J \cdot da$$

als Arbeit der beiden inneren Kräfte.

Bei „elastischen“ Körpern kann nun sein

1) J und da positiv

oder J und da negativ,

dann wird $\mathfrak{A}_1$ positiv,

oder es ist

2) J positiv und da negativ

oder J negativ und da positiv,

dann wird $\mathfrak{A}_1$ negativ.

Bei „starren“ Körpern aber ist als Bedingung der Starrheit stets

$$d\dot{a} = 0,$$

folglich auch stets die Arbeit der beiden inneren Kräfte J , also

$$\mathfrak{A}_1 = 0,$$

gleichgiltig, welche Bewegung für den Körper im Uebrigen fingirt wurde.

Da dieses Resultat für jedes Paar der inneren Kräfte gilt, so ist auch die Gesamtarbeit derselben bei „starren“ Körpern

$$\Sigma(\mathfrak{A}) = 0.$$

Anschaulich ergibt sich dasselbe Resultat aus folgender einfachen Betrachtung:

Jede mögliche Körperbewegung kann erzeugt werden durch fortschreitende und Dreh-Bewegung; beweist man nun, dass die Arbeit von je zwei inneren Kräften eines „starren“ Körpers sowohl bei fortschreitender, als auch bei Dreh-Bewegung Null ist, dann ist auch bewiesen, dass dieselbe bei beliebiger Bewegung des Körpers Null wird.

Verschiebt man den Körper (Fig. 217) über x , wobei a constant bleibt, so ergibt sich die Arbeit von zwei inneren Kräften durch

$$+ J \cdot s - J \cdot s = 0.$$

Verdreht man den Körper um eine beliebige Achse O (Fig. 218), so beschreiben die in gleicher Entfernung ϱ

III.

Freie Bewegung eines starren Körpers.

1.

Das d'Alembert'sche Princip und das Gesetz des Schwerpunktes.

Zwischen der Bewegung eines freien materiellen Punktes m_1 und der Bewegung eines einem starren Körper angehörigen materiellen Punktes m_1 besteht ein Unterschied; während ersterer „frei“ der auf ihn einwirkenden Kraft P folgt, wird letzterer sowohl von dieser äusseren Kraft P als auch von einer inneren Kraft J beeinflusst, welche letztere durch die Vereinigung des Punktes m_1 mit allen anderen materiellen Punkten des Körpers bedingt ist.

Soll ein Massenelement des Körpers durch eine äussere Kraft bewegt werden, so müssen alle anderen Massenelemente desselben — der starren Vereinigung wegen — von ersteren mitgenommen werden. Dieses Mitnehmen ist aber nur dadurch möglich, dass zwischen dem durch eine äussere Kraft beanspruchten Element und den übrigen Massentheilen des Körpers Spannungen entstehen, welche paarweise auftreten, in der geraden Verbindungslinie zweier materiellen Punkte entgegengesetzt gerichtet liegen und gleich gross sind.

Die an dem materiellen Punkte m_1 wirkende innere Kraft J ist daher anzusehen als die Resultirende aus allen Spannungen, welche die anderen Massenelemente auf ihn ausüben; sie ist eine Kraft, welche der Bewegung des materiellen Punktes m_1 hinderlich ist.

Bezieht man nun die Kräfte P und J und die durch sie hervorgebrachte Bewegung wieder auf ein rechtwinkeliges Achsensystem X, Y, Z , und heissen die Coordinaten des Punktes m_1 (sowohl eines freien, als auch des Körper-

Punktes) x_1, y_1, z_1 , sind die Componenten der äusseren Kraft P_x, P_y, P_z und die der inneren Kraft J_x, J_y, J_z , dann sind die wahren beschleunigenden Kräfte in den Achsenrichtungen beim „freien“ materiellen Punkt nach dem „Gesetz der Beschleunigung“

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = P_x,$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = P_y,$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} = P_z,$$

welche Werthe auch geschrieben werden können

$$0 = P_x - m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2},$$

$$0 = P_y - m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2},$$

$$0 = P_z - m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Nun kann man den Grössen von der Form $m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ nach Früherem auch die Bedeutung eines Widerstandes, des sogenannten Trägheitswiderstandes, geben, welchen die träge Masse m_1 der „angestrebten“ Bewegung entgegenstellt; und man kann infolgedessen die letzten Gleichungen folgendermassen lesen:

„An einem freien materiellen Punkte stehen die wirkende Kraft und der Trägheitswiderstand im Gleichgewicht“.

Anders gestaltet sich die Sache für den bewegten „Körperpunkt“ m_1 ; für ihn werden die wirklich beschleunigenden Kräfte in den Achsenrichtungen die alge-

braischen Summen aus den Componenten von der äusseren Kraft P und der inneren Kraft J , und es gilt

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = P_x - J_x,$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = P_y - J_y,$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} = P_z - J_z$$

oder

$$J_x = P_x - m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2},$$

$$J_y = P_y - m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2},$$

$$J_z = P_z - m_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, dass, nicht wie oben beim freien materiellen Punkte, Nullwerthe eintreten, sondern „Kraftverluste“, sogenannte „verlorene Kräfte“, resultiren, „dass die wirklich beschleunigende Kraft eines Körperelementes nur ein «Theil» der auf dasselbe wirkenden äusseren Kraft ist“.

Handelt es sich nun um die gleichzeitige Bewegung sämtlicher Massenelemente eines starren Körpers durch äussere Kräfte, so sind obige Gleichungen für alle materiellen Punkte zu bilden und zu addiren, woraus sich ergibt

$$\Sigma(J_x) = \Sigma(P_x) - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}\right),$$

$$\Sigma(J_y) = \Sigma(P_y) - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}\right),$$

$$\Sigma(J_z) = \Sigma(P_z) - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2}\right).$$

Bedenkt man ferner, dass sich die inneren Kräfte in ihren Wirkungen aufheben, die algebraischen Summen auf den linken Seiten also Null zu setzen sind, so folgt, wenn man $\Sigma(P_x) = X$, $\Sigma(P_y) = Y$ und $\Sigma(P_z) = Z$ setzt,

$$0 = X - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right),$$

$$0 = Y - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$0 = Z - \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

d. h. aber:

„An einem bewegten Körper stehen die verlorenen Kräfte im Gleichgewicht (d'Alemberts Princip).“

Versteht man unter der Form $\Sigma\left(m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right)$ die Summe aller Trägheitswiderstände der einzelnen materiellen Punkte des Körpers nach der X -Achse etc., so kann das d'Alembert'sche Princip auch folgendermassen ausgesprochen werden:

„An einem bewegten Körper stehen die äusseren Kräfte und die Trägheitswiderstände der einzelnen Massenelemente des Körpers im Gleichgewicht.“

„Dieser Satz ist ganz allgemein, also für jede Art der Bewegung giltig und er begreift, wie sich zeigen wird, nicht nur die Bedingungen der Bewegung, sondern auch die des Gleichgewichtes von Kräften an einem Körper in sich;“

das d'Alembert'sche Princip bildet daher die Fundamentalgleichung der ganzen Mechanik.

Für die Componenten der beschleunigenden Kraft des ganzen Körpers folgt aus den Nullwerthen

$$X = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right),$$

$$Y = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

$$Z = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

und für die Resultirende selbst gilt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Mit Hilfe der Schwerpunktsgleichungen

$$\Sigma(m \cdot x) = M \cdot x_0,$$

$$\Sigma(m \cdot y) = M \cdot y_0,$$

$$\Sigma(m \cdot z) = M \cdot z_0,$$

folgt aber nach zweimaliger Differentiation derselben in Bezug auf die Zeit t

$$\Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

$$\Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2}$$

und $\Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 z_0}{dt^2},$

weshalb nunmehr auch geschrieben werden kann

$$X = M \cdot \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

$$Y = M \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2},$$

$$Z = M \cdot \frac{d^2 z_0}{dt^2},$$

und nach Einsetzung dieser Werthe

$$R = M \cdot \sqrt{\left(\frac{d^2 x_0}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y_0}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z_0}{dt^2} \right)^2}.$$

Da x_0 , y_0 und z_0 die Coordinaten des Körperschwerpunktes sind, so bedeutet der Wurzelwerth in der letzten Gleichung die Beschleunigung p_0 des Körperschwerpunktes, und es ergibt sich ein Werth

$$R = M \cdot p_0,$$

welcher seiner Form nach in der Bewegungslehre eines materiellen Punktes für das Gesetz der Beschleunigung angeführt wurde.

Das Resultat ist deshalb hier folgendermassen zu lesen:

„Die Resultirende R aus allen äusseren Kräften — gleichgiltig wo ihr Angriffspunkt liegt — ertheilt dem Schwerpunkte des Körpers eine Beschleunigung derart, als ob die Resultirende im Schwerpunkt angriff und die Masse M des ganzen Körpers in demselben vereinigt sei (Gesetz des Schwerpunktes).“

„Für die Bahn des Schwerpunktes eines Körpers gelten daher auch alle diejenigen Regeln, welche für die freie Bewegung eines materiellen Punktes gefunden wurden.“

2.

Bewegungsarten eines freien Körpers.

Mit Rücksicht auf den wahren Angriffspunkt der Resultirenden R und mit Rücksicht darauf, dass die Zusammensetzung der äusseren Kräfte eventuell nur ein Kräftepaar liefert, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Geänderte fortschreitende Bewegung des Körper-Schwerpunktes.

Fällt der Angriffspunkt der Resultirenden R aus allen äusseren Kräften mit dem Schwerpunkte S des Körpers zusammen, so ist die Bewegung des Schwerpunktes im Allgemeinen mit Bezug auf Fig. 219 eine veränderliche in einer Curve; denn es wird die in die Richtung des Krüm-

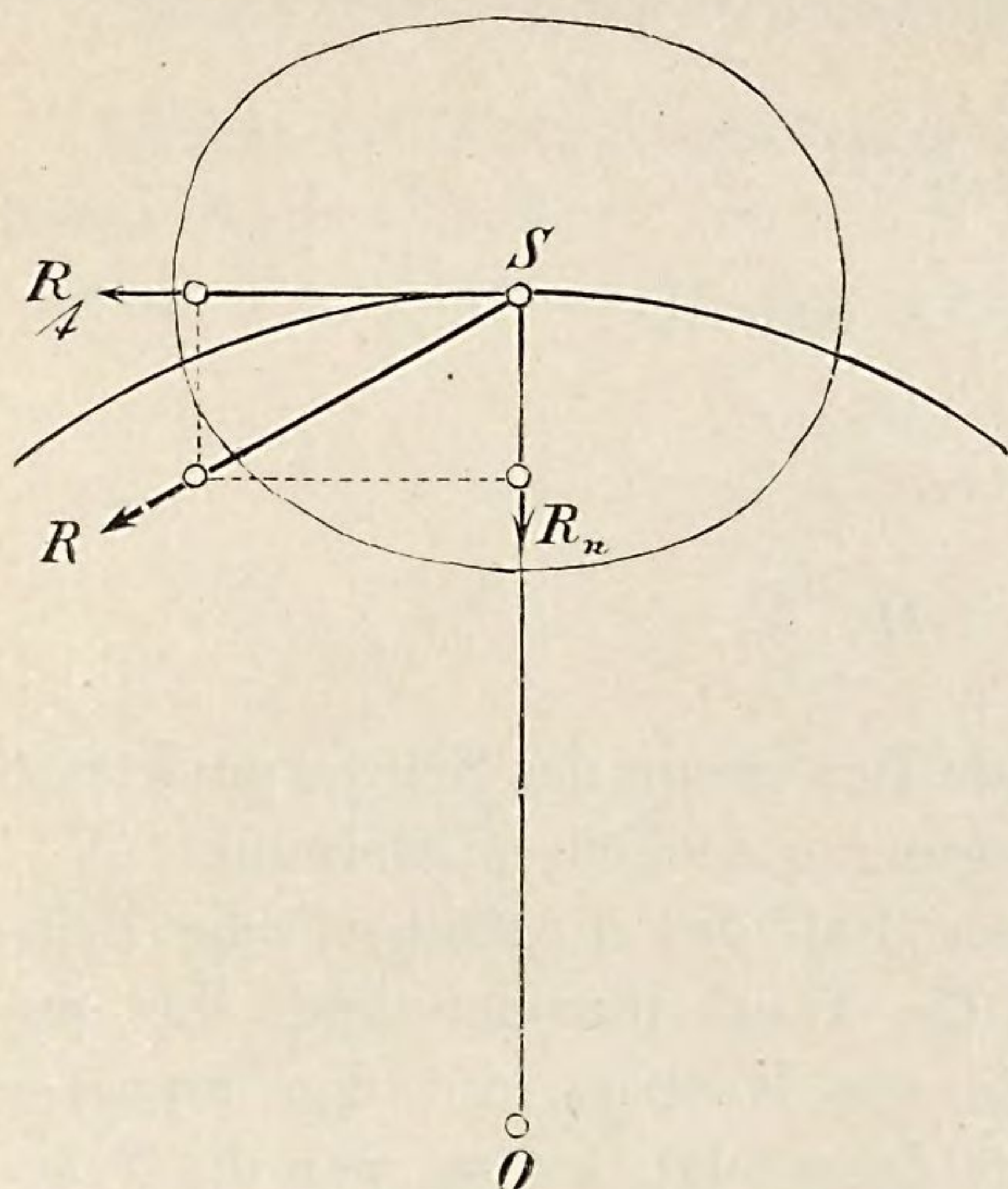


Fig. 219.

mungshalbmessers ϱ fallende Komponente R_n der Resultierenden R die Richtung der Bewegung und die Tangentialkomponente R_t die Tangentialgeschwindigkeit v_0 des Schwerpunktes S ändern; und allgemein wird — die Körpermasse M im Schwerpunkt S concentrirt gedacht — gelten

$$R_t = M \cdot \frac{dv_0}{dt}$$

und

$$R_n = \frac{M \cdot v_0^2}{\varrho}.$$

Im Uebrigen finden sich die weiteren Bedingungen für die verschiedensten Bewegungen des Schwerpunktes unter „Freie Bewegung eines materiellen Punktes“.

Zwei specielle Fälle mögen jedoch herausgegriffen werden.

Erster specieller Fall.

Wird beispielsweise

$$\varrho = \infty,$$

also $R_n = 0$

und $R_t = R = M \cdot \frac{dv_0}{dt},$

dann erhalten der Schwerpunkt und mit ihm alle anderen Punkte des Körpers dieselbe geradlinig fortschreitende, geänderte Bewegung; und würde R im speciellen Falle constant und beispielsweise gleich dem Gewichte G des Körpers sein, dann wäre die Bewegung des ganzen Körpers

eine geradlinig gleichförmig beschleunigte, vertical abwärts gerichtete.

Zweiter specieller Fall.

Ist

$$\varrho = r \text{ constant,}$$

$$\text{also} \quad R_n = \frac{M \cdot v_0^2}{r}$$

$$\text{und} \quad R_t = M \cdot \frac{dv_0}{dt},$$

dann ist die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes S eine geänderte Kreisbewegung um einen Mittelpunkt O .

Wendet man auf diesen Fall das d'Alembert'sche Princip an, bringt man also die Trägheitswiderstände der einzelnen materiellen Punkte des Körpers mit den äusseren Kräften ins Gleichgewicht, dann folgt, sofern man die Trägheitswiderstände und die äusseren Kräfte nach den Achsen X, Y, Z zerlegt und die statischen Momente der Reihe nach auf diese Achsen bildet:

$$0 = \mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}'_x,$$

$$0 = \mathfrak{M}_y - \mathfrak{M}'_y,$$

$$0 = \mathfrak{M}_z - \mathfrak{M}'_z.$$

Hierin bedeuten die ersten Werthe rechts die Momente der äusseren Kräfte, die zweiten Werthe rechts die Momente der Trägheitswiderstände, folglich gilt ausgeschrieben

$$0 = \Sigma(Z \cdot y - Y \cdot z) - \Sigma(m \cdot p_z \cdot y - m \cdot p_y \cdot z),$$

$$0 = \Sigma(X \cdot z - Z \cdot x) - \Sigma(m \cdot p_x \cdot z - m \cdot p_z \cdot x),$$

$$0 = \Sigma(Y \cdot x - X \cdot y) - \Sigma(m \cdot p_y \cdot x - m \cdot p_x \cdot y),$$

und es ergibt sich als Resultat

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}'_x,$$

$$\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}'_y,$$

$$\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}'_z.$$

b) Geänderte Drehbewegung des freien Körpers um seinen Schwerpunkt.

Liefert die Zusammensetzung der äusseren Kräfte keine Resultirende, sondern nur ein Kräftepaar, so herrscht „keine“ fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes S ,

sondern nur „Drehbewegung des Körpers um den Schwerpunkt“; denn transportirt man beispielsweise die Kräfte P (Fig. 220) von ihren Angriffspunkten A und B nach dem Schwerpunkt S , so ergeben sich an letzterem zwei gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kräfte $2P$, welche sich aufheben, und ein resultirendes Moment, bezogen auf den Schwerpunkt,

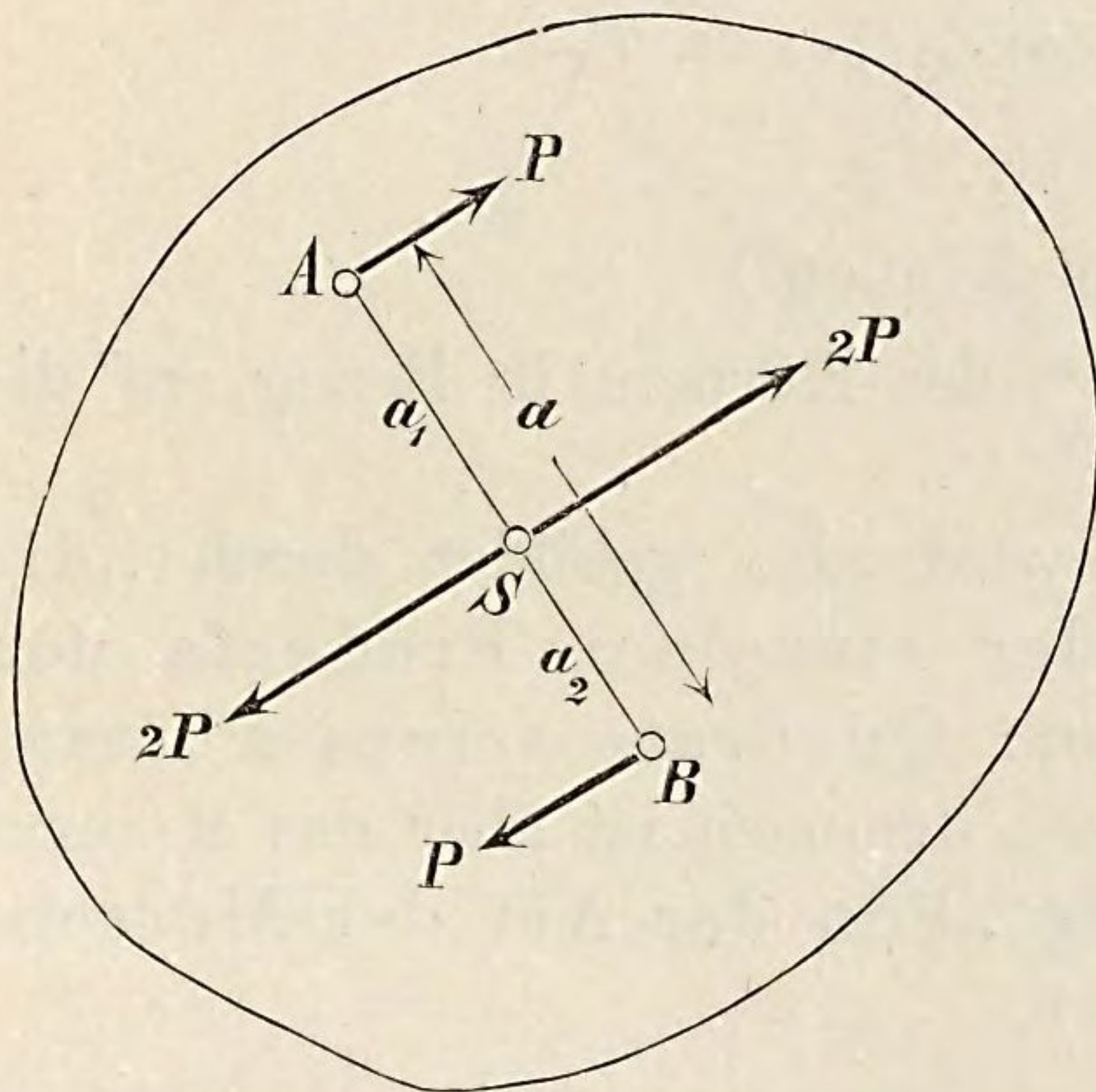


Fig. 220.

$$\mathfrak{M} = P \cdot a_1 + P \cdot a_2,$$

welches das einzig resultirende Kräftepaar

$$\mathfrak{M} = P \cdot a$$

liefert.

Nach dem d'Alembert'schen Princip und nach früherer Bezeichnung ist in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S laufende auf der Ebene des Kräftepaares senkrecht stehende Achse

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$$

$$\text{oder} \quad P \cdot a = \Sigma(m \cdot p \cdot \varrho),$$

wenn $p_1, p_2 \dots$ die Tangentialbeschleunigungen der materiellen Punkte $m_1, m_2 \dots$ in den Entfernungen $\varrho_1, \varrho_2 \dots$ von der S -Achse sind.

Ist nun ω die Winkelgeschwindigkeit und

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \text{ die Winkelbeschleunigung,}$$

dann ist allgemein

$$p = \varrho \cdot \varepsilon$$

und

$$P \cdot a = \Sigma(m \cdot \varrho^2) \cdot \varepsilon = T \cdot \varepsilon.$$

Hierin nennt man

$$T = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

das „Trägheitsmoment“ des Körpers in Bezug auf die Drehachse.

Das Trägheitsmoment wird also gebildet durch „die algebraische Summe der einzelnen Producte von Massenelement und dem Quadrate seines Abstandes von der Drehachse“; demnach ist aber das Moment der trägen Masse abhängig „von der Art der Massenvertheilung im Körper“.

c) Geänderte fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und geänderte Drehbewegung des Körpers um den Schwerpunkt.

Der allgemeinste Fall der freien Bewegung eines Körpers ist der, in welchem der Angriffspunkt A (Fig. 221) der Resultirenden R aus allen äusseren Kräften nicht mit dem Schwerpunkte S des Körpers zusammenfällt und eine anfängliche Geschwindigkeit des letzteren nicht die Richtung von R besitzt.

Transportirt man R von A nach S , so erhält man eine Kraft R in S , welche die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes erzeugt, und ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = R \cdot r$, welches eine Drehbewegung des Körpers um den Schwerpunkt hervorbringt.

Auf vorliegenden Fall mögen die allgemeinen für alle denkbaren Bewegungen geltenden nach d'Alemberts Princip gefundenen Gleichungen

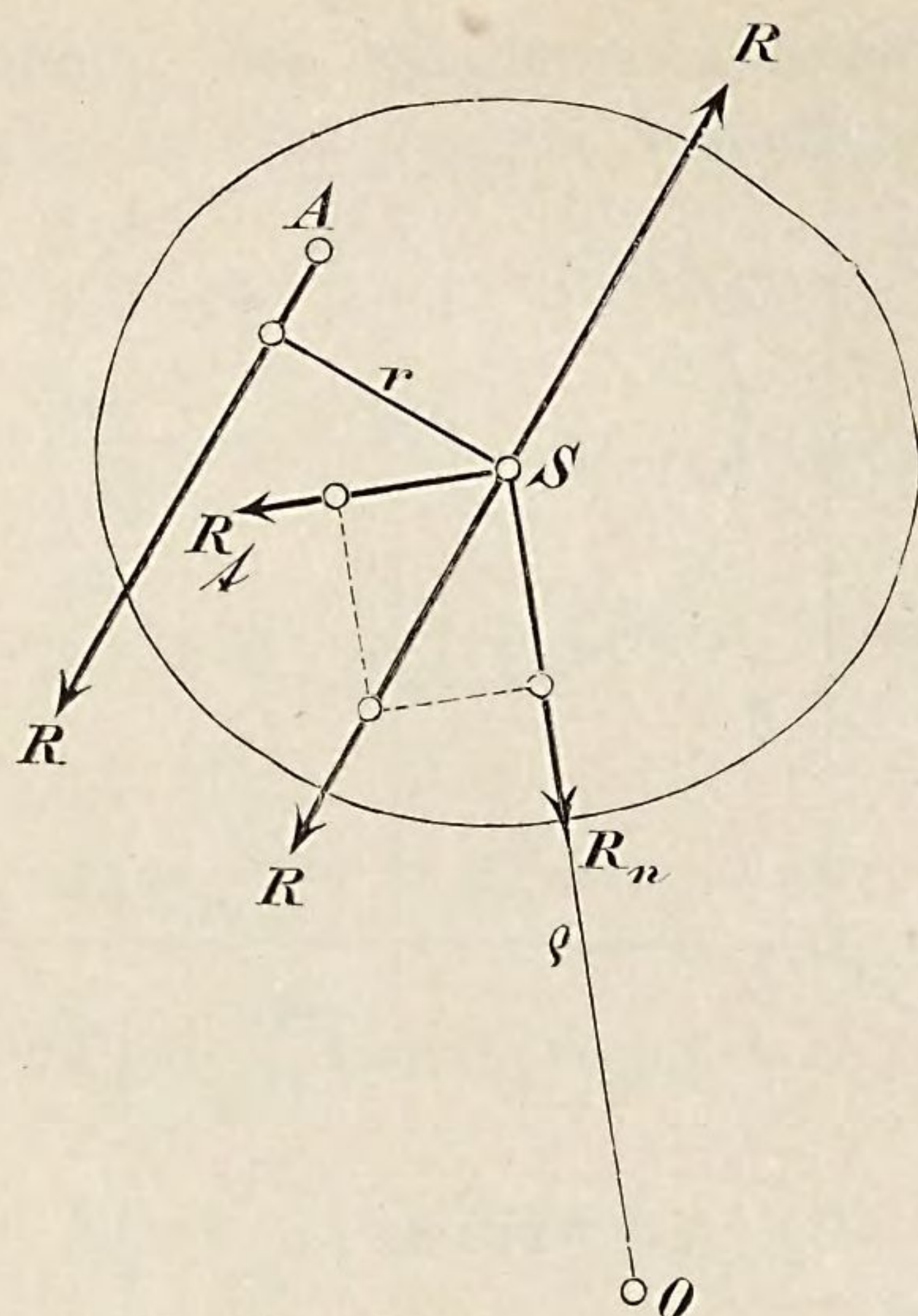


Fig. 221.

- 1) $X = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (m \cdot p_x),$
- 2) $Y = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \Sigma (m \cdot p_y),$
- 3) $Z = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \Sigma (m \cdot p_z),$
- 4) $\Sigma (Z \cdot y - Y \cdot z) = \Sigma (m \cdot p_z \cdot y - m \cdot p_y \cdot z),$
- 5) $\Sigma (X \cdot z - Z \cdot x) = \Sigma (m \cdot p_x \cdot z - m \cdot p_z \cdot x),$
- 6) $\Sigma (Y \cdot x - X \cdot y) = \Sigma (m \cdot p_y \cdot x - m \cdot p_x \cdot y)$

Anwendung finden und entsprechend geschrieben werden.

Drückt man die Coordinaten x, y, z eines Körperpunktes m , bezogen auf das rechtwinkelige Achsensystem X, Y, Z (Fig. 222), aus durch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Körperschwerpunktes S , bezogen auf dieselben Achsen, und durch die Coordinaten a, b, c des Körperpunktes m ,

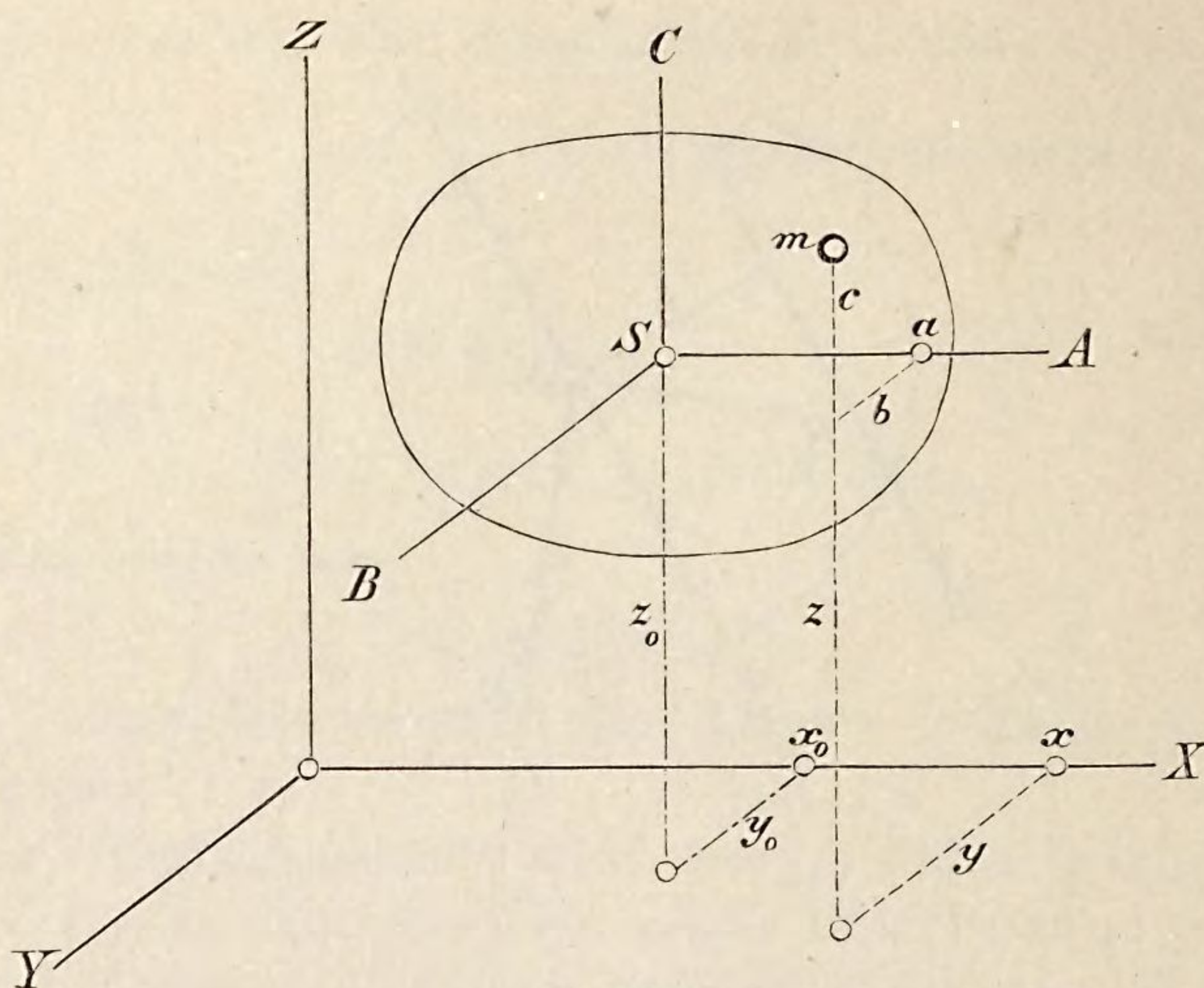


Fig. 222.

bezogen auf die zu X , Y , Z parallelen durch den Schwerpunkt S des Körpers laufenden Achsen A , B , C , so folgt

$$x = a + x_0,$$

$$y = b + y_0,$$

$$z = c + z_0,$$

woraus sich durch zweimalige Differentiation in Bezug auf die Zeit t ergibt

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2x_0}{dt^2} \quad \text{oder} \quad p_x = p_a + p_{x_0},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2y_0}{dt^2} \quad \text{oder} \quad p_y = p_b + p_{y_0},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2z_0}{dt^2} \quad \text{oder} \quad p_z = p_c + p_{z_0}.$$

Hierin bedeuten p_a , p_b , p_c die Componenten der relativen Beschleunigung des Körperpunktes m , d. h. derjenigen Beschleunigung, welche der Körperpunkt besitzen würde, wenn man sich die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes aufgehoben denkt.

Nach Einsetzung der erhaltenen Werthe gestalten sich die d'Alembert'schen Gleichungen folgendermassen:

$$1) \quad X = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_a) + M \cdot p_{x_0} = M \cdot p_{x_0},$$

$$2) \quad Y = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_b) + M \cdot p_{y_0} = M \cdot p_{y_0},$$

$$3) \quad Z = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_c) + M \cdot p_{z_0} = M \cdot p_{z_0},$$

denn es ist

$$\Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_a) = 0,$$

$$\Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_b) = 0$$

$$\text{und} \quad \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2} \right) = \Sigma(m \cdot p_c) = 0,$$

weil die Achsen A , B , C durch den Schwerpunkt laufen, die Coordinaten des letzteren bezogen auf diese Achsen $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$, und somit nach der Schwerpunktslehre

$$\Sigma(m \cdot a) = 0,$$

$$\Sigma(m \cdot b) = 0$$

$$\text{und} \quad \Sigma(m \cdot c) = 0$$

sind.

Weiter folgt

$$4) \quad \Sigma[Z \cdot (b + y_0)] - \Sigma[Y \cdot (c + z_0)] = \\ = \Sigma[m \cdot (p_c + p_{z_0}) \cdot (b + y_0)] - \Sigma[m \cdot (p_b + p_{y_0}) \cdot (c + z_0)]$$

oder

$$\Sigma(Z \cdot b - Y \cdot c) + Z \cdot y_0 - Y \cdot z_0 = \\ = \Sigma(m \cdot p_c \cdot b) + \Sigma(m \cdot b) \cdot p_{z_0} + \Sigma(m \cdot p_c) \cdot y_0 + \Sigma(m) \cdot p_{z_0} \cdot y_0 \\ - \Sigma(m \cdot p_b \cdot c) - \Sigma(m \cdot c) \cdot p_{y_0} - \Sigma(m \cdot p_b) \cdot z_0 - \Sigma(m) \cdot p_{y_0} \cdot z_0.$$

Nun ist aber

$$Z \cdot y_0 = M \cdot p_{z_0} \cdot y_0,$$

$$Y \cdot z_0 = M \cdot p_{y_0} \cdot z_0,$$

$$\Sigma(m) = M,$$

und, da die Achsen A , B , C durch den Schwerpunkt laufen, nach der Schwerpunktstheorie

$$\Sigma(m \cdot b) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2 b}{dt^2}\right) = \Sigma(m \cdot p_b) = 0,$$

ferner

$$\Sigma(m \cdot c) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\left(m \cdot \frac{d^2 c}{dt^2}\right) = \Sigma(m \cdot p_c) = 0;$$

demnach ergibt sich

$$\Sigma(Z \cdot b - Y \cdot c) = \Sigma(m \cdot p_c \cdot b - m \cdot p_b \cdot c) = \mathfrak{M}_a$$

und analog

$$5) \quad \Sigma(X \cdot c - Z \cdot a) = \Sigma(m \cdot p_a \cdot c - m \cdot p_c \cdot a) = \mathfrak{M}_b,$$

$$6) \quad \Sigma(Y \cdot a - X \cdot b) = \Sigma(m \cdot p_b \cdot a - m \cdot p_a \cdot b) = \mathfrak{M}_c.$$

Aus den drei letzten Werthen für die statischen Momente $\mathfrak{M}_a$, $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{M}_c$ der äusseren Kräfte bezogen auf die Schwerpunkts-Achsen A , B , C allein folgt, dass sich der Körper so um den Schwerpunkt S bewegt, als ob der letztere in Ruhe sei.

d) Gleichförmige Bewegung und Ruhezustand eines freien Körpers.

(Gleichgewicht der Kräfte an einem Körper oder Statik derselben.)

Soll einem Körper keinerlei Beschleunigung ertheilt werden, so müssen die allgemeinen d'Alembert'schen Bewegungsgleichungen Nullwerthe, also

$$1) \quad X = 0,$$

$$2) \quad Y = 0,$$

$$3) \quad Z = 0,$$

$$4) \quad \mathfrak{M}_x = 0,$$

$$5) \quad \mathfrak{M}_y = 0,$$

$$6) \quad \mathfrak{M}_z = 0$$

ergeben.

Die Gleichgewichtsbedingungen der äusseren Kräfte an einem Körper bilden also einen speciellen Fall des Fundamentalsatzes der Mechanik, des d'Alembert'schen Principes.

Die Lehre vom Gleichgewicht oder die „Statik“ starrer Körper ist also nur derjenige specielle Fall der „Dynamik“, in welchem die Resultirende

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 0$$

und das resultirende Moment

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} = 0$$

wird.

α) Gleichförmig geradlinige Bewegung des Körpers.

Sind für die an einem starren Körper wirkenden äusseren Kräfte obige Bedingungen erfüllt und besitzt derselbe eine ursprüngliche Geschwindigkeit, so bewegt sich der Körper mit derselben „geradlinig“ und „gleichförmig“, weil weder die Richtung der Bewegung, noch die Geschwindigkeit geändert wird.

β) Ruhezustand des Körpers.

Ist jene Geschwindigkeit gleich Null und gelten für die äusseren Kräfte obige Bedingungen, so verharrt der Körper vermöge der Trägheit in Ruhe.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (siehe dasselbe unter Bewegungslehre eines materiellen Punktes) gilt hier für jeden Körperpunkt.

3.

Lebendige Kraft eines freien starren Körpers und Arbeit der äusseren Kräfte.

Unter der lebendigen Kraft eines Körpers versteht man die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Massen-

elemente desselben, und es ist zur Ermittlung der ersteren zunächst die wahre Geschwindigkeit eines jeden Elementes festzustellen.

Im Allgemeinen besteht die Bewegung eines Körperelementes aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehbewegung um den Körper-Schwerpunkt, folglich erhält man im Allgemeinen die wahre Geschwindigkeit v eines Körperelementes durch die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten jener beiden Bewegungen.

Ist nur fortschreitende Bewegung vorhanden, so bleibt w , die Geschwindigkeit der Drehbewegung, unberücksichtigt, herrscht nur Drehbewegung um den Schwerpunkt, so bleibt die Geschwindigkeit der ersteren ausser Acht.

Mit Rücksicht hierauf sollen betrachtet werden die lebendige Kraft des Körpers

- a) bei alleiniger fortschreitender Bewegung,
- b) bei alleiniger Drehbewegung um den Schwerpunkt,
- c) bei derjenigen Bewegung, welche aus der Zusammensetzung der vorgenannten entsteht.

- a) Lebendige Kraft eines freien starren Körpers bei fortschreitender Bewegung des Schwerpunktes ohne Drehung um denselben.

Nach der Bewegungslehre eines freien materiellen Punktes galt — unter Beibehaltung der daselbst gewählten Bezeichnungen — für die Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung

$$\begin{aligned} \int P \cdot ds \cdot \cos \alpha &= \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) \\ &= m \cdot \int v \cdot dv, \end{aligned}$$

welche Werthe im vorliegenden Falle zur Bestimmung der lebendigen Kraft eines Körpers benutzt werden können; man hat dieselben auf alle materiellen Punkte des Körpers anzuwenden.

Allgemein müssen auch die inneren Kräfte des Körpers

in Betracht gezogen werden; sie heben sich jedoch einander auf, vermögen also die Geschwindigkeitsverhältnisse des Körpers nicht zu ändern, und kommen deshalb in Wegfall.

Folglich gilt nun für die lebendige Kraft des Körpers

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\int m \cdot v \cdot dv\right) &= \Sigma\left(\int P \cdot ds \cdot \cos \alpha\right) \\ &= \Sigma\left\{\int\left(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz\right)\right\}\end{aligned}$$

oder, wenn c die Geschwindigkeiten der Körperelemente zur Zeit Null und v die Geschwindigkeiten derselben zur Zeit t sind,

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{m \cdot c^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}),$$

worin $\Sigma(\mathfrak{A})$ die algebraische Summe der Arbeiten aller äusseren Kräfte bedeutet.

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man diejenige Gleichung benutzt, welche aus der Vereinigung des d'Alembert'schen Principis mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgeht:

Wenn die verlorenen Kräfte im Gleichgewicht stehen müssen, und δx , δy , δz etc. allgemein fingirte mögliche Wege der einzelnen materiellen Punkte des Körpers in den Achsenrichtungen X , Y , Z bedeuten, so muss nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Summe der Arbeiten aller verlorenen Kräfte gleich Null werden, also gelten

$$\Sigma\left\{\left(X - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot \delta x + \left(Y - m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right) \cdot \delta y + \left(Z - m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right) \cdot \delta z\right\} = 0.$$

Nun gehören zu den möglichen Verschiebungen der materiellen Punkte δx , δy , δz etc. auch die wirklichen dx , dy , $dz \dots$, weshalb auch geschrieben werden darf

$$\Sigma\left\{\left(X - m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) \cdot dx + \left(Y - m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right) \cdot dy + \left(Z - m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right) \cdot dz\right\} = 0$$

oder

$$\Sigma(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = \Sigma\left(m \cdot \frac{dx \cdot dx^2 + dy \cdot dy^2 + dz \cdot dz^2}{dt^2}\right);$$

es ist aber

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und

$$\frac{dv^2}{dt} = 2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$

oder

$$\frac{dv^2}{2} = \frac{dx \cdot dx^2 + dy \cdot dy^2 + dz \cdot dz^2}{dt^2},$$

folglich ergibt sich durch Einsetzung dieses Werthes und durch Integration beider Seiten der Gleichung

$$\int \Sigma(X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = \int d\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right)$$

oder

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{m \cdot c^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}),$$

wie oben.

Das erhaltene Resultat liefert die Beziehungen zwischen der Bewegungsursache eines Körpers und der Wirkung auf denselben.

Erster specieller Fall: Stehen die äusseren Kräfte im Gleichgewicht, so wird weder die Richtung, noch die Geschwindigkeit geändert, und es wird

$$\Sigma(\mathfrak{A}) = 0,$$

d. h. die lebendige Kraft des Körpers ist bei geradlinig gleichförmig fortschreitender Bewegung constant und im Fall der Ruhe gleich Null.

Zweiter specieller Fall: Würde die fortschreitende Bewegung des Körperschwerpunktes eine kreisförmige sein, so wäre

$$R_t = M \cdot \frac{dv_0}{dt},$$

$$R_n = \frac{M \cdot v_0^2}{r}$$

und der Krümmungshalbmesser ϱ für je einen materiellen Punkt constant.

Ist ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung, dann ist allgemein die Tangentialgeschwindigkeit eines materiellen Punktes im Körper

$$v = \varrho \cdot \omega,$$

die lebendige Kraft desselben

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot \varrho^2 \cdot \omega^2}{2}$$

und die lebendige Kraft des ganzen Körpers, da ω für jeden Punkt denselben Werth hat,

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = \Sigma(m \cdot \varrho^2) \cdot \frac{\omega^2}{2} = \frac{T \cdot \omega^2}{2},$$

worin

$$T = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf die Drehachse ist.

Wäre nun ω_a die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit Null, ω_e die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t , dann wäre die Zunahme der lebendigen Kraft

$$T \cdot \left(\frac{\omega_e^2 - \omega_a^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}).$$

b) Lebendige Kraft des freien starren Körpers bei alleiniger Drehbewegung desselben um eine Schwerpunktsachse.

Besitzt der Körper nur eine Rotation um eine Schwerpunktsachse, dann dient zur Bestimmung der lebendigen Kraft respective der Zunahme an lebendiger Kraft der letzte Werth

$$T \cdot \left(\frac{\omega_e^2 - \omega_a^2}{2}\right) = \Sigma(\mathfrak{A}),$$

wenn nur unter T das Trägheitsmoment des Körpers bezogen auf die Schwerpunktsachse verstanden wird.

Spezieller Fall: Besitzt der Körper eine ursprüngliche Geschwindigkeit, und stehen die äusseren Kräfte im Gleichgewicht, dann ist

$$\Sigma(\mathfrak{A}) = 0$$

und die lebendige Kraft der gleichförmigen Drehbewegung um die Schwerpunktsachse

$$\frac{T \cdot \omega^2}{2}$$

constant.

c) Lebendige Kraft des freien starren Körpers bei gleichzeitiger fortschreitender Bewegung des Schwerpunktes und der Drehbewegung des Körpers um denselben.

Es werde die Bewegung eines jeden Körperpunktes m , also auch die des Schwerpunktes auf ein rechtwinkeliges festes Achsensystem X, Y, Z (Fig. 223) bezogen und es mögen die Coordinaten der ersteren allgemein x, y, z , die des letzteren wie früher x_0, y_0, z_0 heissen.

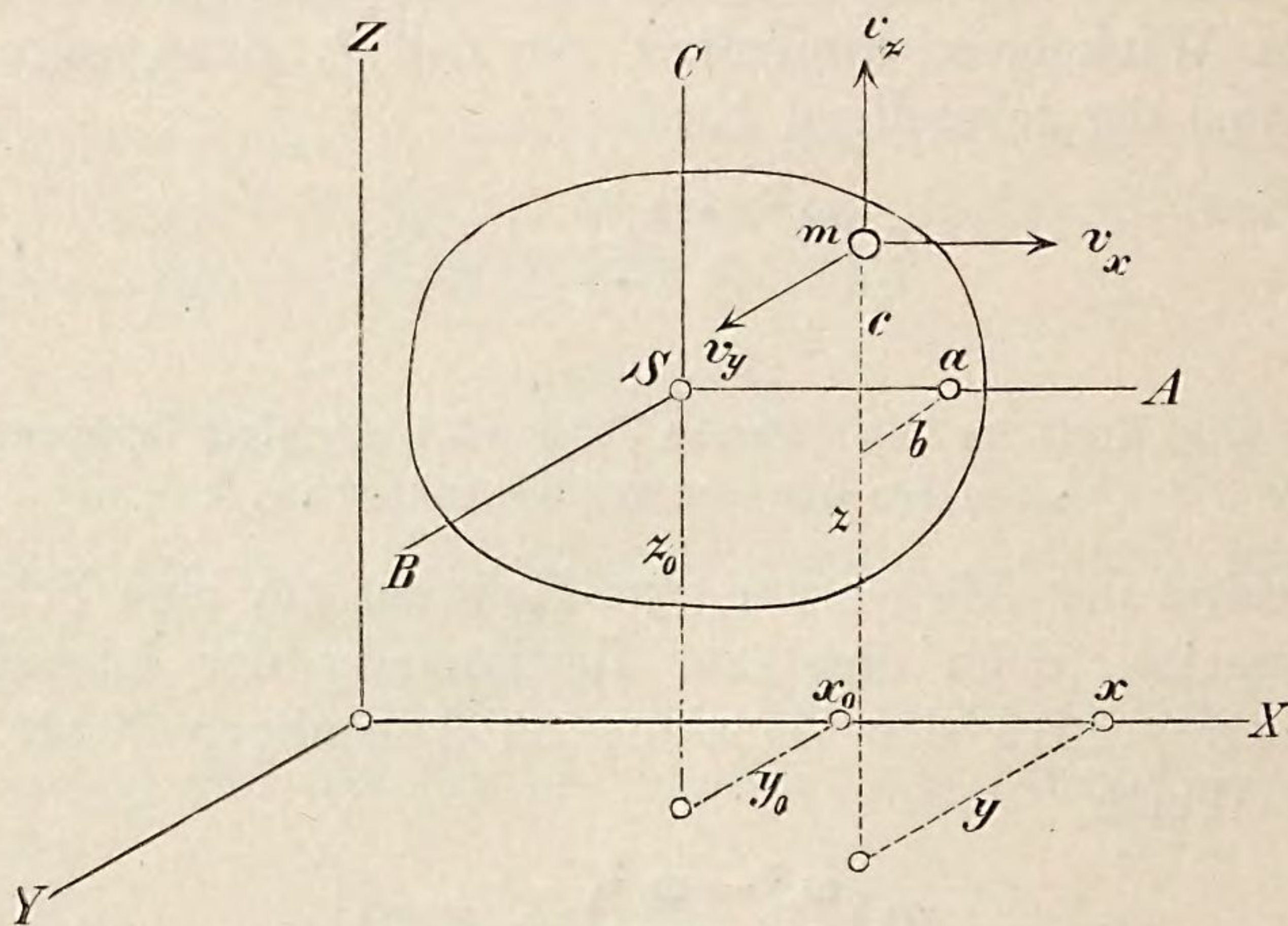


Fig. 223.

Legt man ferner parallel zu den Achsen X, Y, Z durch den Körperschwerpunkt S die Achsen A, B, C und werden,

bezogen auf dieselben, die Coordinaten des materiellen Punktes m allgemein mit a, b, c bezeichnet, während die des Schwerpunktes Null sind, ist ferner v_0 die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, w die Geschwindigkeit der Relativbewegung um denselben und v die wahre Geschwindigkeit des Punktes, dann ist:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{dx_0}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} + \frac{dy_0}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dc}{dt} + \frac{dz_0}{dt}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) &= \Sigma\left\{\frac{m}{2} \cdot \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]\right\} \\ &= \Sigma\left\{\frac{m}{2} \cdot \left[\left(\frac{da}{dt} + \frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db}{dt} + \frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc}{dt} + \frac{dz_0}{dt}\right)^2\right]\right\} \\ &= \Sigma\left(\frac{m \cdot w^2}{2}\right) + \frac{M \cdot v_0^2}{2} + \frac{dx_0}{dt} \cdot \Sigma\left(m \cdot \frac{da}{dt}\right) + \\ &\quad + \frac{dy_0}{dt} \cdot \Sigma\left(m \cdot \frac{db}{dt}\right) + \frac{dz_0}{dt} \cdot \Sigma\left(m \cdot \frac{dc}{dt}\right); \end{aligned}$$

da die Achsen A, B, C durch den Schwerpunkt laufen, sind die letzten drei Werthe gleich Null und es resultirt

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = \frac{M \cdot v_0^2}{2} + \Sigma\left(\frac{m \cdot w^2}{2}\right).$$

„Die totale lebendige Kraft des starren Körpers «in einem Augenblick der Bewegung» ist also die Summe aus derjenigen lebendigen Kraft, welche der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes, und derjenigen lebendigen Kraft, welche der Drehbewegung des Körpers um den Schwerpunkt entspricht.“

Der erste Theil $\frac{M \cdot v_0^2}{2}$ ist die lebendige Kraft, welche

der Körper besitzen würde, wenn die ganze Masse M des Körpers im Schwerpunkte concentrirt wäre, während der zweite Theil $\Sigma\left(\frac{m \cdot w^2}{2}\right)$ diejenige lebendige Kraft ist, welche der Körper besäße, wenn der Schwerpunkt in Ruhe bliebe und die Geschwindigkeiten $w_1, w_2 \dots$ der materiellen Punkte die wirklichen wären.

Bedeutet nun die Geschwindigkeit des Schwerpunktes zur Zeit Null $v_o = v_a$ und diejenige am Ende, also zur Zeit t , $v_o = v_e$, sind ferner allgemein w_a die anfänglichen und w_e die schliesslichen Drehgeschwindigkeiten der einzelnen Körperpunkte um die Schwerpunktsachse, dann gilt die Gleichung

$$\left\{ \frac{M \cdot v_e^2}{2} + \Sigma\left(\frac{m \cdot w_e^2}{2}\right) \right\} - \left\{ \frac{M \cdot v_a^2}{2} + \Sigma\left(\frac{m \cdot w_a^2}{2}\right) \right\} = \Sigma(\mathfrak{X}).$$

4.

Trägheitsmomente starrer Körper.

Die allgemeine Form

$$T_o = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

für das Trägheitsmoment eines starren Körpers bezogen auf eine beliebige Drehachse O (Fig. 224) desselben wurde unter 3. a) bereits gefunden und definirt; in Folgendem mögen nur die Reductionen von gegebenen Trägheitsmomenten auf andere Drehachsen veranschaulicht werden.

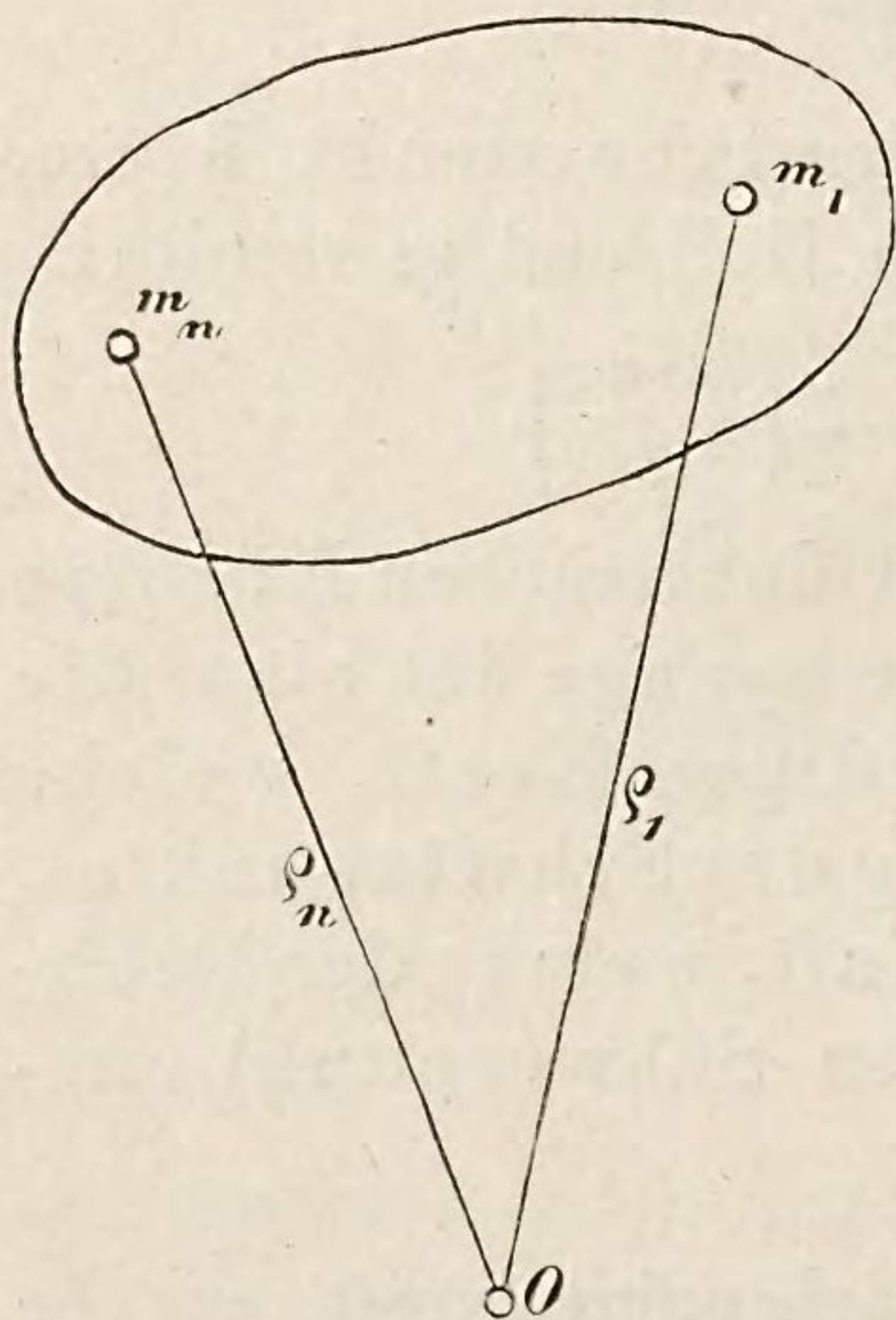


Fig. 224.

a) Reduction des „Trägheitsmomentes eines starren Körpers, bezogen auf die Schwerpunktsachse“, auf eine zur Schwerpunktsachse parallele Drehachse.

Es sei das Trägheitsmoment $T_s = \Sigma(m \cdot r^2)$ bezogen auf die durch den Schwerpunkt S (Fig. 225) laufende und auf

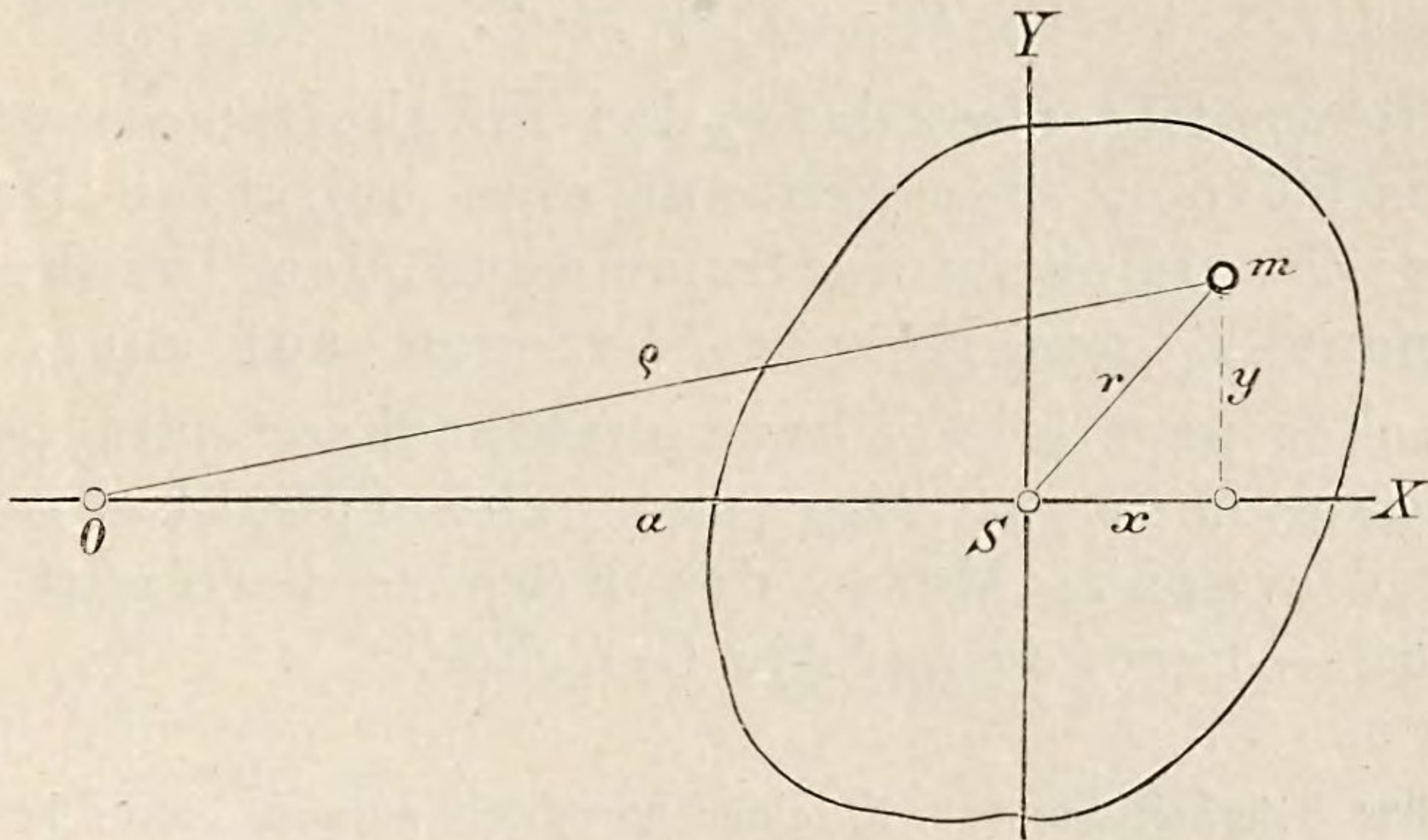


Fig. 225.

der Bildebene senkrecht stehende Achse gegeben und es sei das Trägheitsmoment

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \rho^2)$$

bezogen auf eine durch einen beliebigen Punkt O und zur S -Achse parallel laufende Drehachse durch T_s auszudrücken.

Legt man zu dem Zweck durch O und S eine X -Achse und in der Bildebene durch S eine zur X -Achse senkrechte Y -Achse, bezeichnet man die Coordinaten des beliebigen materiellen Punktes m bezogen auf diese Achsen mit x und y , ist ferner der Abstand

$$OS = a,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (a + x)^2 + y^2 \\ &= a^2 + x^2 + y^2 + 2 \cdot a \cdot x. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

folglich ergibt sich durch Einsetzung

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2) = \Sigma(m \cdot r^2) + \Sigma(m) \cdot a^2 + 2 \cdot a \Sigma(m \cdot x)$$

oder, da

$$\Sigma(m \cdot x) = M \cdot x_0$$

nach der Schwerpunktslehre Null ist, weil $x_0 = 0$, so ergibt sich

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2.$$

Hieraus folgt aber, dass „das Trägheitsmoment T_0 eines Körpers bezogen auf eine beliebige Drehachse O “ gleich ist der Summe aus „dem Trägheitsmoment T_s des Körpers bezogen auf eine zur O -Achse parallele Schwerpunktsachse“ und „dem Trägheitsmoment $M \cdot a^2$ des Schwerpunktes — in ihm die ganze Masse des Körpers vereinigt gedacht — bezogen auf die O -Achse.“

b) „Das Trägheitsmoment T_0 einer unendlich dünnen Platte bezogen auf eine beliebige zur Plattenebene senkrecht stehende O -Achse“ ausgedrückt durch „die Trägheitsmomente T_x und T_y der Platte bezogen auf die in der Plattenebene liegenden senkrecht aufeinander stehenden und in O sich schneidenden Achsen X und Y “ (Fig. 226).

Nach Fig. 226 ist

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,$$

also

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2) = \Sigma(m \cdot x^2) + \Sigma(m \cdot y^2)$$

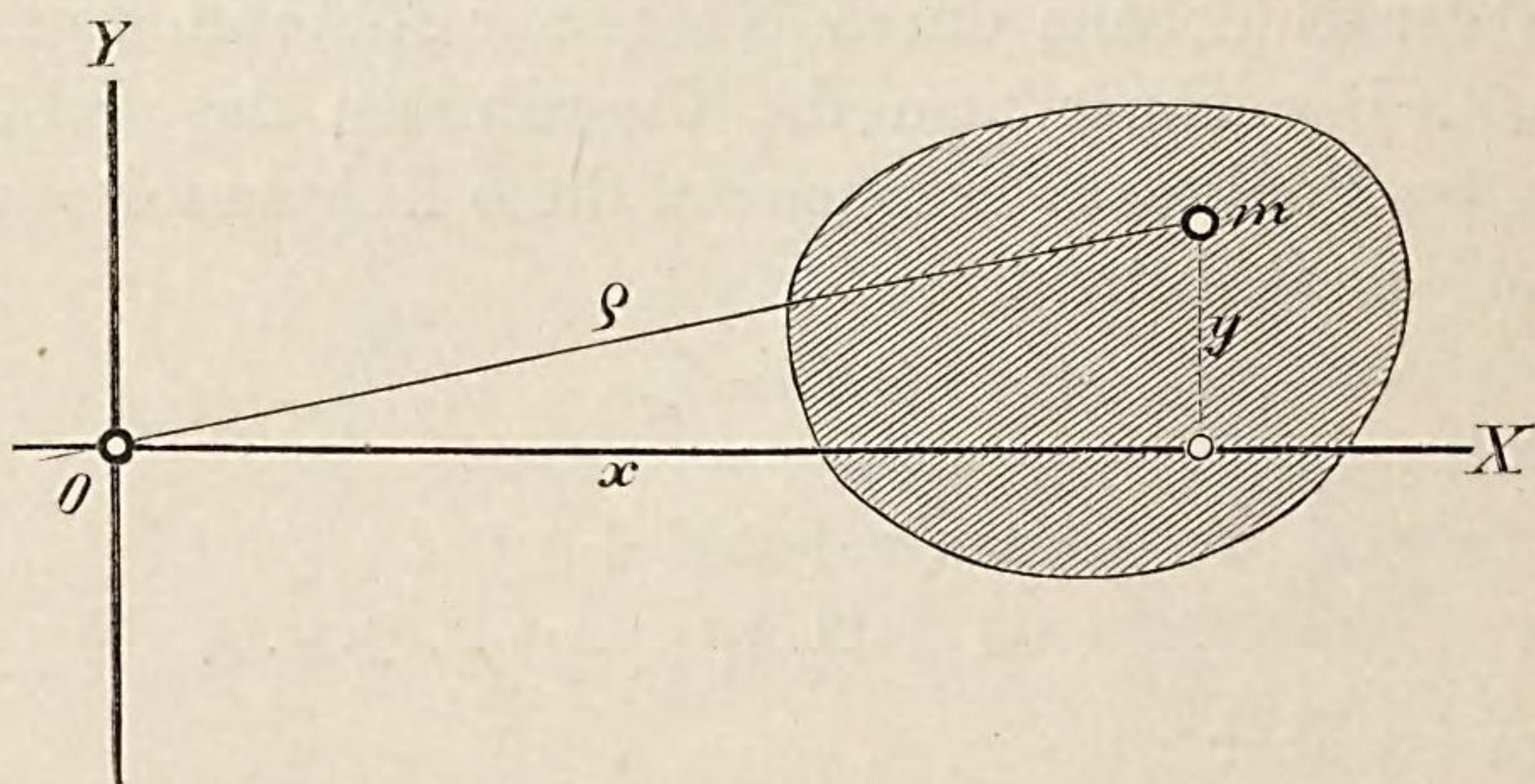


Fig. 226.

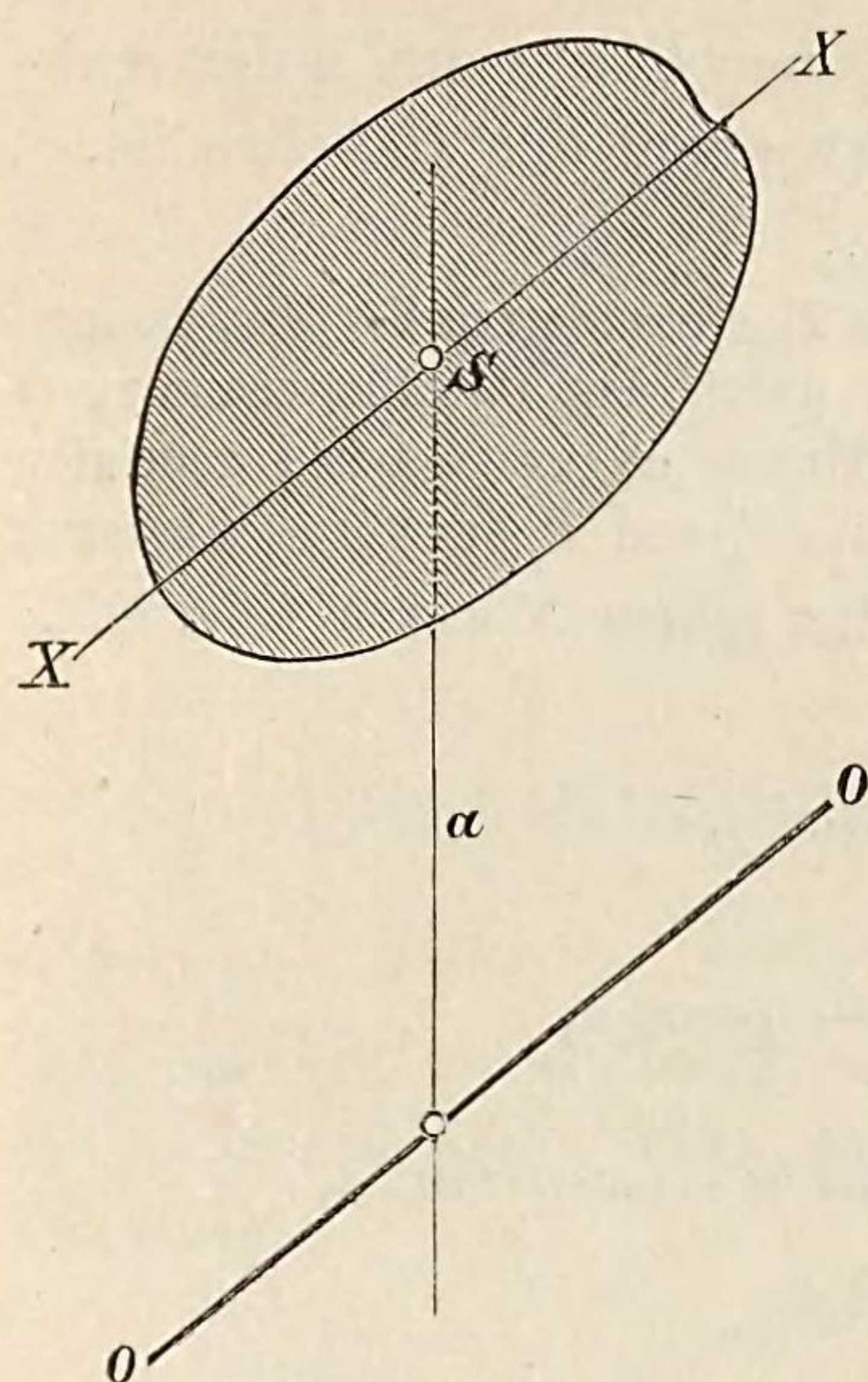


Fig. 227.

oder, da

$$\Sigma(m \cdot x^2) = T_y$$

das Trägheitsmoment der Platte bezogen auf die Y -Achse und

$$\Sigma(m \cdot y^2) = T_x$$

das Trägheitsmoment der Platte bezogen auf die X -Achse ist, so folgt das Trägheitsmoment bezogen auf die O -Achse aus

$$T_0 = T_x + T_y.$$

Spezieller Fall: Ist

$$T_x = T_y,$$

so ist

$$T_0 = 2 \cdot T_x$$

oder auch

$$T_x = \frac{T_0}{2}.$$

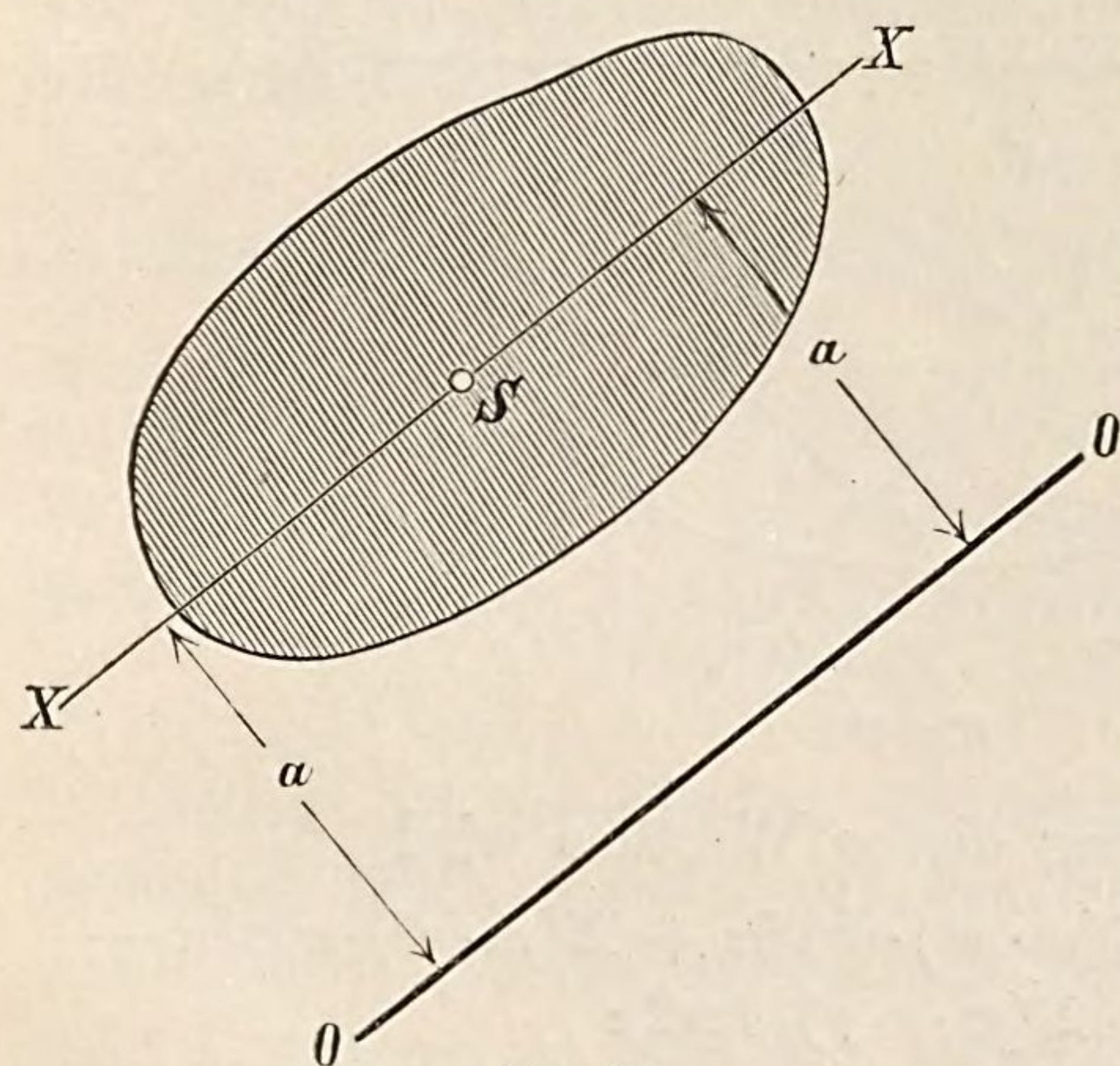


Fig. 228.

Schneiden sich ferner die X - und Y -Achse in dem Schwerpunkte S , sind sie also Schwerpunktsachsen, und ist T_x ermittelt worden, so findet sich weiter das Trägheitsmoment der unendlich dünnen Platte bezogen auf eine zur X -Achse parallele O -Achse (Fig. 227 und 228) durch

$$T_0 = T_s + M' \cdot a^2,$$

worin

$$T_s = T_x,$$

M' die Masse der unendlich dünnen Platte und a der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von der O -Achse ist.

c) Bestimmung „des Trägheitsmomentes T_0 eines starren Körpers, bezogen auf eine in einer XY -Ebene liegende durch den Coordinatenanfang O laufende und unter dem beliebigen Winkel α zur X -Achse geneigten OO -Achse“, durch „die Trägheitsmomente T_x und T_y des Körpers, bezogen auf die senkrecht aufeinander stehenden Achsen X und Y (Fig. 229).

Es ist

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2),$$

nach Fig. 229 aber

$$\varrho = x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha,$$

also

$$\varrho^2 = x^2 \cdot \sin^2 \alpha + y^2 \cdot \cos^2 \alpha - x \cdot y \cdot \sin 2\alpha,$$

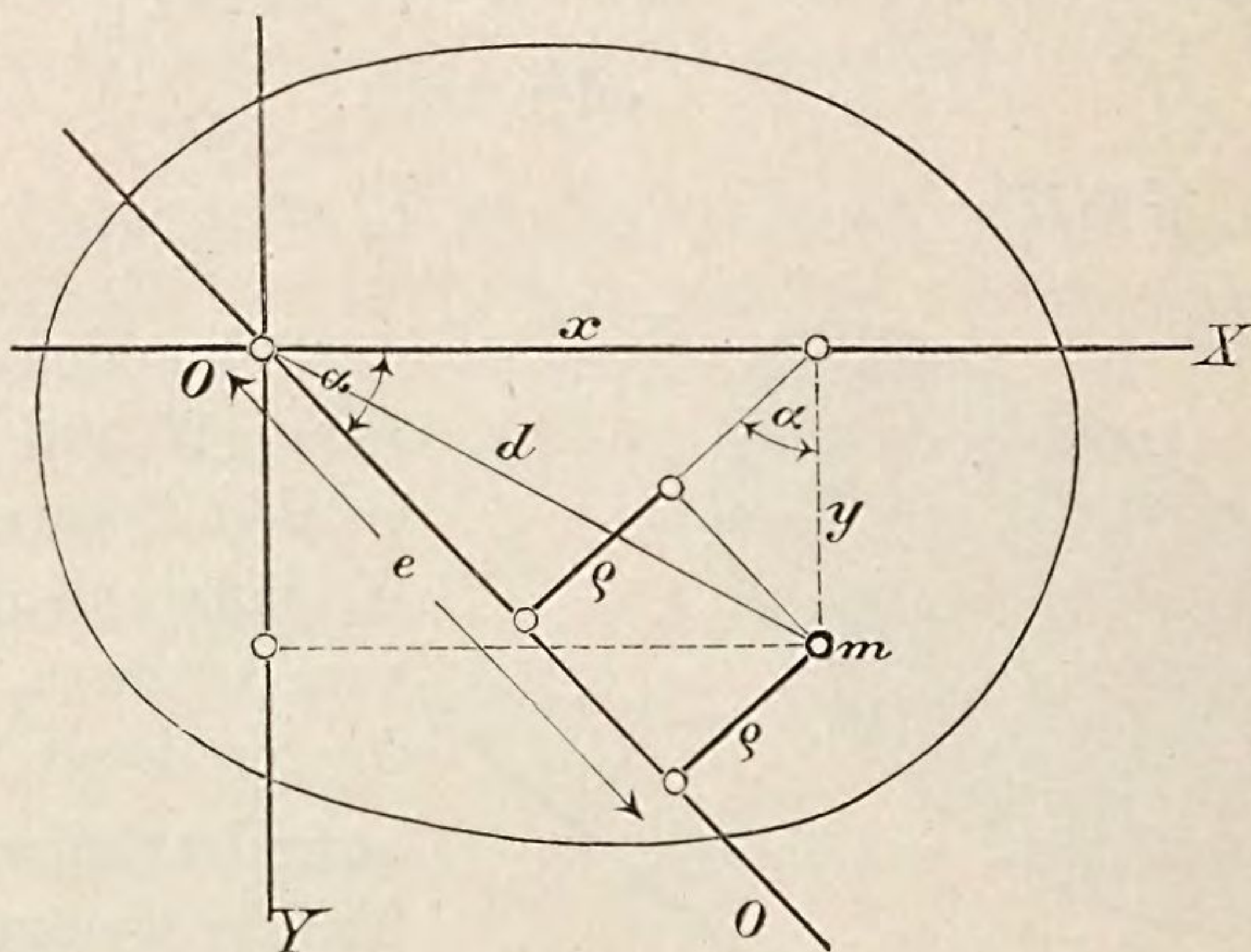


Fig. 229.

und nach der Einsetzung dieses Werthes wird

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2) = \Sigma(m \cdot x^2) \cdot \sin^2 \alpha + \Sigma(m \cdot y^2) \cdot \cos^2 \alpha - \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot \sin 2\alpha$$

oder, da

$$\Sigma(m \cdot x^2) = T_y \text{ und } \Sigma(m \cdot y^2) = T_x \text{ ist,}$$

$$T_0 = T_y \cdot \sin^2 \alpha + T_x \cdot \cos^2 \alpha - \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot \sin 2\alpha.$$

Ein Maximum oder ein Minimum wird dieser Werth für

$$\frac{dT_0}{d\alpha} = 0, \text{ also für}$$

$$0 = 2 \cdot T_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot T_x \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot \cos 2\alpha;$$

hieraus ergibt sich aber

$$(T_y - T_x) \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot \cos 2\alpha$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y)}{T_y - T_x}.$$

Spezieller Fall: Wird

$$\Sigma(m \cdot x \cdot y) = 0,$$

was eintritt, wenn die X - oder die Y -Achse eine Symmetrieachse des Körpers wird, dann wird nach der vorstehenden Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$$

oder

$$\alpha = 0,$$

d. h. aber: die X -Achse und die O -Achse fallen zusammen, und es wird

$$T_0 = T_x$$

ein Maximal- oder ein Minimal-Trägheitsmoment.

Geometrische Darstellung des Gesetzes für die Aenderung des Trägheitsmomentes T_0 mit der Aenderung des Neigungswinkels α der Drehachse OO zur X -Achse.

Analog den „statischen Momenten“ können Trägheitsmomente durch gerade auf den zugehörigen Drehachsen abzutragende Linien dargestellt werden. Geschieht dies vom Ursprung O aus für „alle Trägheitsmomente eines Körpers bezogen auf die unter den beliebigen Winkeln α zur X -Achse geneigten Drehachsen“, so erhält man als Begrenzung jener Linien eine Curve, welche ihrer Form nach genauer zu bestimmen ist.

Es ist nun zulässig und für die Untersuchung bequem, statt des Trägheitsmomentes T_0 selbst die Funktion

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{T_0}}$$

desselben von dem Ursprung O aus auf die zugehörige Drehachse als „gerade Achse“ aufzutragen; weshalb sich für die Coordinaten x_1 und y_1 (Fig. 230) des Endpunktes der Geraden die Werthe

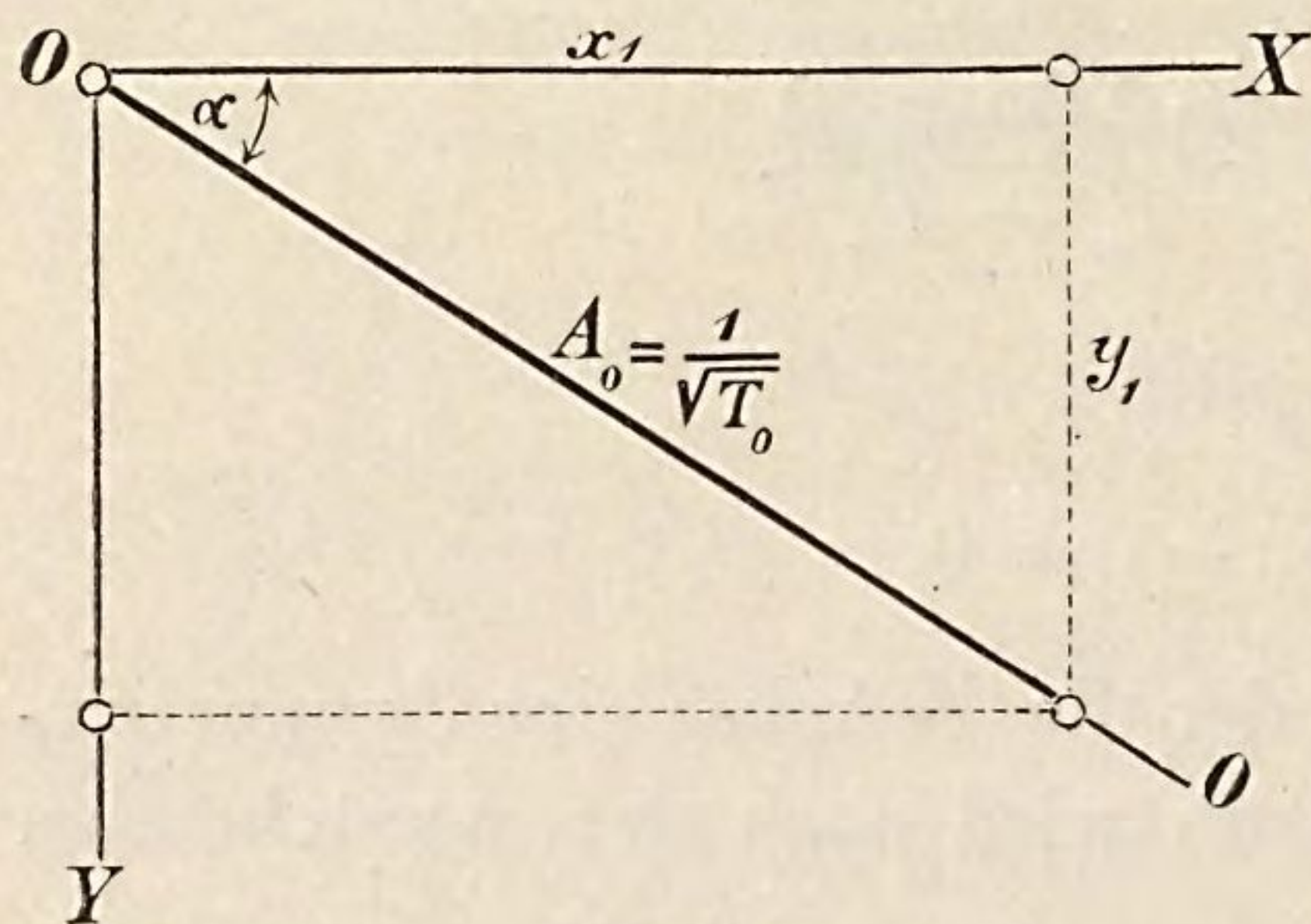


Fig. 230.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \cos \alpha$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \sin \alpha$$

ergeben, aus welchen folgt

$$\cos \alpha = x_1 \cdot \sqrt{T_0},$$

$$\sin \alpha = y_1 \cdot \sqrt{T_0}.$$

Setzt man diese Werthe ein in die allgemeine Gleichung des Trägheitsmomentes T_0 , so folgt

$$T_0 = T_y \cdot T_0 \cdot y_1^2 + T_x \cdot T_0 \cdot x_1^2 - 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot T_0$$

oder

$$1 = T_x \cdot x_1^2 + T_y \cdot y_1^2 - 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot x_1 \cdot y_1,$$

welche Gleichung durch ihre Form erkennen lässt, dass sie die Mittelpunkts Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt O ist.

Wird die X - oder die Y -Achse Symmetrieachse, also

$$\Sigma(m \cdot x \cdot y) = 0,$$

so werden nach Obigem die Trägheitsmomente des Körpers, bezogen auf jene Achsen, ein Maximum und ein Minimum, auch fallen infolgedessen die kleine und grosse Achse der Trägheitsellipse mit den Coordinaten- resp. den Dreh-Achsen zusammen.

Es gilt dann für die sogenannte Trägheitsellipse die Gleichung

$$1 = T_x \cdot x_1^2 + T_y \cdot y_1^2,$$

in welcher nunmehr

$$T_x \text{ und } T_y$$

die „Hauptträgheitsmomente“ in Bezug auf die „Hauptachsen X und Y “ genannt werden.

Kennt man die Lagen der Hauptachsen X und Y und die Hauptträgheitsmomente T_x und T_y , so kann man für jede andere durch den Ursprung O laufende unter einem Winkel α zur X -Achse geneigte Achse OO (Fig. 229) das Trägheitsmoment T_0 einfacher berechnen durch

$$T_0 = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \sin^2 \alpha.$$

Die Achsen der Hauptträgheitsmomente sind

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{T_x}},$$

$$A_y = \frac{1}{\sqrt{T_y}},$$

die Hauptträgheitsmomente hingegen finden sich aus den Achsen durch

$$T_x = \frac{1}{A_x^2}$$

und
$$T_y = \frac{1}{A_y^2};$$

das Trägheitsmoment des Körpers für jede unter α zur X -Achse geneigte Drehachse ist aber

$$T_0 = \frac{1}{A_0^2},$$

woraus folgt, dass „je grösser die Achse A_0 ist, desto kleiner ist das Trägheitsmoment T_0 , bezogen auf die zugehörige Drehachse O .“

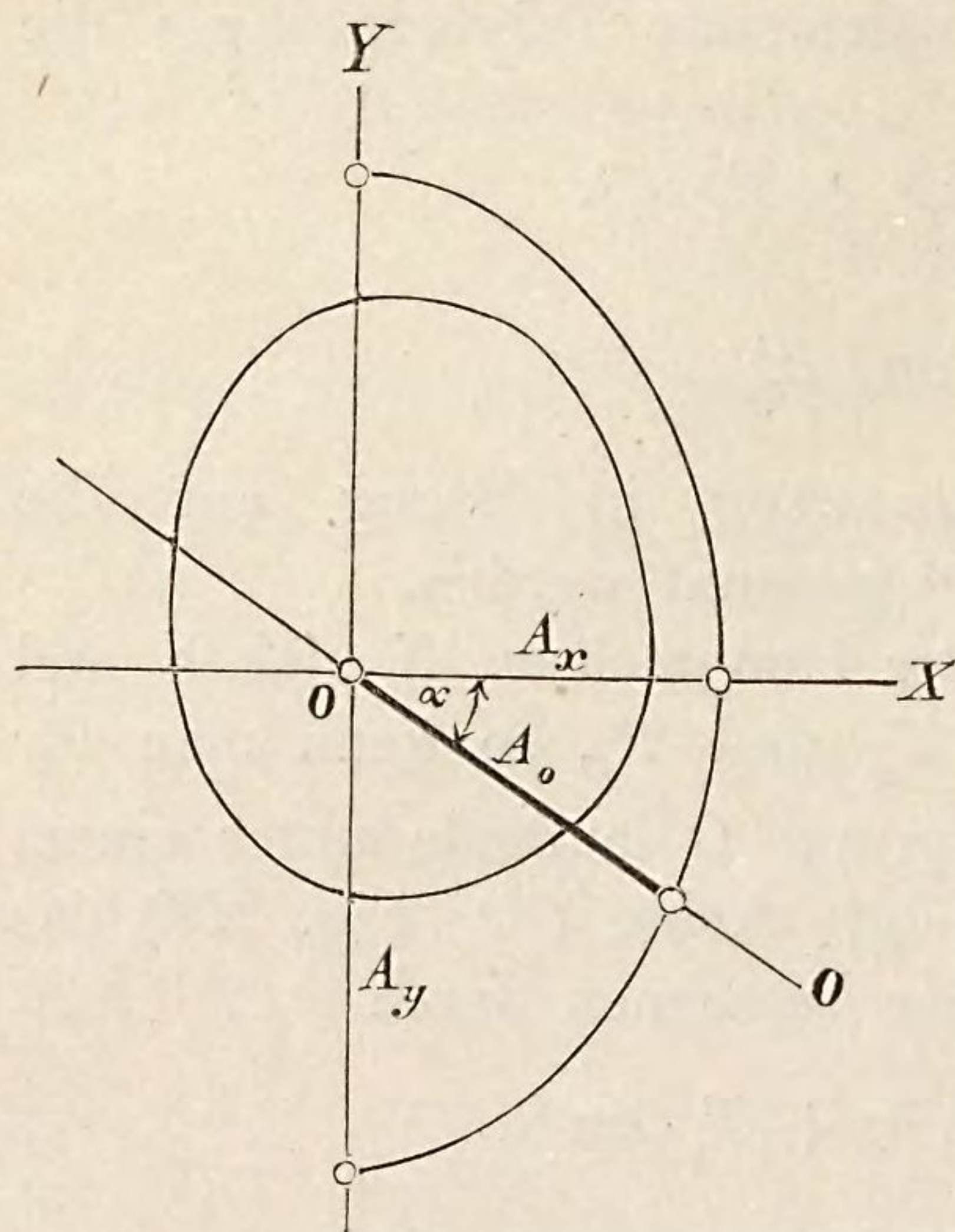


Fig. 231.

Angenommen, das Hauptträgheitsmoment T_x sei ein Maximalwerth, dann entspricht der X -Achse die kleinere Achse A_x und der Y -Achse die grössere Achse A_y , wie Fig. 231 zeigt.

Spezieller Fall: Fällt der Ursprung der X - und Y -Achse mit dem Körperschwerpunkt S (Fig. 232) zusammen, dann nennt man die Trägheitsellipse

„Central-Ellipse“,

und alle Trägheitsmomente bezogen auf die in der XY -Ebene liegenden durch S laufenden Achsen sind dann allgemein

$$T_s = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \sin^2 \alpha;$$

während sich mit Rücksicht auf Fig. 232 das Trägheitsmoment T_0 , bezogen auf eine zur S -Achse parallele in der XY -Ebene liegende O -Achse, ergibt durch

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2.$$

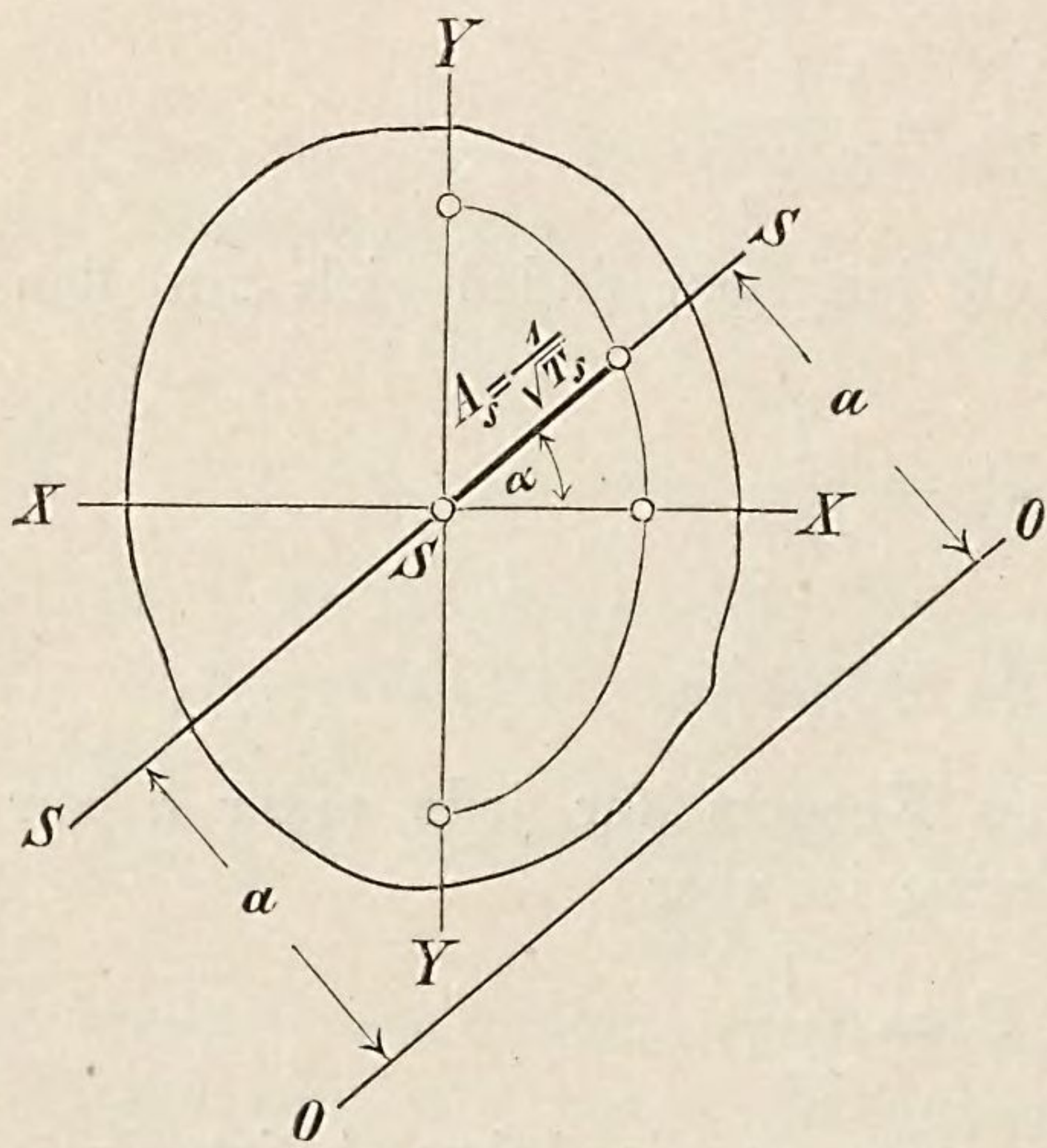


Fig. 232.

d) Bestimmung „des Trägheitsmomentes T_0 eines Körpers, bezogen auf eine beliebig im Raum gerichtete durch den Schnittpunkt O von drei rechtwinklig aufeinander stehenden Coordinatenachsen X, Y, Z laufende Drehachse OO' “, durch „die Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z , bezogen auf jene Achsen“ (Fig. 233).

Der vorliegende Fall bildet nur eine Verallgemeinerung des vorhergehenden Falles.

Allgemein ist, wenn ϱ den senkrechten Abstand eines Massenelementes m von der O -Achse bedeutet,

$$T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

und nach Fig. 233

$$\varrho^2 = d^2 - e^2.$$

Ferner ist

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$e = d \cdot \cos \varphi.$$

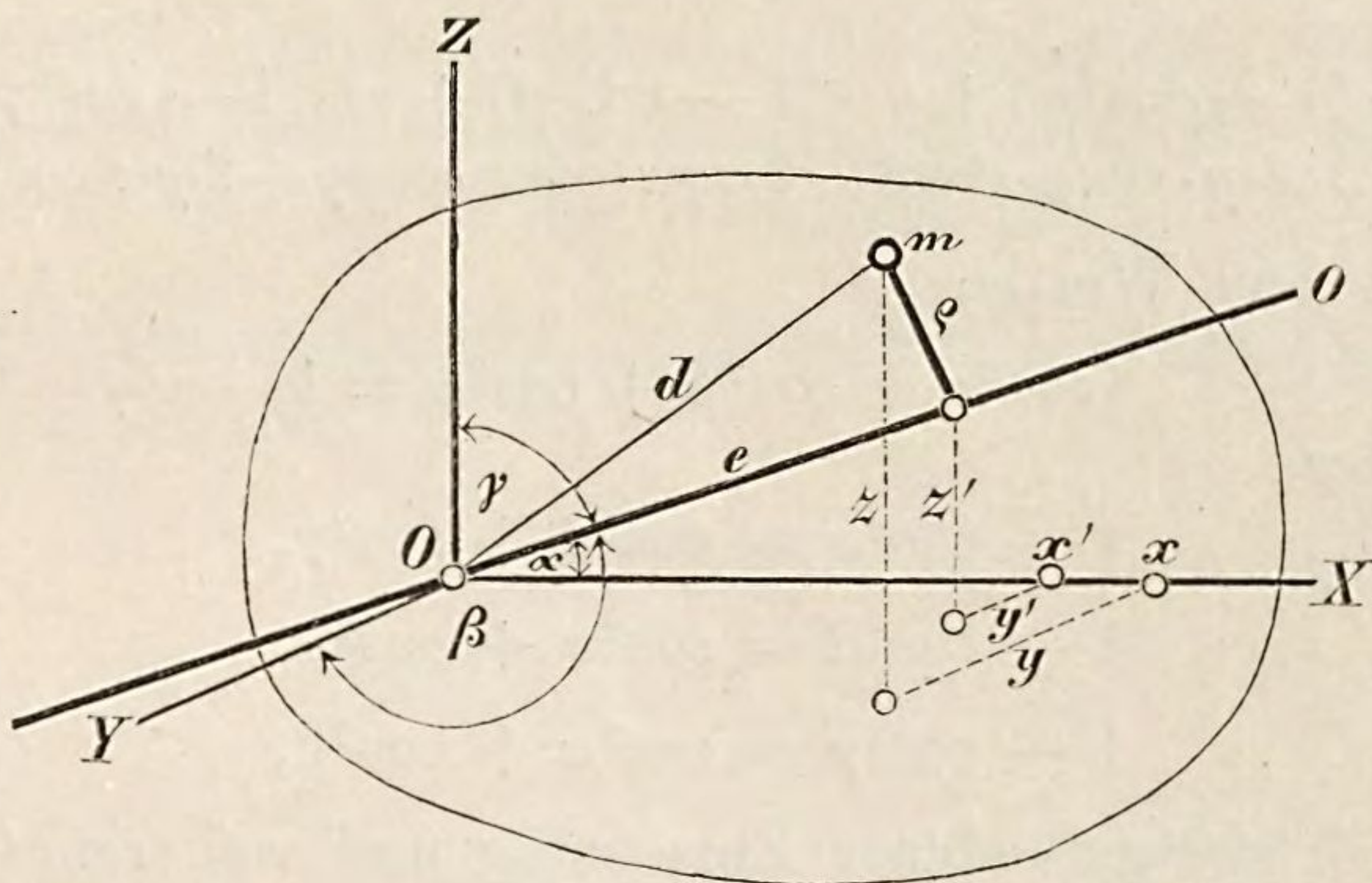


Fig. 233.

Der letzte Werth, in welchem φ den Winkel zwischen d und e bedeutet, ist auszudrücken durch die Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes m , durch d und die Neigungswinkel α, β, γ der Drehachse OO' zu den Achsen X, Y, Z .

Hierzu ist

$$\varrho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

ferner

$$e^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

also

$$\varrho^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot (x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z').$$

Ausserdem gilt aber auch

$$\varrho^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos \varphi,$$

folglich ist

$$d \cdot e \cdot \cos \varphi = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z',$$

$$d \cdot \cos \varphi = x \cdot \frac{x'}{e} + y \cdot \frac{y'}{e} + z \cdot \frac{z'}{e}$$

oder mit Bezug auf Fig. 233

$$e = (d \cdot \cos \varphi) = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma.$$

Nach Einsetzung der Werthe folgt

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma)^2$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho^2 = & x^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + y^2 \cdot (1 - \cos^2 \beta) + z^2 \cdot (1 - \cos^2 \gamma) - \\ & - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2 \cdot x \cdot z \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Aus dem Werthe

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

ist weiter

$$1 - \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

$$1 - \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma,$$

$$1 - \cos^2 \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta,$$

und nach stattgefunderer Einsetzung und weiterem Ordnen nach den Quadraten der Winkelfunctionen ist

$$\begin{aligned} \varrho^2 = & (y^2 + z^2) \cdot \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cdot \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cdot \cos^2 \gamma - \\ & - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot x \cdot y - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot x \cdot z - 2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot y \cdot z; \end{aligned}$$

somit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} T_0 = \Sigma(m \cdot \varrho^2) = & \Sigma[m \cdot (y^2 + z^2)] \cdot \cos^2 \alpha + \Sigma[m \cdot (x^2 + z^2)] \cdot \cos^2 \beta \\ & + \Sigma[m \cdot (x^2 + y^2)] \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \\ & - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot z) - 2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \Sigma(m \cdot y \cdot z). \end{aligned}$$

Hierin bedeuten

$$\Sigma[m \cdot (y^2 + z^2)] = \Sigma(m \cdot \varrho_x^2) = T_x,$$

$$\Sigma[m \cdot (x^2 + z^2)] = \Sigma(m \cdot \varrho_y^2) = T_y,$$

$$\Sigma[m \cdot (x^2 + y^2)] = \Sigma(m \cdot \varrho_z^2) = T_z$$

die Trägheitsmomente des Körpers bezogen je auf die X-, Y- und Z-Achse.

Kennt man diese Grössen und ausserdem auch die Ausdrücke $\Sigma(m \cdot x \cdot y)$, $\Sigma(m \cdot x \cdot z)$ und $\Sigma(m \cdot y \cdot z)$, dann kann für jede beliebige durch ihre Neigungswinkel α , β , γ gegebene Drehachse OO das zugehörige Trägheitsmoment des Körpers berechnet werden durch

$$T_0 = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \cos^2 \beta + T_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \\ - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot z) - 2 \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \Sigma(m \cdot y \cdot z).$$

Graphische Darstellung des Gesetzes für die Aenderung der Trägheitsmomente mit der Aenderung der Richtung der Drehachse.

Trägt man wieder auf die zugehörigen Drehachsen von O aus die Werthe

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{T_0}}$$

auf (Fig. 234), so folgt

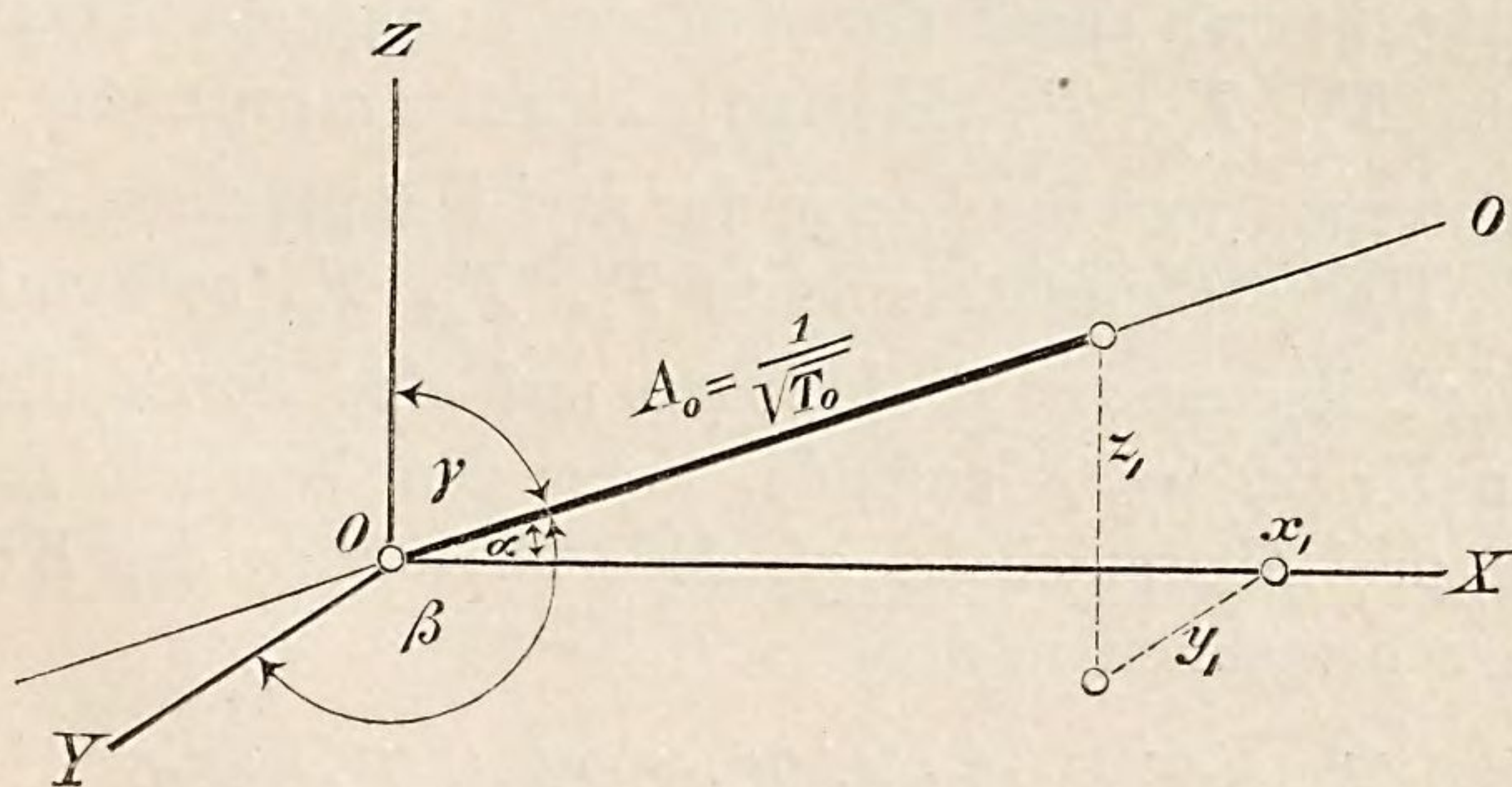


Fig. 234.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \cos \alpha,$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \cos \beta,$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \cdot \cos \gamma$$

oder

$$\cos \alpha = x_1 \cdot \sqrt{T_0},$$

$$\cos \beta = y_1 \cdot \sqrt{T_0}$$

und $\cos \gamma = z_1 \cdot \sqrt{T_0}.$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung für T_0 folgt

$$1 = T_x \cdot x_1^2 + T_y \cdot y_1^2 + T_z \cdot z_1^2 - 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot y) \cdot x_1 \cdot y_1 \\ - 2 \cdot \Sigma(m \cdot x \cdot z) \cdot x_1 \cdot z_1 - 2 \cdot \Sigma(m \cdot y \cdot z) \cdot y_1 \cdot z_1,$$

die Gleichung für die Oberfläche eines Ellipsoides, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung O zusammenfällt.

Wählt man nun die drei Achsen des Ellipsoides als Coordinatenachsen, dann werden die letzten drei Werthe obiger Gleichung Null, und es folgt einfacher

$$1 = T_x \cdot x_1^2 + T_y \cdot y_1^2 + T_z \cdot z_1^2,$$

wobei die zugehörigen „drei“ Coordinatenachsen X, Y, Z „Hauptachsen“ und die auf sie bezogenen Trägheitsmomente T_x, T_y, T_z „Hauptträgheitsmomente“ sind.

Kennt man nun die Lagen der drei Hauptachsen X, Y, Z und die Hauptträgheitsmomente T_x, T_y, T_z , so kann man das Trägheitsmoment T_0 bezogen auf eine durch den beliebigen Ursprung O laufende, unter den Winkeln α, β, γ zu den drei Hauptachsen geneigte Drehachse des Körpers einfacher berechnen nach

$$T_0 = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \cos^2 \beta + T_z \cdot \cos^2 \gamma.$$

Spezieller Fall:

Fällt der Ursprung O mit dem Körperschwerpunkt zusammen, dann heisst das Trägheits-Ellipsoid

„Central-Ellipsoid“

und jeder Radiusvector in demselben liefert die Achse

$$A_s = \frac{1}{\sqrt{T_s}}$$

des Trägheitsmomentes T_s bezogen auf die mit jenem Vector zusammenfallende durch den Schwerpunkt laufende Drehachse.

Es gilt also

$$T_s = \frac{1}{A_s^2},$$

und für eine beliebige zu jenem Vector parallele Drehachse OO ergibt sich dann das Trägheitsmoment

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2.$$

Das Centralellipsoid wird eine Kugel, wenn die drei Hauptträgheitsmomente gleich gross werden, und ein Rotationsellipsoid, wenn zwei der drei Hauptachsen gleich gross ausfallen.

e) Trägheitshalbmesser.

Man kann dem Trägheitsmoment

$$T = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

bezogen auf eine Rotationsachse O des Körpers auch eine einfachere Form geben, indem man einen constanten Drehungshalbmesser ϱ und die wahre Masse M (Fig. 235) des Körpers einführt und schreibt

$$\Sigma(m \cdot \varrho^2) = \Sigma(m) \cdot \varrho^2$$

oder
$$T = M \cdot \varrho^2.$$

Kennt man T und M , dann ist

$$\varrho = \sqrt{\frac{T}{M}}$$

der sogenannte „Trägheitshalbmesser“ oder derjenige Abstand von der Rotationsachse, in dessen Endpunkt man

sich die ganze wahre Masse M des Körpers concentrirt zu denken hat, oder auch der Halbmesser eines Kreises, auf welchem die Masse M vertheilt ist.

Wäre nun die Drehachse eine Schwerpunktsachse, also

$$T_s = M \cdot \varrho^2,$$

dann würde für das Trägheitsmoment T_0 bezogen auf eine zur Schwerachse parallele O -Achse gelten

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2$$

oder
$$T_0 = M \cdot (\varrho^2 + a^2).$$

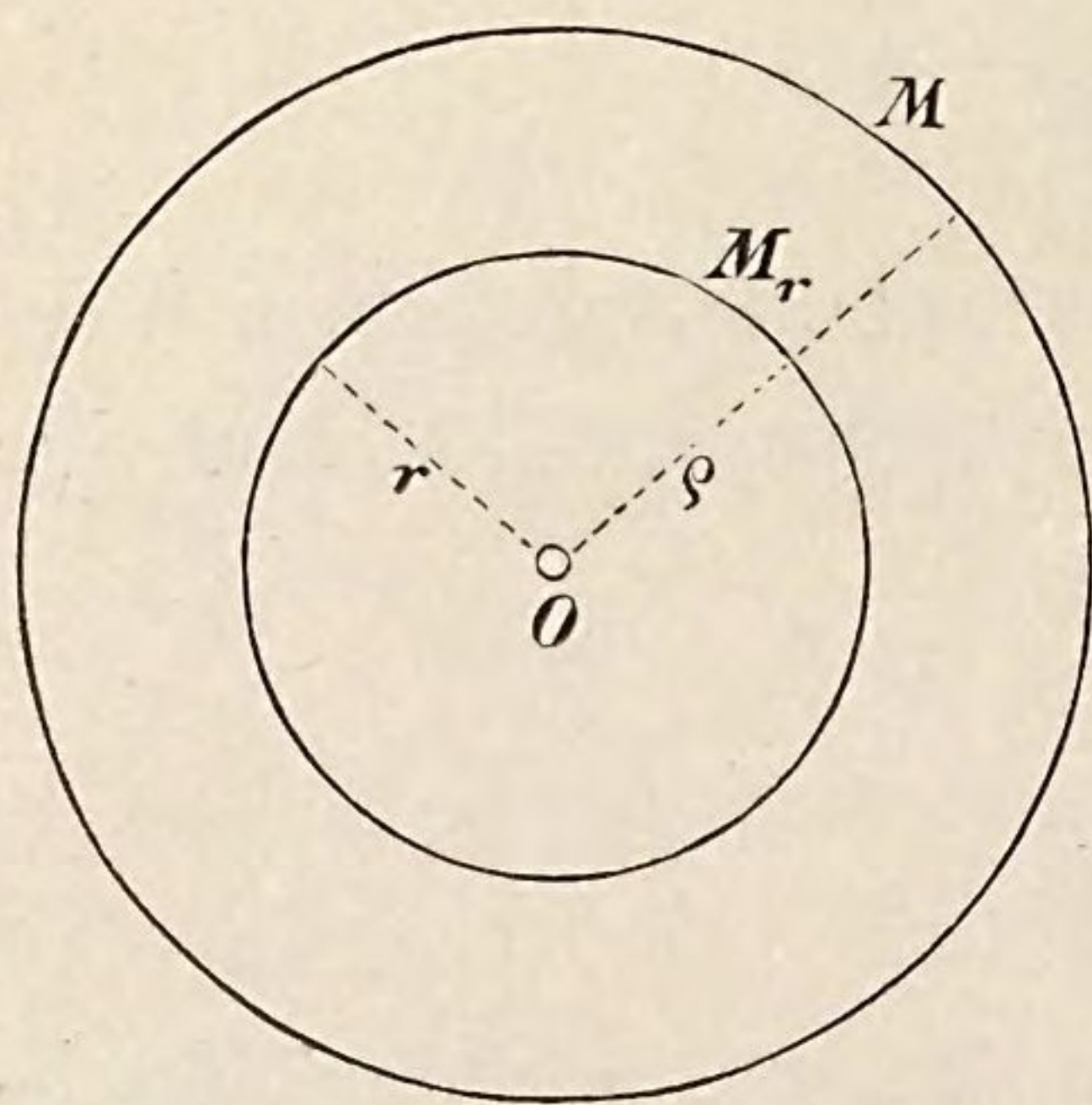


Fig. 235.

f) Reducirte Massen.

Noch kann man das Trägheitsmoment bezogen auf eine beliebige O -Achse auch schreiben

$$T = M \cdot \varrho^2 = M_r \cdot r^2,$$

d. h. dasselbe ausdrücken durch einen beliebigen Drehungshalbmesser r und eine Massengrösse M_r , welche von der wahren Masse M verschieden ist.

Ist r gegeben oder gewählt worden, dann findet sich jene „auf einen Kreis vom Halbmesser r reducirte Masse“ durch

$$M_r = M \cdot \frac{\varrho^2}{r^2}$$

oder
$$M_r = \frac{T}{r^2}.$$

Spezieller Fall:

Setzt man

$$r = 1,$$

dann ist

$$T = M_r,$$

d. h. man kann dem Trägheitsmomente eines Körpers auch die Bedeutung „derjenigen Masse“ geben, welche man in der Entfernung „Eins“ von der Drehachse anordnen müsste, um dieselbe Wirkung zu erzeugen wie durch $\Sigma(m \cdot \varrho^2)$.

5.

Centrifugalkräfte und das Centrifugalmoment eines Körpers.

Soll sich ein materieller Punkt ungleichförmig in einem Kreise bewegen, so muss — wie früher gezeigt wurde — eine Kraft auf ihn wirken, deren Tangentialkomponente die Geschwindigkeit und deren (nach dem Kreismittelpunkt gerichtete) Normalkomponente die Bewegungsrichtung ändert, oder deren Tangentialkomponente gleich und entgegengesetzt dem tangentialen und deren Normalkomponente (die „Centripetalkraft“) gleich und entgegengesetzt dem normalen Trägheitswiderstande (der sogenannten „Centrifugalkraft“) ist.

Dreht sich nun ein Körper um eine (gelagerte) Achse, so wirkt an jedem materiellen Punkte desselben eine Centrifugalkraft, und es entsteht daher die Frage nach der Totalwirkung sämtlicher Centrifugalkräfte.

Kann letztere ermittelt werden, so sind auch diejenigen Widerstände bestimmbar, welche von den Achslagern auf die Drehachse auszuüben sind. In einem speziellen Falle werden jene Widerstände gleich Null und die Lager überflüssig; man spricht dann von „freien Achsen“.

Es drehe sich der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um eine X -Achse (Fig. 236), welche den Körperschwerpunkt S nicht in sich aufnimmt, und in einem be-

liebigen Punkte O der letzteren schneide sich das rechtwinkelige Achsenpaar Y, Z .

Die Coordinaten eines im Abstände ϱ_1 von der Drehachse befindlichen materiellen Punktes m_1 sind x_1, y_1, z_1 und die Centrifugalkraft desselben wird ausgedrückt durch

$$P_1 = m_1 \cdot \varrho_1 \cdot \omega^2.$$

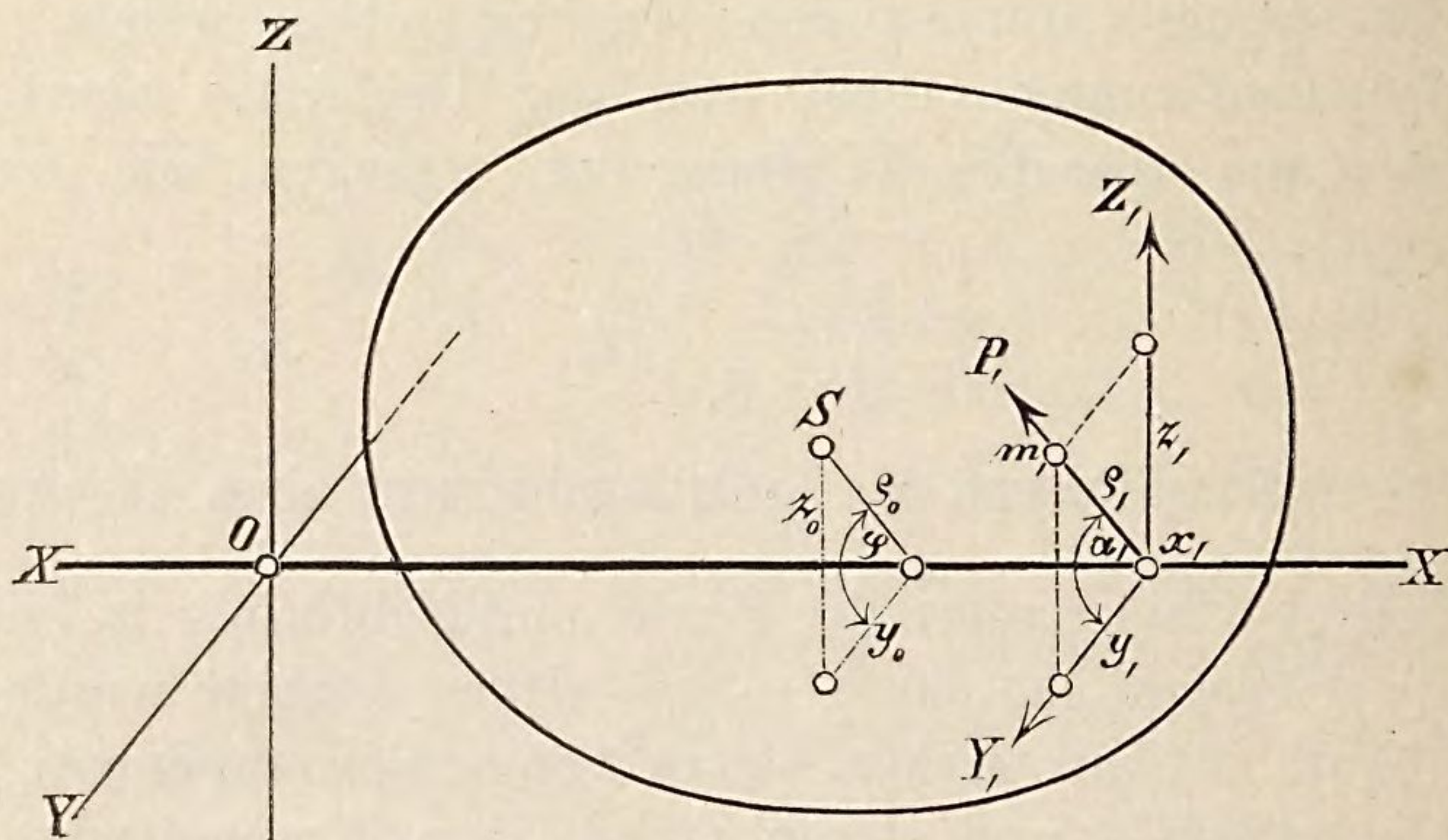


Fig. 236.

Zerlegt man letztere in die XY - und in die XZ -Ebene, so ergeben sich mit Bezug auf Fig. 236 die Componenten

$$Y_1 = m_1 \cdot \varrho_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \alpha_1$$

und

$$Z_1 = m_1 \cdot \varrho_1 \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha_1,$$

welche, da

$$\varrho_1 \cdot \cos \alpha_1 = y_1$$

und

$$\varrho_1 \cdot \sin \alpha_1 = z_1$$

ist, auch geschrieben werden können

$$Y_1 = m_1 \cdot y_1 \cdot \omega^2$$

und

$$Z_1 = m_1 \cdot z_1 \cdot \omega^2.$$

Bildet man ferner diese Componenten für die Centrifugalkräfte aller materiellen Punkte des Körpers und ausserdem die Resultirende Y in der XY - und die Resultirende Z in der XZ -Ebene, dann folgt

$$Y = \Sigma(Y) = \Sigma(m \cdot y) \cdot \omega^2 = M \cdot y_0 \cdot \omega^2$$

und

$$Z = \Sigma(Z) = \Sigma(m \cdot z) \cdot \omega^2 = M \cdot z_0 \cdot \omega^2,$$

in welchen Werthen y_0 und z_0 die Coordinaten des Körperschwerpunktes und M die ganze Masse des Körpers bedeuten.

Die Angriffspunkte der erhaltenen zwei Kräfte Y und Z mögen durch ihre resp. Abstände x' und x'' von dem Ursprung O angegeben werden, und es gilt

$$Y \cdot x' = \Sigma(Y \cdot x)$$

oder nach Einsetzung der Werthe

$$M \cdot x' \cdot y_0 = \Sigma(m \cdot x \cdot y)$$

und

$$x' = \frac{\Sigma(m \cdot x \cdot y)}{M \cdot y_0};$$

ferner ist

$$Z \cdot x'' = \Sigma(Z \cdot x),$$

$$M \cdot x'' \cdot z_0 = \Sigma(m \cdot x \cdot z)$$

und

$$x'' = \frac{\Sigma(m \cdot x \cdot z)}{M \cdot z_0},$$

welche Resultate zeigen, dass die Abstände x' und x'' im Allgemeinen verschieden von einander sind und im Uebrigen nicht mit der Abscisse des Körperschwerpunktes übereinstimmen.

Transportirt man nun sowohl die Kraft Y , als auch die Kraft Z nach dem Ursprung O , so lassen sich die Centrifugalkräfte zurückführen auf eine einzige in O durch die Drehachse laufende Kraft

$$R = \sqrt{Y^2 + Z^2} = M \cdot \varrho_0 \cdot \omega^2 = \frac{G}{g} \cdot \varrho_0 \cdot \omega^2$$

und auf ein durch seine Achse ausgedrücktes Kräftepaar

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \sqrt{\mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2} \\ &= \sqrt{(Z \cdot x'')^2 + (Y \cdot x')^2} \\ &= \omega^2 \cdot \sqrt{\{\Sigma(m \cdot x \cdot y)\}^2 + \{\Sigma(m \cdot x \cdot z)\}^2}, \end{aligned}$$

in welchem letzterem Ausdruck man die Grössen von der Form

$$\begin{array}{c} m \cdot x \cdot y \\ \text{oder} \\ m \cdot x \cdot z \end{array}$$

mit dem Namen „Centrifugalmoment“ belegt.

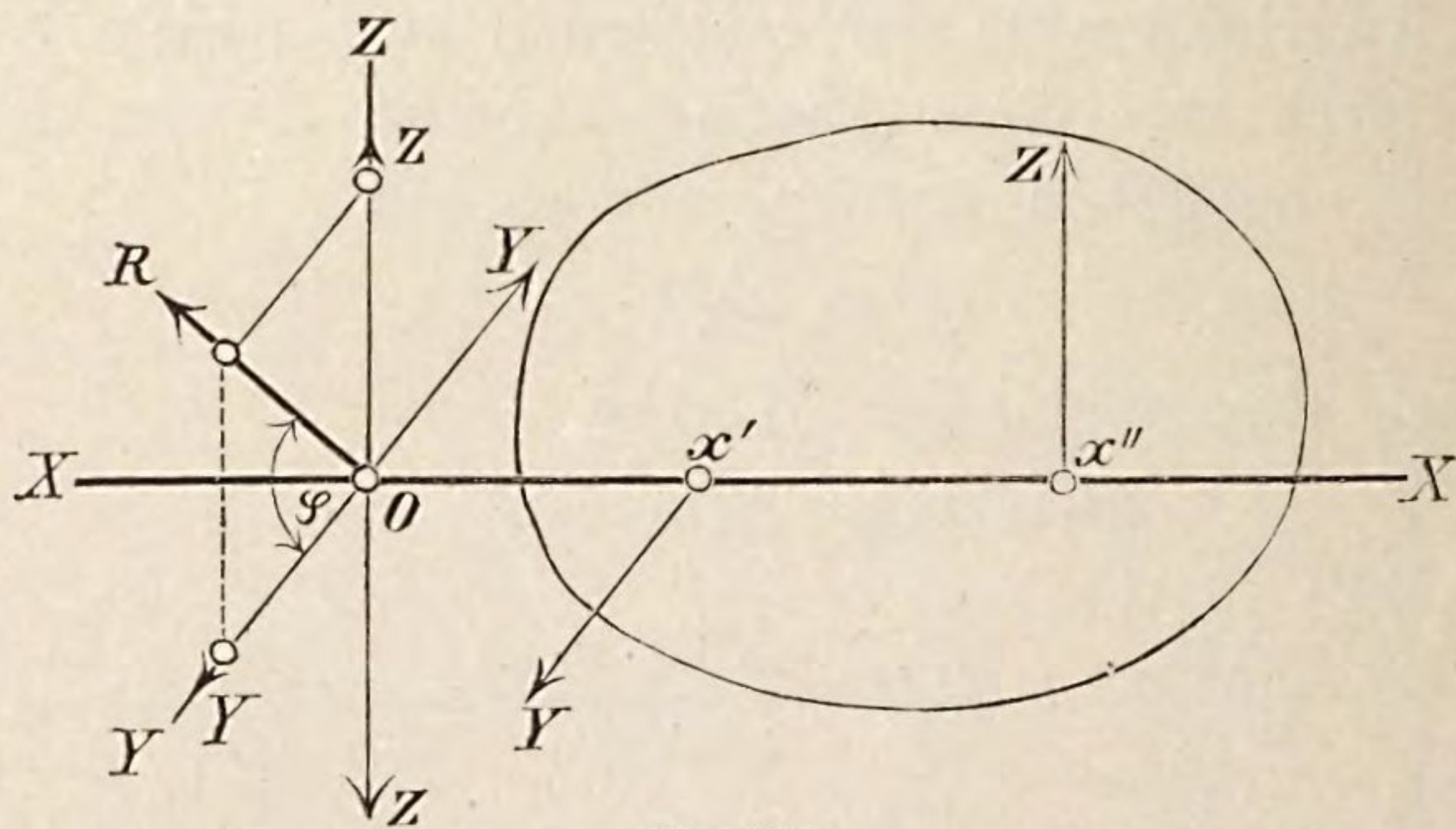


Fig. 237.

Die Richtung der Centrifugalkraft R findet sich mit Bezug auf Fig. 237 durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{Y} = \frac{M \cdot z_0 \cdot \omega^2}{M \cdot y_0 \cdot \omega^2} = \frac{z_0}{y_0},$$

und es ergibt sich hieraus und nach Fig. 236, dass diese Richtung mit der des Schwerpunktsabstandes ϱ_0 übereinstimmt.

Die Richtung der Achse des resultierenden Centrifugalmomentes $\mathfrak{M}$ wird in gleicher Weise gefunden durch

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\mathfrak{M}_z}{\mathfrak{M}_y}.$$

Da nun der Ursprung O ganz beliebig gewählt werden durfte, so kann und soll nun derselbe so gelegt werden, dass die YZ -Ebene den Schwerpunkt S in sich aufnimmt (Fig. 238), und man kann dann sagen, „dass die Centrifugalkräfte der Elemente eines Körpers im Allgemeinen ersetzt werden können durch eine durch die Drehachse X und den Körperschwerpunkt S laufende Centrifugalkraft R “

und durch ein Kräftepaar $\mathfrak{M}$, dessen Drehebene die Drehachse des Körpers in sich aufnimmt“.

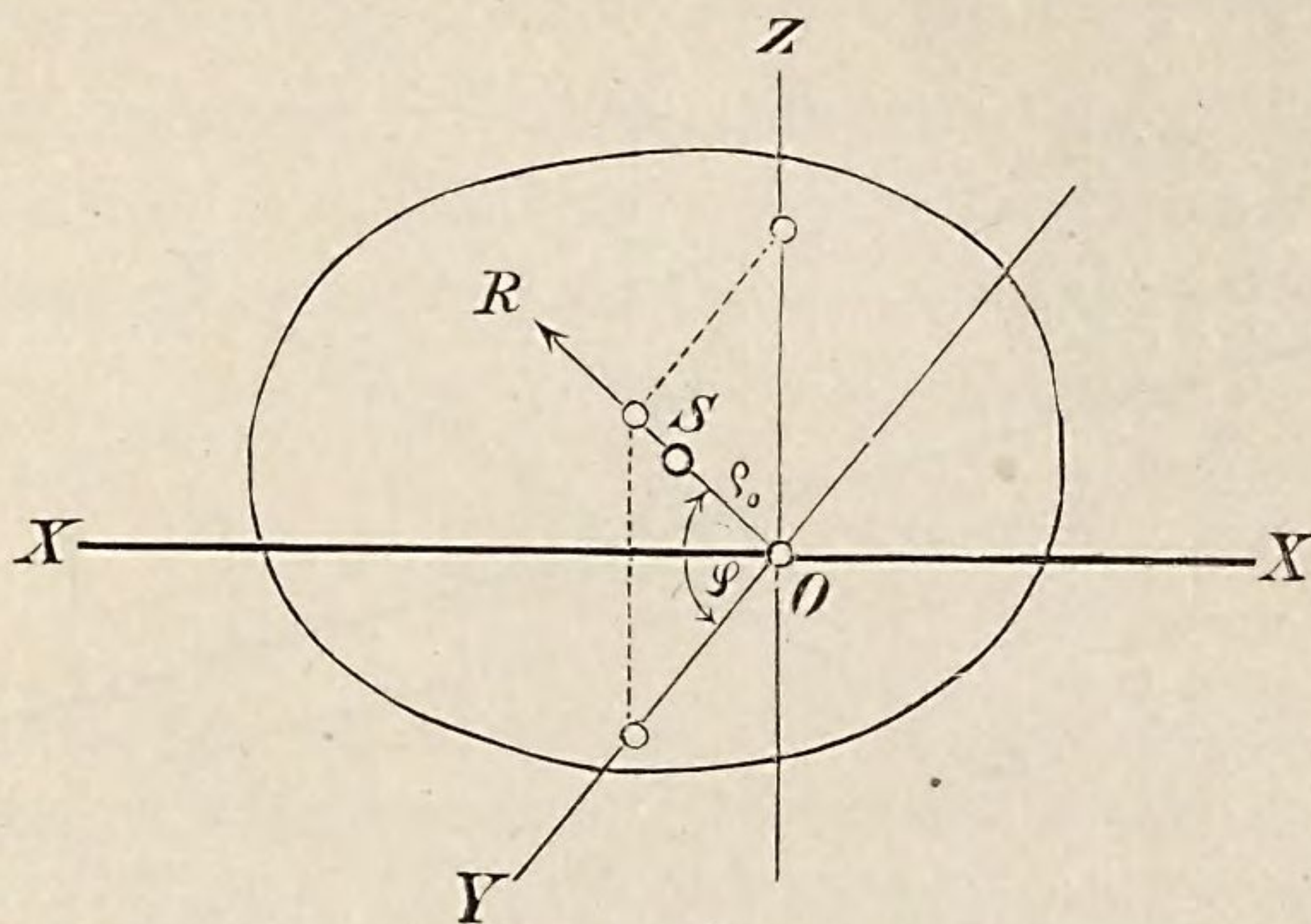


Fig. 238.

Als besondere Fälle sind folgende zu verzeichnen:

$$1) \sum(m \cdot x \cdot y) = 0 \quad \text{und} \quad \sum(m \cdot x \cdot z) = 0;$$

wodurch

$$x' = x'' = 0$$

und

$$\mathfrak{M} = 0$$

wird, die Kräfte Y und Z in die durch den Schwerpunkt S laufende YZ -Ebene fallen und daselbst nur die durch den Schwerpunkt laufende Resultierende

$$R = M \cdot \varrho_0 \cdot \omega^2$$

ergeben.

Obige Centrifugalmomente werden aber Null, ohne dass $\varrho_0 = 0$ wird, wenn

a) $x = 0$ wird, wenn die Masse in eine zur Drehachse normale Ebene oder unendlich dünne Platte zu liegen kommt (Fig. 239).

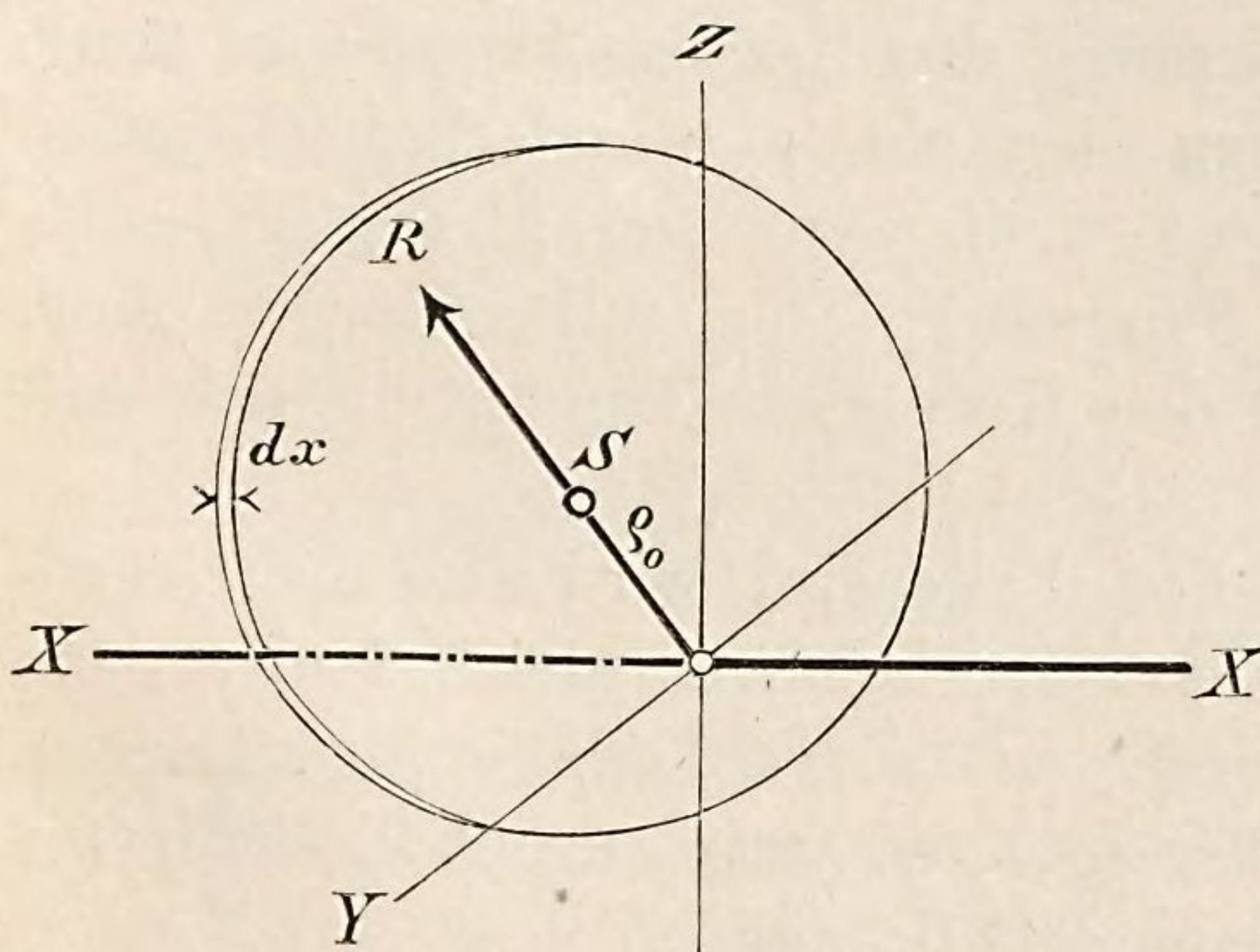


Fig. 239.

b) wenn einem jeden $+x$ ein $-x$ entspricht, d. h. wenn die YZ -Ebene eine Symmetrie-Ebene des Körpers ist (Fig. 240).

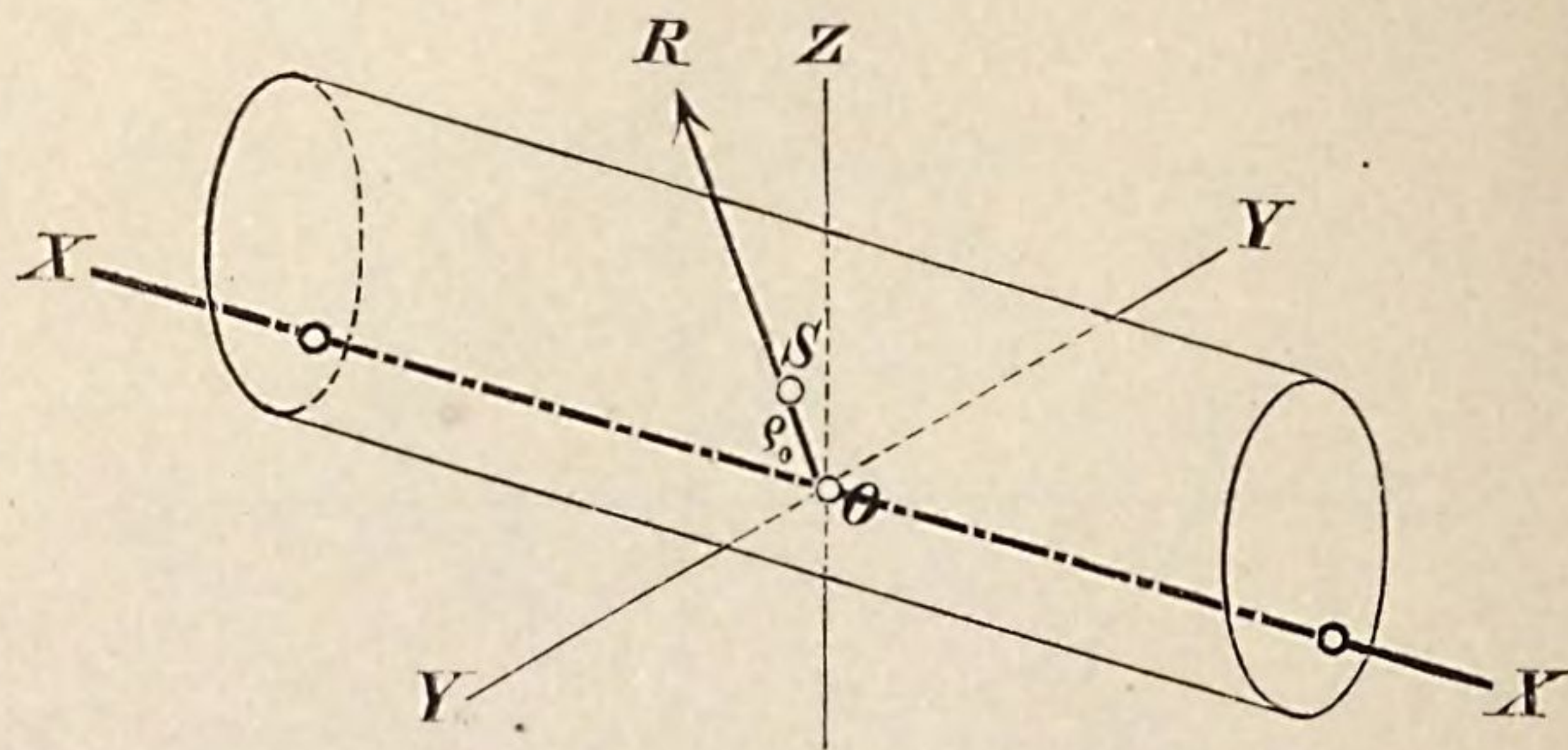


Fig. 240.

2) $\Sigma(m \cdot x \cdot y) = 0$; $\Sigma(m \cdot x \cdot z) = 0$ und $\varrho = 0$,
wodurch

$$x' = x'' = 0$$

$$\mathfrak{M} = 0$$

und $R = 0$ wird.

Die drei genannten Bedingungen werden erfüllt,

a) wenn $x = 0$ oder unendlich klein und die Drehachse X eine Schwerlinie ist;

b) wenn einem jeden $+x$ ein $-x$ entspricht, d. h. wenn die YZ -Ebene eine Symmetrie-Ebene des Körpers ist, und die Drehachse X durch den Körperschwerpunkt läuft;

c) wenn einem jeden $+y$ ein $-y$ und zugleich jedem $+z$ ein $-z$ entspricht, d. h. wenn sowohl die XZ -, als auch die XY -Ebene Symmetrie-Ebenen des Körpers sind, und die Drehachse X den Körperschwerpunkt in sich aufnimmt.

Tritt einer dieser drei Fälle ein, wird also die Centrifugalkraft und das Centrifugalmoment gleich Null, dann braucht die Drehachse keine Widerstände in den Lagern, letztere werden überflüssig, und man nennt deshalb die Drehachse im vorliegenden Falle eine

„freie Achse“.

Die Schwerlinien (diejenigen Linien, welche die Schwerpunkte aller Parallelschnitte in sich aufnehmen) homogener prismatischer Körper sind stets freie Achsen.

3) Liegen die Schwerpunkte der senkrecht zur Drehachse genommenen Elemente in einer mit der letzteren in der Entfernung ϱ_0 parallel laufenden Geraden, so ist zu setzen

$$M \cdot \varrho_0 \cdot x = \Sigma(m \cdot x) \cdot \varrho_0$$

oder

$$x = \frac{\Sigma(m \cdot x)}{M} = x_0,$$

dann läuft, wie schon unter 1b) gezeigt wurde, die allein vorhandene Centrifugalkraft durch den Schwerpunkt.

Liegen jedoch sämtliche Schwerpunkte der Körperelemente in beliebigen Abständen ϱ von der Drehachse in einer die letztere in sich aufnehmenden Ebene, so bilden die Centrifugalkräfte ein System von Parallelkräften, welche sich in der Regel zu einer einzigen Resultirenden vereinigen lassen.

Ihr Angriffspunkt ist aber im vorliegenden Falle zu ermitteln nach

$$M \cdot \varrho_0 \cdot x = \Sigma(m \cdot \varrho \cdot x)$$

oder

$$x = \frac{\Sigma(m \cdot \varrho \cdot x)}{M \cdot \varrho_0},$$

aus welcher Gleichung man erkennt, dass die resultierende Centrifugalkraft in diesem Falle „nicht“ durch den Körperschwerpunkt läuft.

6.

Flächengeschwindigkeit und Flächenbeschleunigung eines starren Körpers.

Das statische Moment einer auf einen freien materiellen Punkt wirkenden und parallel zu einer XY -Ebene liegenden Kraft P bezogen auf eine feste Drehachse Z konnte durch

$$P \cdot l = \frac{d(m \cdot \varrho^2 \cdot \omega)}{dt} = m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

ausgedrückt werden, wenn ϱ einen Radiusvector und φ einen Drehwinkel bedeutete (siehe „Flächengeschwindigkeit“ unter Bewegungslehre des materiellen Punktes); und es wurde in diesem Ausdrucke

$$\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right) = \varrho^2 \cdot \omega$$

die „Flächengeschwindigkeit des materiellen Punktes“ und

$$\frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

die „Flächenbeschleunigung des materiellen Punktes“ genannt.

Wurde l , der Hebelarm der Kraft, gleich Null, lag letztere also im Radiusvector, so wurde

$$\frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = 0,$$

also die Flächengeschwindigkeit — nach früherer Bezeichnung —

$$\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 2 \cdot \frac{df}{dt}$$

constant und die Bewegung des materiellen Punktes eine sogenannte „Centralbewegung“.

Wendet man nun die Gleichung „des statischen Momentes und der Flächenbeschleunigung“ auf den materiellen Punkt eines Körpers an, so ist ausser dem Momente der äusseren Kraft auch das der inneren Kraft zu berücksichtigen und statt

$$P \cdot l = P \cdot \varrho \cdot \cos \beta$$

die algebraische Summe der Momente der äusseren Kraft P und der inneren Kraft J einzuführen, also

$$P \cdot \varrho \cdot \cos \beta + J \cdot \varrho \cdot \cos \beta' = m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$$

zu setzen.

Hierin bedeuten

$$P \cdot \cos \beta = P_n$$

und $J \cdot \cos \beta' = J_n$

die zum Radiusvector senkrecht stehenden Componenten der Kräfte P und J .

Würde nun diese Gleichung für alle materiellen Punkte des Körpers gebildet, so ergibt sich durch Addition sämtlicher Gleichungen das statische Moment aller auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte — die inneren heben einander auf — bezogen auf die Z -Achse

$$\mathfrak{M}_z = \Sigma \left(m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} \right).$$

Hierin ist nun

$$\Sigma \left(m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

die „Flächengeschwindigkeit“ des Körpers und

$$\Sigma \left(m \cdot \frac{d\left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} \right)$$

die „Flächenbeschleunigung“ desselben; folglich ergibt sich der Satz,

„dass das statische Moment der auf einen Körper wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf eine beliebige Achse Z gleich ist der Flächenbeschleunigung des Körpers in Bezug auf jene Achse“.

Spezieller Fall:

Ist constant

$$\mathfrak{M}_z = 0,$$

so ist für die zugehörige Achse die Flächengeschwindigkeit

$$\Sigma \left(m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)$$

constant.

Die unter „Flächengeschwindigkeit etc. eines materiellen Punktes“ gefundene Gleichung

$$\int_0^t (P \cdot dt) \cdot l = m \cdot \left\{ \left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) - \left(\varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 \right\},$$

welche auf der linken Seite das Moment des Antriebes enthält, kann man auch auf starre Körper anwenden.

Ist $\mathfrak{M}$ das resultierende statische Moment der auf den Körper wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf eine gegebene Drehachse, ferner

$$\Sigma \left(m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 = F_0$$

die Flächengeschwindigkeit des Körpers zur Zeit Null und

$$\Sigma \left(m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = F$$

die Flächengeschwindigkeit desselben zur Zeit t , dann gilt

$$\int_0^t \mathfrak{M} \cdot dt = F - F_0,$$

und wäre im speciellen Falle das Moment

$$\mathfrak{M} \text{ constant,}$$

dann würde

$$\mathfrak{M} \cdot t = F - F_0$$

sein.

Geht der Körper ferner vom Ruhezustande aus, ist also

$$F_0 = 0,$$

dann ist

$$\mathfrak{M} \cdot t = F.$$

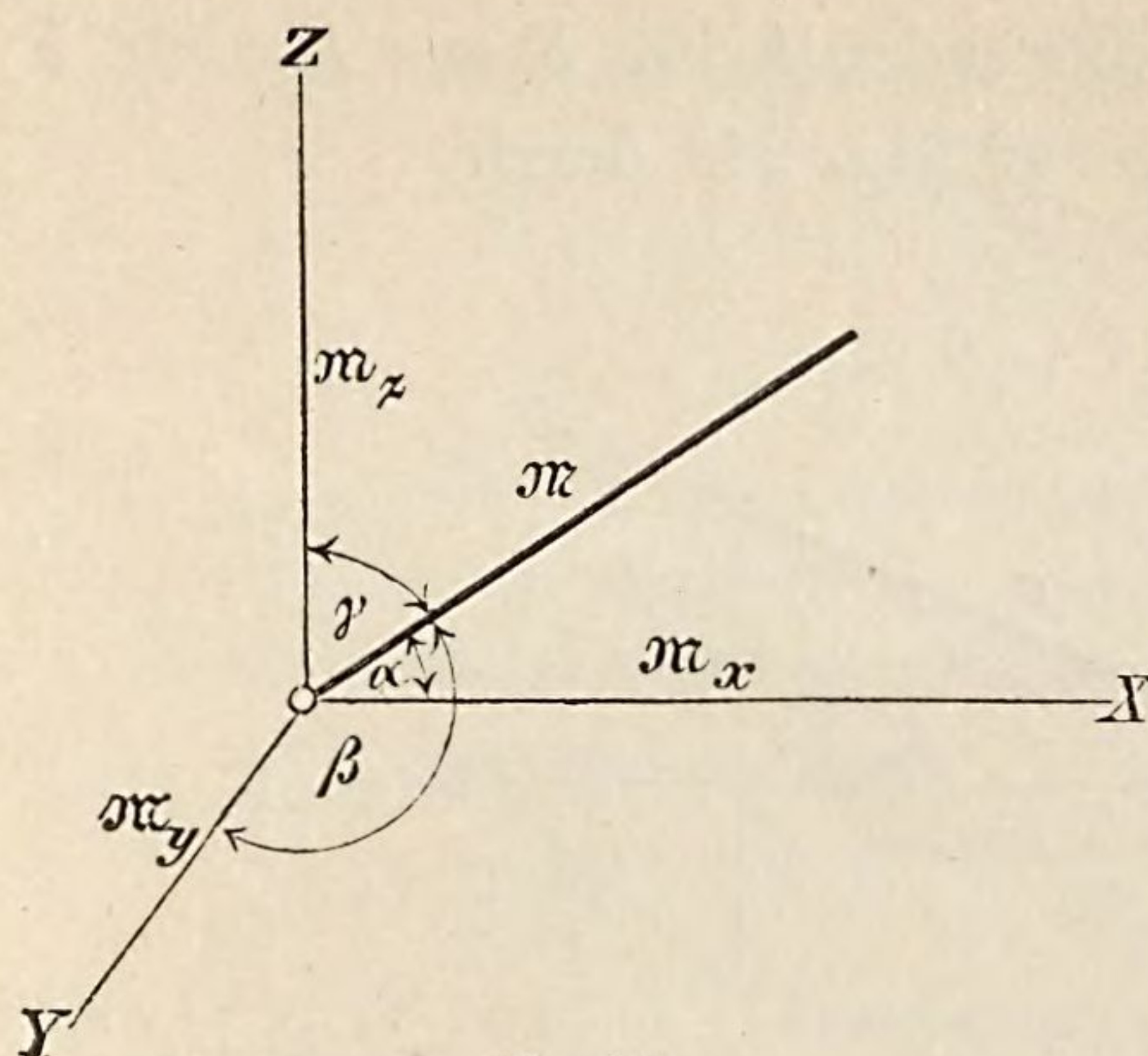


Fig. 241.

Bedeutet nun $\mathfrak{M}$ das Maximal-Moment der äusseren Kräfte resp. ihrer Resultirenden, bezogen auf die zugehörige unter den Winkeln α , β , γ zu den senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z (Fig. 241) geneigte Drehachse OO , so gilt nach Zerlegung der Achse $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{M}_x^2 + \mathfrak{M}_y^2 + \mathfrak{M}_z^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung auf beiden Seiten mit der Bewegungszeit t , so ergibt sich

$$\mathfrak{M} \cdot t = \sqrt{(\mathfrak{M}_x \cdot t)^2 + (\mathfrak{M}_y \cdot t)^2 + (\mathfrak{M}_z \cdot t)^2}.$$

Nun sind aber

$$\mathfrak{M}_x \cdot t = F_x = \Sigma(F_x),$$

$$\mathfrak{M}_y \cdot t = F_y = \Sigma(F_y),$$

$$\mathfrak{M}_z \cdot t = F_z = \Sigma(F_z)$$

die Flächengeschwindigkeiten des Körpers bezogen auf die X -, Y - und Z -Achse und $\mathfrak{M} \cdot t = F$, folglich wird durch Einsetzung der Werthe

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2};$$

woraus sich ergibt, „dass sich Flächengeschwindigkeiten ebenfalls als gerade Achsen auf die zugehörigen Drehachsen vom Ursprung O aus auftragen und ausserdem nach dem Parallelogrammgesetz behandeln lassen“.

Die Richtung der resultirenden Achse F aus F_x , F_y , F_z bestimmt sich mit Bezug auf Fig. 242 durch

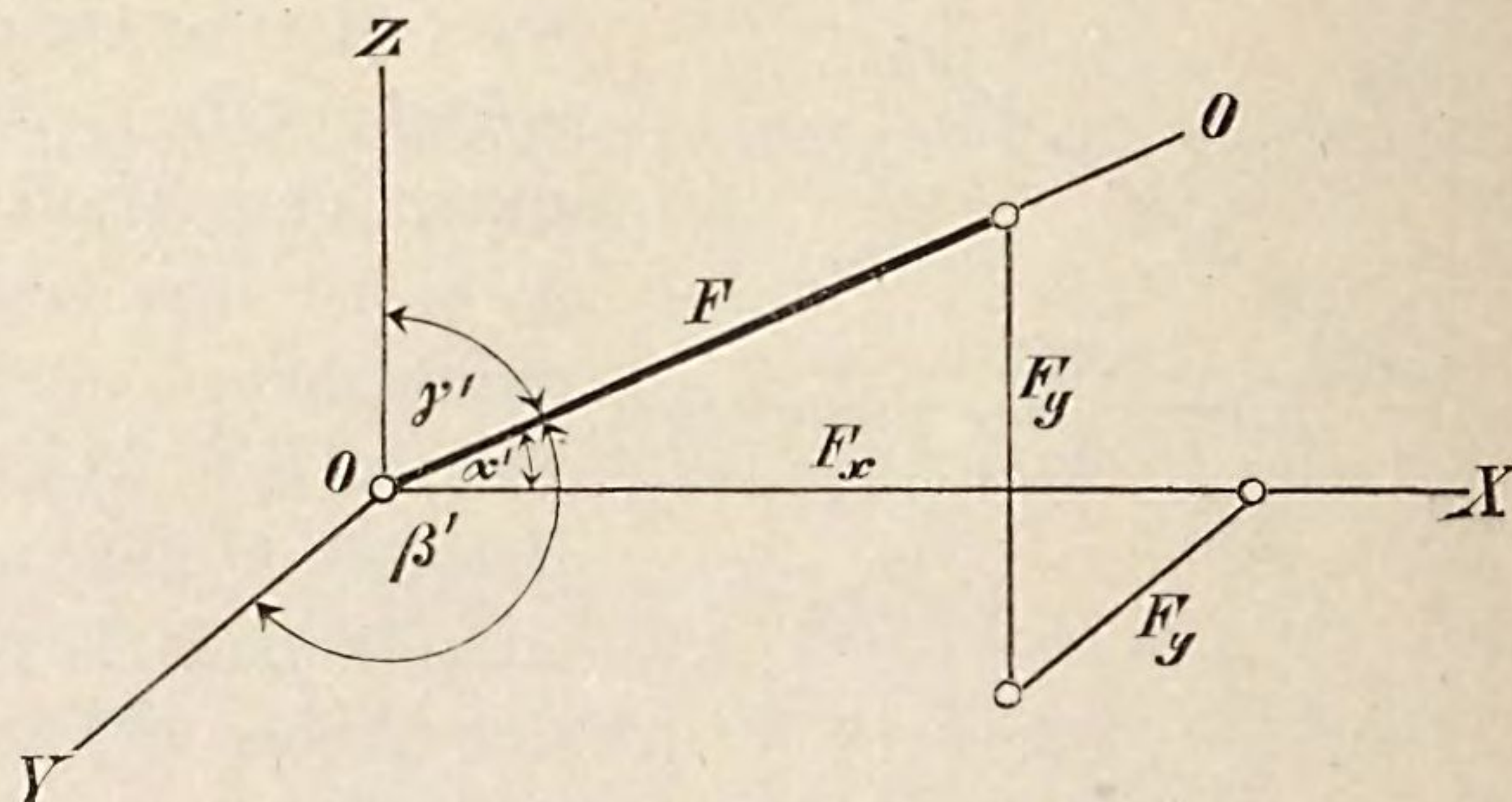


Fig. 242.

$$\cos \alpha' = \frac{F_x}{F},$$

$$\cos \beta' = \frac{F_y}{F},$$

$$\cos \gamma' = \frac{F_z}{F}.$$

Ist das statische Moment $\mathfrak{M}$ veränderlich, so ändert sich auch die Flächengeschwindigkeit F , und die vorgenannten Beziehungen gelten dann nur für ein Differential der Bewegung des Körpers.

Dem Maximalmoment $\mathfrak{M}$ entspricht nun die Maximalflächengeschwindigkeit

$$F = \mathfrak{M} \cdot t,$$

folglich giebt es bei der Veränderlichkeit der Kräfte in jedem Augenblicke der Bewegung eine bestimmte Momentenachse für das Maximalmoment $\mathfrak{M}$ und auch eine bestimmte Flächengeschwindigkeitsachse für die Maximalflächengeschwindigkeit $F = \mathfrak{M} \cdot t$.

Wie die allgemeine Form

$$F = \Sigma \left(m \cdot \varrho^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) = \Sigma (m \cdot \varrho^2) \cdot \omega \\ = T \cdot \omega$$

lehrt, kann die Flächengeschwindigkeit auch durch das Trägheitsmoment ausgedrückt werden; es lässt sich daher die Maximalflächengeschwindigkeit in irgend einem Augenblicke auch ausrechnen durch

$$F = \sqrt{(T_x \cdot \omega_x)^2 + (T_y \cdot \omega_y)^2 + (T_z \cdot \omega_z)^2},$$

wenn T_x , T_y , T_z die Trägheitsmomente und ω_x , ω_y , ω_z die Winkelgeschwindigkeiten bezogen auf die X-, Y-, Z-Achsen sind.

Spezieller Fall:

Gesetz der unveränderlichen Ebene.

Ist stets das statische Moment der äusseren Kräfte

$$\mathfrak{M} = 0,$$

so wird aus

$$\int_0^t \mathfrak{M} \cdot dt = F - F_0,$$

$$0 = F - F_0$$

$$\text{oder} \quad F = F_0.$$

Hieraus ergibt sich aber, dass, wenn der Körper zur Zeit Null bereits Flächengeschwindigkeit besass, dieselbe während der Bewegung nicht geändert wird.

Somit bleiben auch F_x , F_y , F_z und die Richtungen α' , β' , γ' der Achse F (Fig. 242) constant.

Es ist

$$F_x = F_{x_1} + F_{x_2} + \dots = \Sigma(F_x),$$

$$F_y = F_{y_1} + F_{y_2} + \dots = \Sigma(F_y),$$

$$F_z = F_{z_1} + F_{z_2} + \dots = \Sigma(F_z)$$

und

$$F_1 = \sqrt{F_{x_1}^2 + F_{y_1}^2 + F_{z_1}^2},$$

$$F_2 = \sqrt{F_{x_2}^2 + F_{y_2}^2 + F_{z_2}^2}$$

etc.,

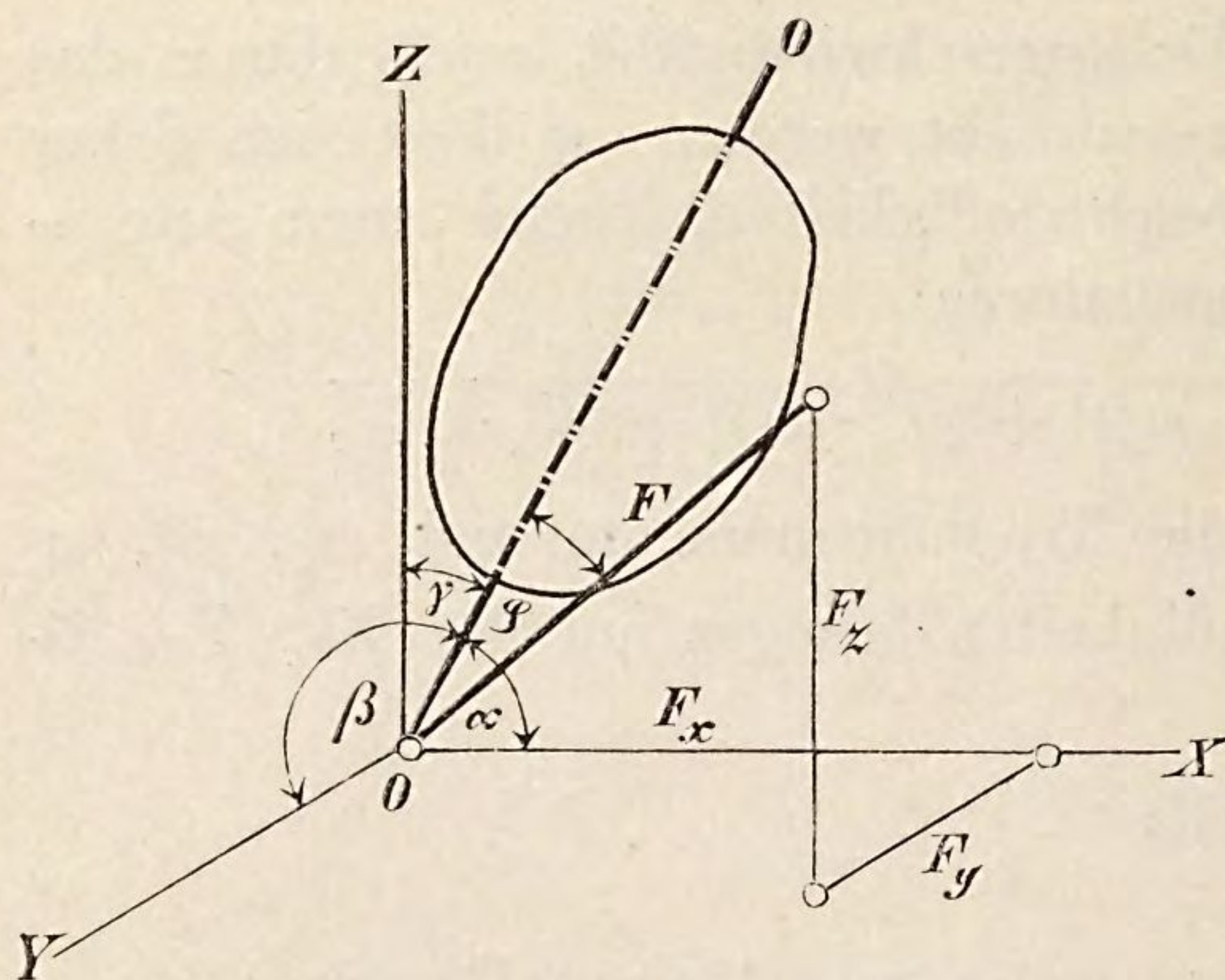


Fig. 243.

es sind $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ die Richtungswinkel der vom Ursprung O aus aufgetragenen Achsen $F_1, F_2 \dots$ zur OO -Achse oder auch die Richtungswinkel zwischen den zu jenen Achsen in dem Ursprung O senkrecht stehenden Ebenen; φ ist der Winkel zwi-

schen der Achse F und der OO -Achse (Fig. 243) resp. zwischen den zur F - und OO -Achse durch den Ursprung O gelegten Normalebenen. α, β, γ sind die Richtungswinkel der OO -Achse, α', β', γ' die Richtungswinkel der F -Achse und $\alpha_1', \beta_1', \gamma_1', \alpha_2', \beta_2', \gamma_2' \dots$ die Richtungswinkel der Achsen $F_1, F_2 \dots$ zu den Koordinatenachsen X, Y, Z .

Es gilt

$$\cos \varphi_1 = \frac{F_{x_1}}{F_1} \cdot \cos \alpha + \frac{F_{y_1}}{F_1} \cdot \cos \beta + \frac{F_{z_1}}{F_1} \cdot \cos \gamma$$

und

$$\Sigma(F \cdot \cos \varphi) = F_x \cdot \cos \alpha + F_y \cdot \cos \beta + F_z \cdot \cos \gamma.$$

Auch ist

$$\cos \varphi = \frac{F_x}{F} \cdot \cos \alpha + \frac{F_y}{F} \cdot \cos \beta + \frac{F_z}{F} \cdot \cos \gamma,$$

also

$$F \cdot \cos \varphi = F_x \cdot \cos \alpha + F_y \cdot \cos \beta + F_z \cdot \cos \gamma$$

und

$$\Sigma(F \cdot \cos \varphi) = F \cdot \cos \varphi.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist die Summe der Projectionen der einzelnen Flächengeschwindigkeiten auf die durch den Ursprung O laufende und zur OO -Achse senkrecht stehende Ebene, während die rechte Seite der Gleichung die Projection der resultirenden Flächengeschwindigkeit auf dieselbe Ebene darstellt. Es ergibt sich demnach, dass die Projection ein Maximum und zwar gleich F wird, wenn $\varphi = 0$ ist, d. h. wenn die Achse F mit der OO -Achse zusammenfällt. Dieses Maximum bleibt dann, da

$$\mathfrak{M} = 0$$

ist, während der Bewegung constant.

Laufen nun sämtliche äusseren Kräfte stets durch den Ursprung O der Achsen X, Y, Z , dann ist

$$\mathfrak{M}$$

für jede durch O laufende Achse OO gleich Null; da aber hierbei die Achsen F_x, F_y, F_z und somit die resultirende Achse F nach Grösse und Richtung constant bleiben, so ergibt sich, „dass es in diesem Falle nur eine einzige unveränderliche Lage für eine durch den Ursprung O laufende Ebene giebt, für welche die Projection der Flächengeschwindigkeit ein Maximum wird“. Dieser Satz heisst „das Gesetz der unveränderlichen Ebene“.

Schwerpunktsbestimmungen von Linien, Flächen und homogenen Körpern.

Die allgemeinen Gleichungen des Schwerpunktes eines Körpers heissen

$$x_0 = \frac{\Sigma(m \cdot x)}{M},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(m \cdot y)}{M}$$

und

$$z_0 = \frac{\Sigma(m \cdot z)}{M}.$$

Ist der Körper homogen, heisst sein Volumen V , seine Dichte ε und sind $v_1, v_2 \dots$ die Volumina der materiellen Punkte $m_1, m_2 \dots$ des Körpers, dann ist

$$M = V \cdot \varepsilon,$$

$$m_1 = v_1 \cdot \varepsilon,$$

$$m_2 = v_2 \cdot \varepsilon,$$

$$\vdots$$

und

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(v \cdot y)}{V},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma(v \cdot z)}{V};$$

die Lage des Schwerpunktes ist dann nur von dem Volumen des Körpers und der Volumenvertheilung in demselben abhängig.

Ist weiter der Flächeninhalt einer Platte F und enthält dieselbe pro Flächeneinheit f die Masse ε , dann ergeben sich aus den allgemeinen Gleichungen diejenigen zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche:

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma(f \cdot z)}{F}.$$

Enthält ferner ein Stab von der Länge L pro Längeneinheit l die Masse ε , dann resultiren die analogen Werthe für eine Linie:

$$x_0 = \frac{\Sigma(l \cdot x)}{L},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L},$$

$$z_0 = \frac{\Sigma(l \cdot z)}{L}.$$

Für praktische Schwerpunktsbestimmungen legt man das Coordinatensystem möglichst so, dass die Werthe x_0 , y_0 , z_0 gleich Null werden. Werden alle drei Werthe gleich Null, so laufen die Coordinatenachsen durch den Schwerpunkt; werden $x_0 = 0$ und $z_0 = 0$, so liegt der Schwerpunkt auf der X -Achse im Abstände x_0 vom Coordinatenanfang, und ist nur $z_0 = 0$, so liegt der Schwerpunkt in der XY -Ebene, in welcher derselbe durch die Coordinaten x_0 und y_0 bestimmt wird.

Diejenige Achse, welche den Schwerpunkt in sich aufnimmt, wird

„Schwerlinie“

genannt.

Schwerpunkt einer geraden Linie.

Legt man die Y -Achse durch das Ende der geraden Linie OX (Fig. 244), deren Schwerpunkt S ermittelt werden soll, und setzt man in der allgemeinen Gleichung

$$L \cdot x_0 = \Sigma(l \cdot x)$$

$$l = dx,$$

so folgt

$$L \cdot x_0 = \int_0^L x \cdot dx = \frac{L^2}{2}$$

oder

$$x_0 = \frac{L}{2}.$$

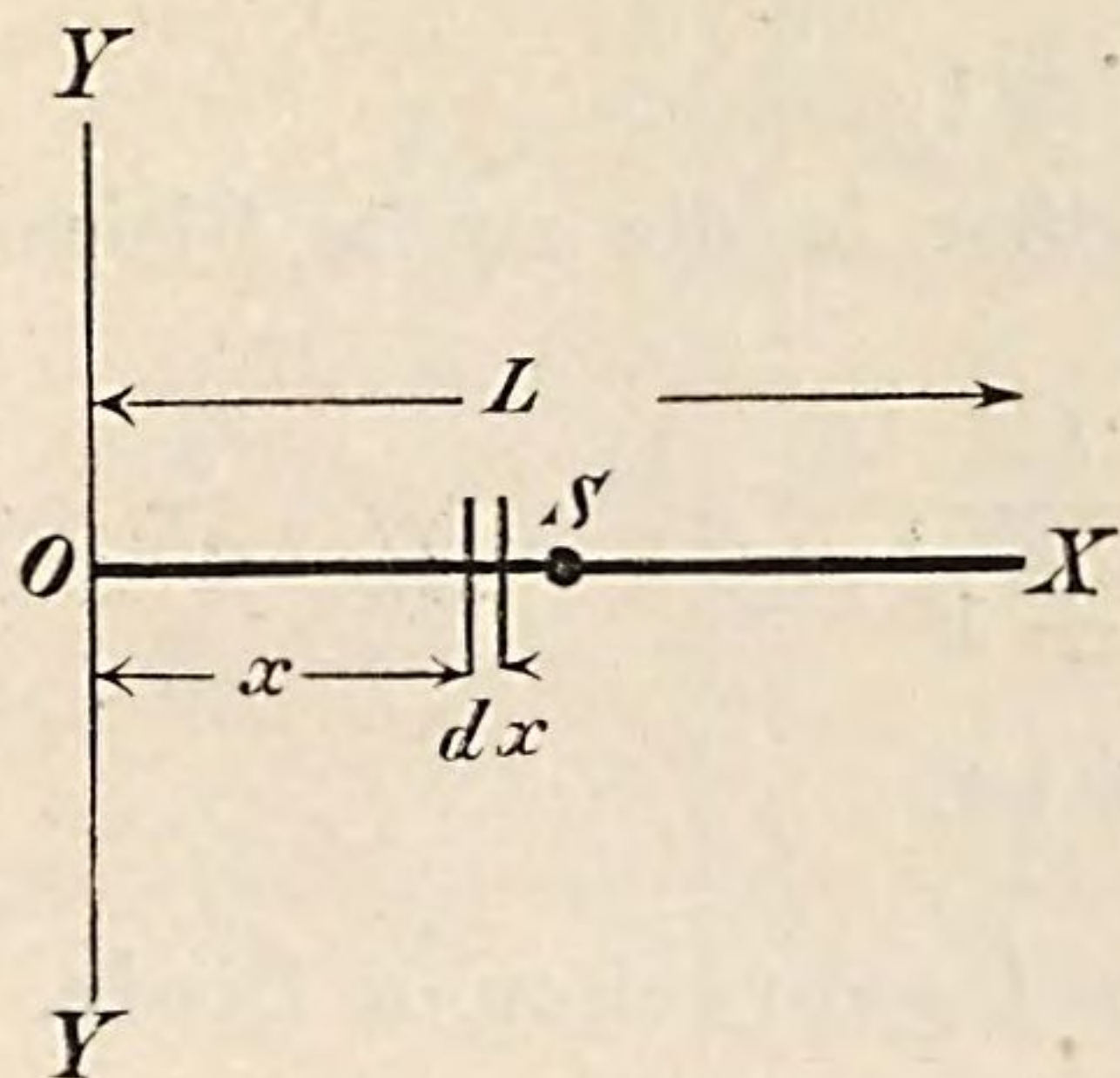


Fig. 244.

Würde also die Y -Achse gleich eingangs durch die Mitte der Geraden gelegt worden sein, so wäre die erstere Schwerlinie und

$$L \cdot x_0 = \Sigma(l \cdot x) = 0$$

geworden.

Schwerpunkt einer einmal gebrochenen Linie.

Die Schwerpunkte der Linien l_1 und l_2 (Fig. 245) liegen in ihren Halbirungspunkten S_1 und S_2 , weshalb der Schwer-

punkt S beider Linien auf der Schwerlinie $S_1 S_2$ zu suchen ist durch

$$\Sigma(l \cdot x) = 0,$$

$$l_1 \cdot x_1 - l_2 \cdot x_2 = 0$$

oder

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{\frac{l_2}{2}}{\frac{l_1}{2}} = \frac{b}{a}.$$

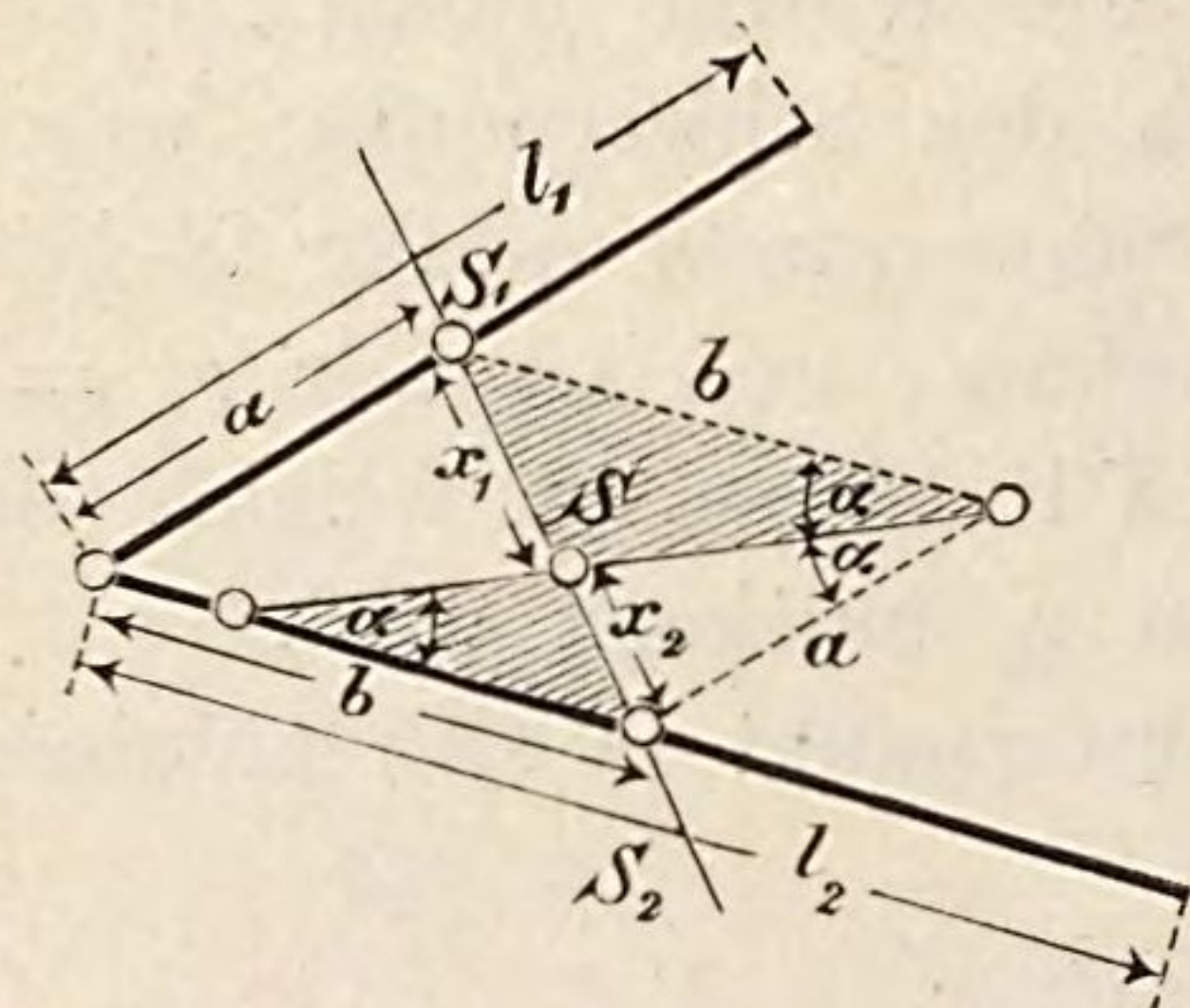


Fig. 245.

Dieses Verhältniss kann wie in Fig. 245 gezeigt construirt werden. Auf dem Wege der

Rechnung findet sich x_1 und x_2 unter Zuhilfenahme von

$$x_1 + x_2 = l.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$x_1 = \frac{b}{a} \cdot x_2,$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in die zweite Gleichung ergibt sich

$$x_2 = \frac{l}{\frac{b}{a} + 1},$$

durch welchen Werth S bestimmt ist.

Schwerpunkt einer zweimal gebrochenen Linie.

Mit Bezug auf Fig. 246 ist der Schwerpunkt S zu bestimmen durch

$$x_0 = \frac{\Sigma(l \cdot x)}{L} = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L} = \frac{l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2 + l_3 \cdot y_3}{l_1 + l_2 + l_3}$$

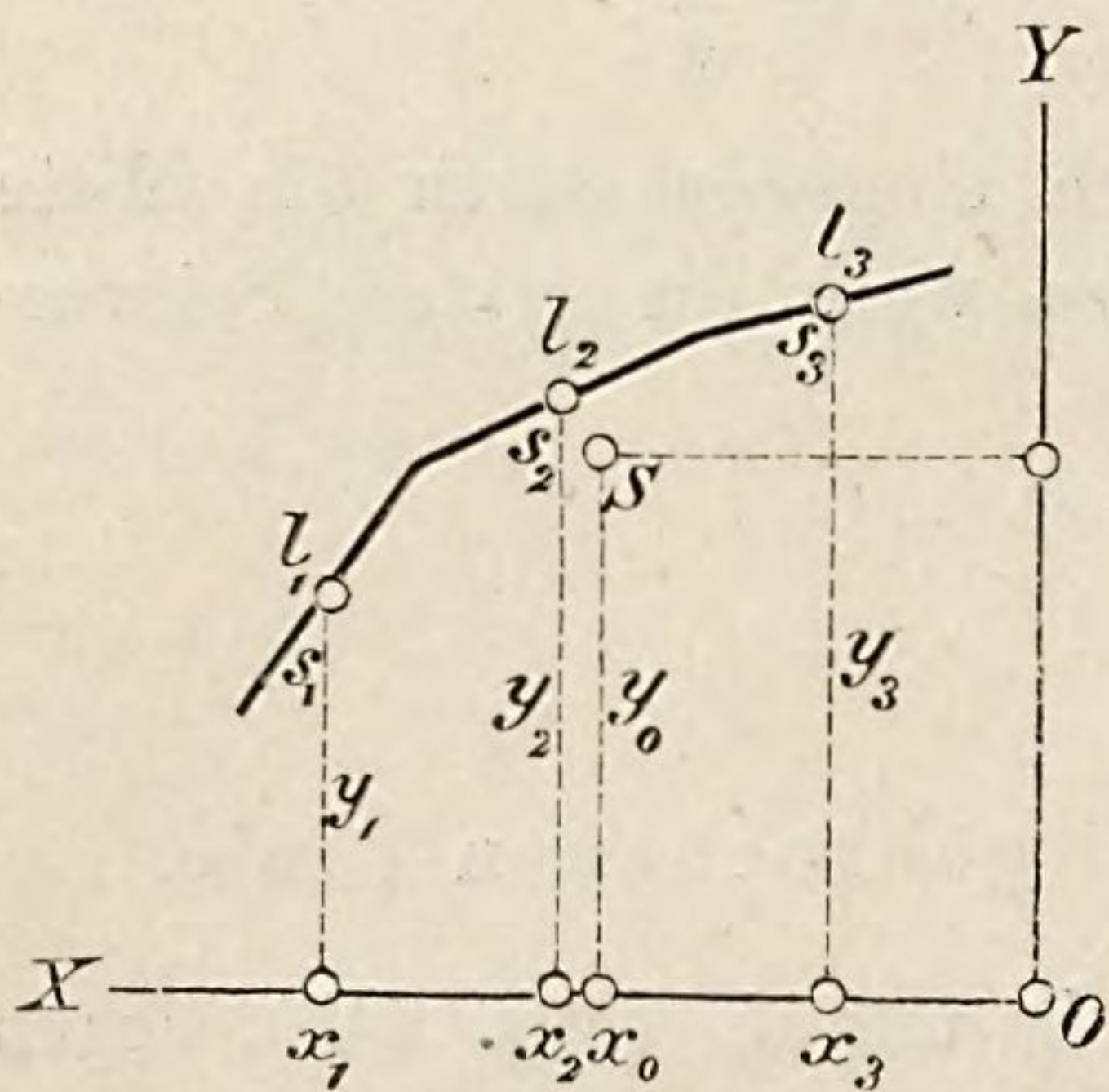


Fig. 246.

Dieselben Werthe gelten auch für den Schwerpunkt S eines Dreiecksumfanges. Einfacher gestaltet sich jedoch hierfür die Rechnung,

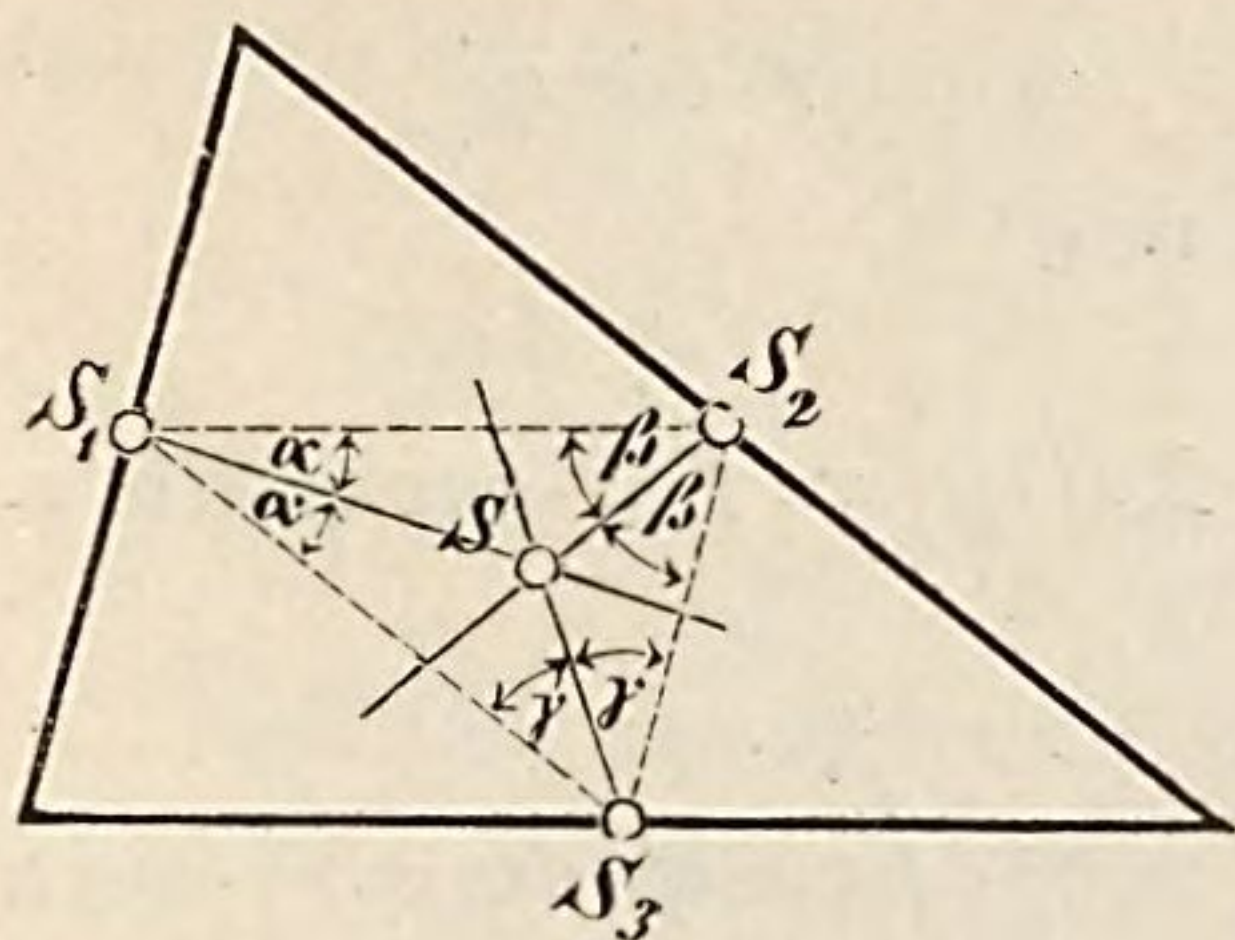


Fig. 247.

wenn man die X -Achse mit einer Dreiecksseite zusammenfallen und die Y -Achse durch den Schwerpunkt dieser Seite laufen lässt. Auch kann der Schwerpunkt der Dreiecksseite mit Hilfe der im Vorigen gefundenen Construction bestimmt werden, wie Fig. 247 zeigt.

Schwerpunkt einer symmetrisch gebrochenen Linie.

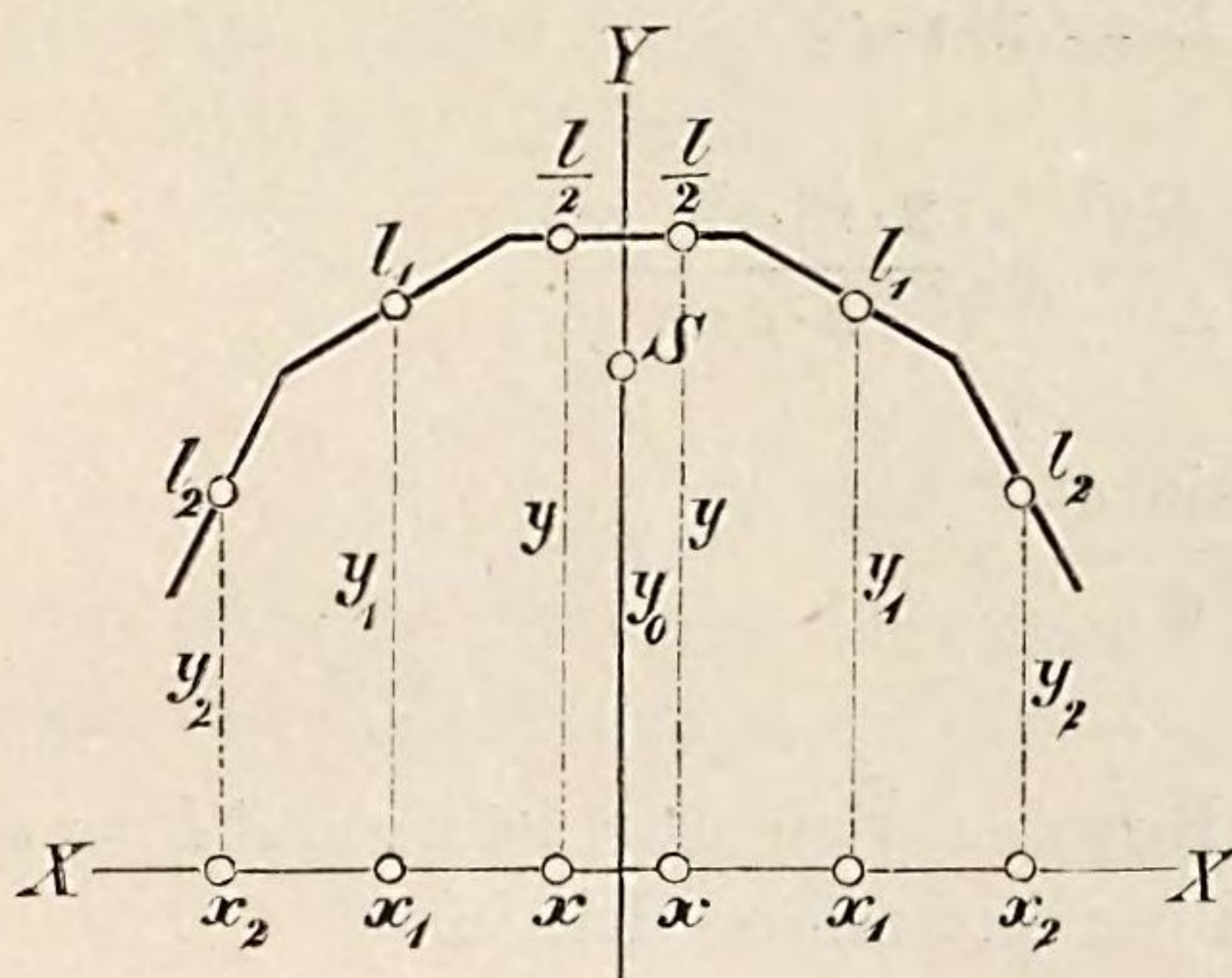


Fig. 248.

Legt man die X -Achse parallel zu l und die Y -Achse durch $\frac{l}{2}$ (Fig. 248), dann wird die letztere Symmetrie- und Schwer-Linie und der Schwerpunkt S bestimmt durch

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L} = \frac{l \cdot y + 2 \cdot (l_1 \cdot y_1 + l_2 \cdot y_2)}{l + 2 \cdot (l_1 + l_2)}.$$

Schwerpunkt eines Kreisbogens.

Legt man die X -Achse parallel zu AB (Fig. 249) und die Y -Achse senkrecht zu AB durch den Mittelpunkt O des Kreisbogens, dann nimmt letztere den Schwerpunkt in sich auf, und es erübrigt nur den Werth

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L}$$

auszurechnen.

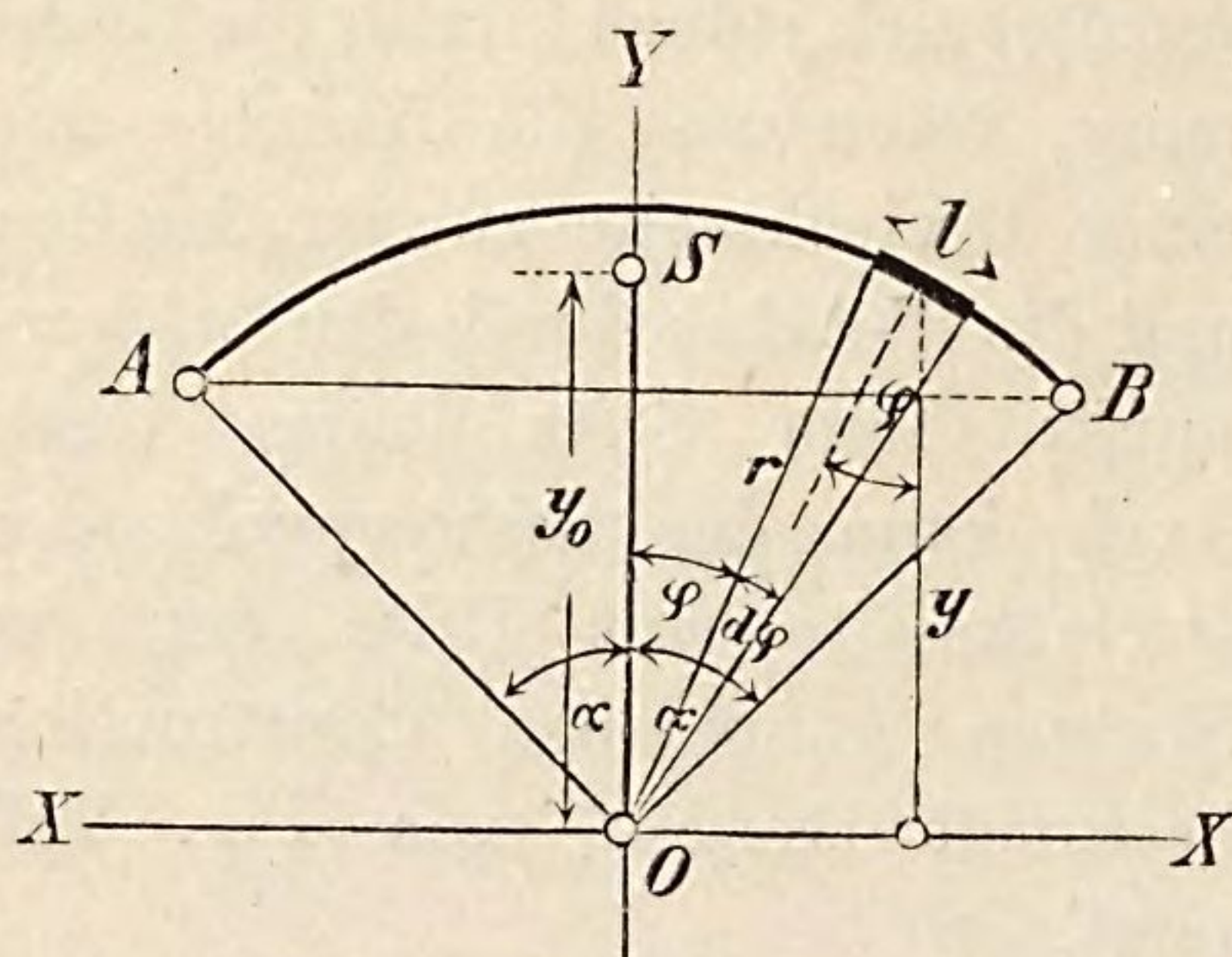


Fig. 249.

Es ist

$$l = dL = r \cdot d\varphi,$$

$$y = r \cdot \cos \varphi$$

und

$$\Sigma(l \cdot y) = \int_0^\alpha r^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi =$$

$$= r^2 \cdot \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi = r^2 \cdot \sin \alpha,$$

folglich

$$\Sigma(l \cdot y) = 2 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Die Länge des Bogens AB ist

$$L = 2 \cdot r \cdot \alpha,$$

also

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L} = \frac{2 \cdot r^2 \cdot \sin \alpha}{2 \cdot r \cdot \alpha}$$

oder

$$y_0 = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}.$$

Schwerpunkt eines Bogens von der Länge $AB = s$
irgend einer krummen Linie.

Sind x und y die Coordinaten eines Curvenpunktes bezogen auf ein rechtwinkeliges Achsensystem XY (Fig. 250), ist $y = f(x)$

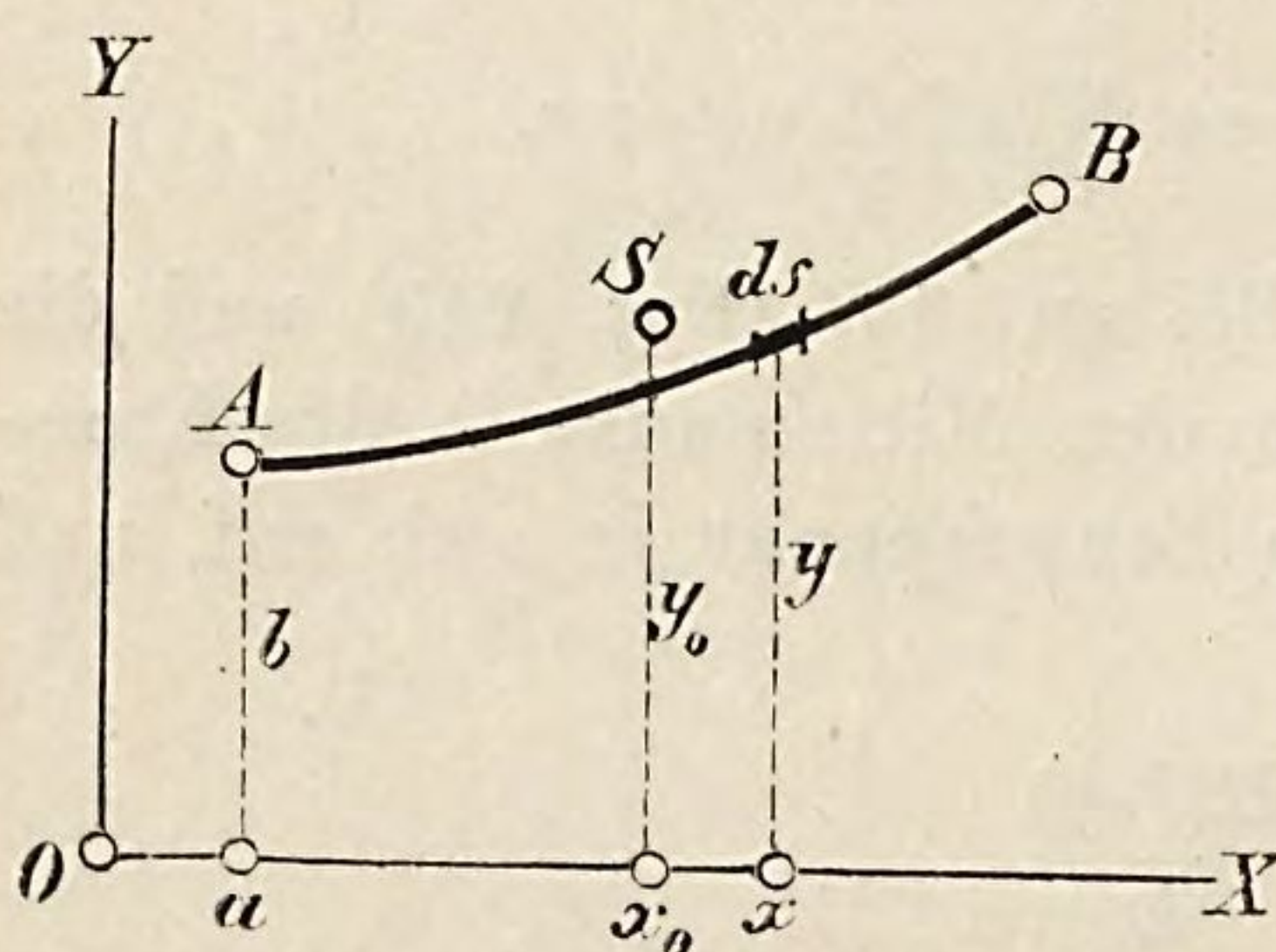


Fig. 250.

gegeben und ds ein unendlich kleines Bogenstück, dann gilt für die Schwerpunkts-Coordina-
ten des Curvenstückes $AB = s$

$$x_0 = \frac{\Sigma(l \cdot x)}{L} = \frac{\int x \cdot ds}{s}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(l \cdot y)}{L} = \frac{\int y \cdot ds}{s}.$$

Da nun die Gleichung der Curve durch

$$y = f(x)$$

gegeben ist, so ist

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

und

$$s = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Nach der Ausrechnung des letzten Werthes sind die Integrale

$$\int x \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

und

$$\int y \cdot \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

zu ermitteln.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten dienen die Anfangswerthe a und b der Coordinaten x und y ; für $x = a$ ist $y = b$ und $s = 0$; ferner

$$\int x \cdot ds = 0 \quad \text{und} \\ \int y \cdot ds = 0.$$

Hat man es mit einer doppelt gekrümmten Curve zu thun, so sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$x_0 = \frac{\int x \cdot ds}{s}, \\ y_0 = \frac{\int y \cdot ds}{s}, \\ z_0 = \frac{\int z \cdot ds}{s},$$

wobei

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

auch die Grösse s als Function einer der veränderlichen Grössen x , y und z liefert.

Schwerpunkt der Dreiecksfläche.

Die Halbierungspunkte D , E , F der Dreiecksseiten (Fig. 251) sind die Schwerpunkte der letzteren.

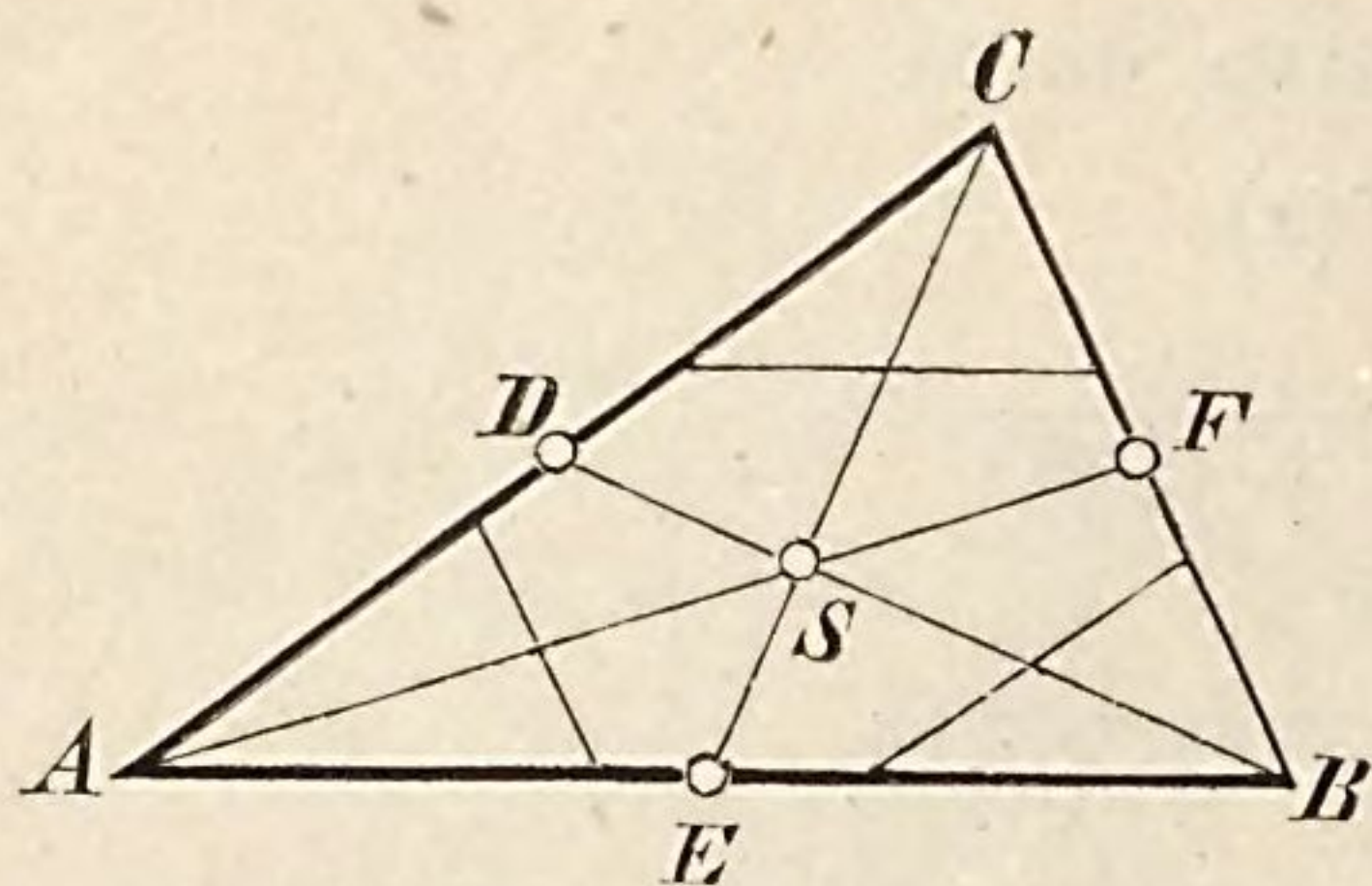


Fig. 251.

Nun nehmen die Geraden AF , BD und CE die Schwerpunkte von allen Parallelen zu den Seitenkanten in sich auf, folglich wird der Durchschnitt S derselben der Schwerpunkt der Dreiecksfläche.

Senkrechte Höhe des Schwerpunktes über den Dreiecksseiten:

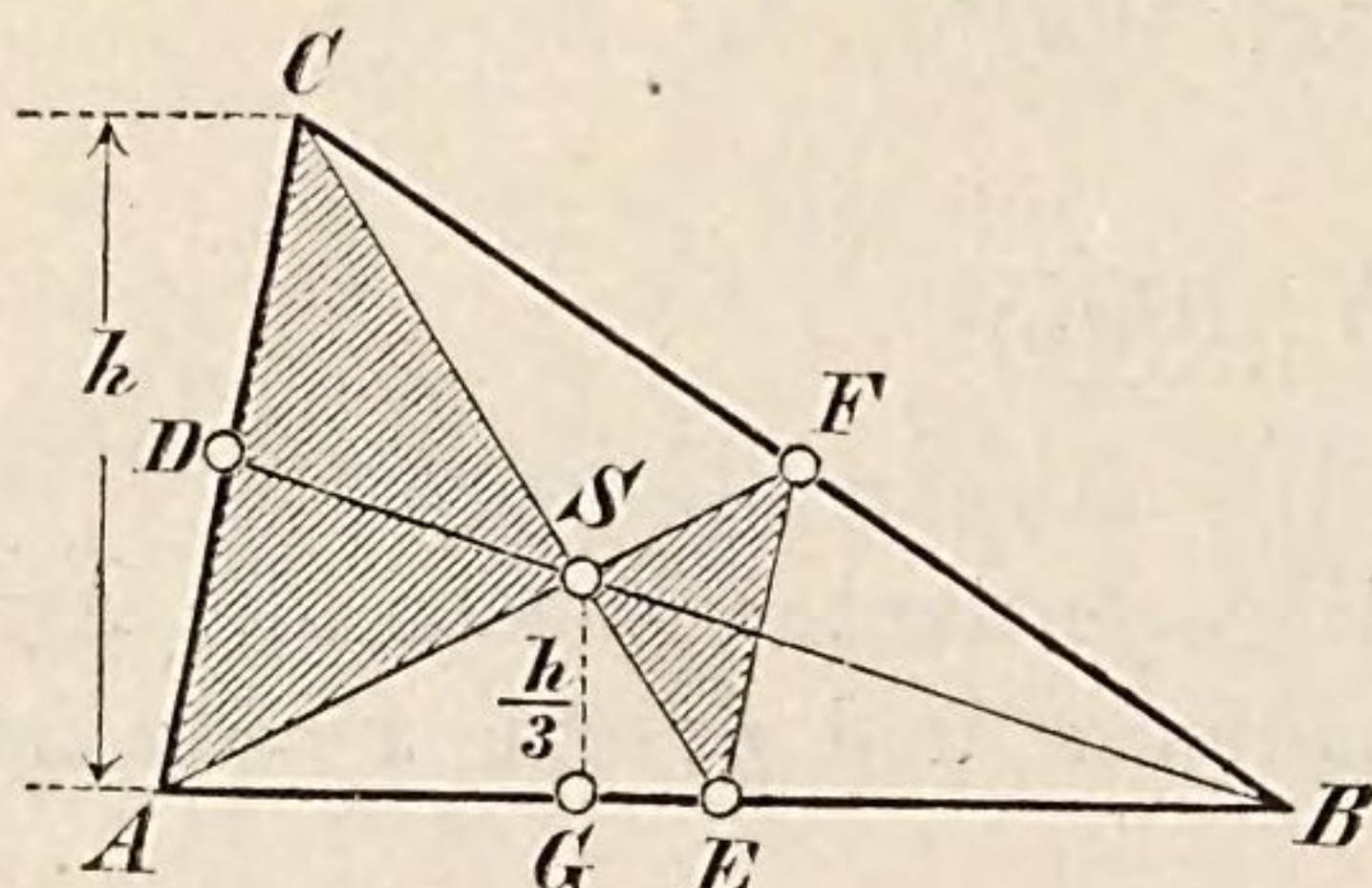


Fig. 252.

In beistehender Fig. 252 sind die Dreiecke ASC und FSE einander ähnlich, folglich ist, da noch

$$AE = \frac{1}{2} \cdot AB,$$

$$EF = \frac{1}{2} \cdot AC \text{ ist,}$$

$$ES = \frac{1}{2} \cdot CS = \frac{1}{3} \cdot CE$$

$$\text{und } GS = \frac{h}{3},$$

unter h die senkrechte Höhe des Dreiecks verstanden.

Mit Hilfe der allgemeinen Schwerpunksgleichungen findet sich derselbe Werth folgendermassen:

Es ist

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F},$$

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}.$$

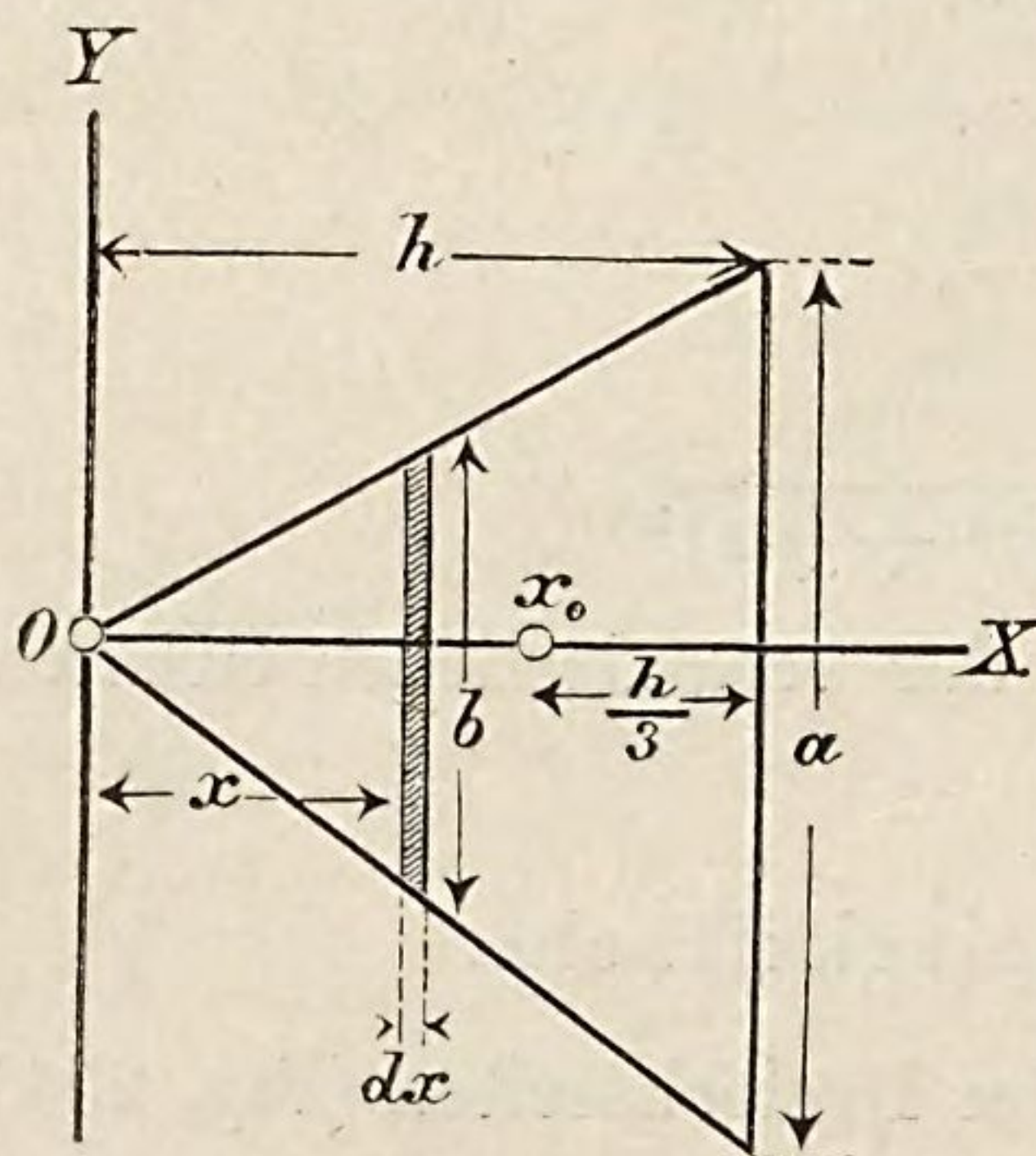


Fig. 253.

Legt man durch die Spitze des Dreiecks (Fig. 253) die Coordinatenachsen derart, dass die Y -Achse zur Seite a parallel läuft, und denkt man sich die Dreiecksfläche F in unendlich schmale zur Seite a parallel laufende Flächen-Elemente

$$f = b \cdot dx$$

zerlegt, so gilt

$$b : a = x : h$$

oder

$$b = \frac{a}{h} \cdot x.$$

Auch ist

$$f \cdot x = \frac{a}{h} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \Sigma(f \cdot x) &= \frac{a}{h} \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{a}{h} \cdot \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{a \cdot h^2}{3}. \end{aligned}$$

Da der Flächeninhalt des Dreiecks

$$F = \frac{a \cdot h}{2}$$

ist, so folgt aus

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F},$$

$$x_0 = \frac{\frac{a \cdot h^2}{3}}{\frac{a \cdot h}{2}} = \frac{2}{3} \cdot h.$$

Der senkrechte Abstand des Schwerpunktes von der Seite a ist also $\frac{h}{3}$.

Zur genaueren Bestimmung des Schwerpunktes S ist noch

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} \text{ auszurechnen.}$$

Schwerpunkt einer quadratischen oder rhombischen Fläche.

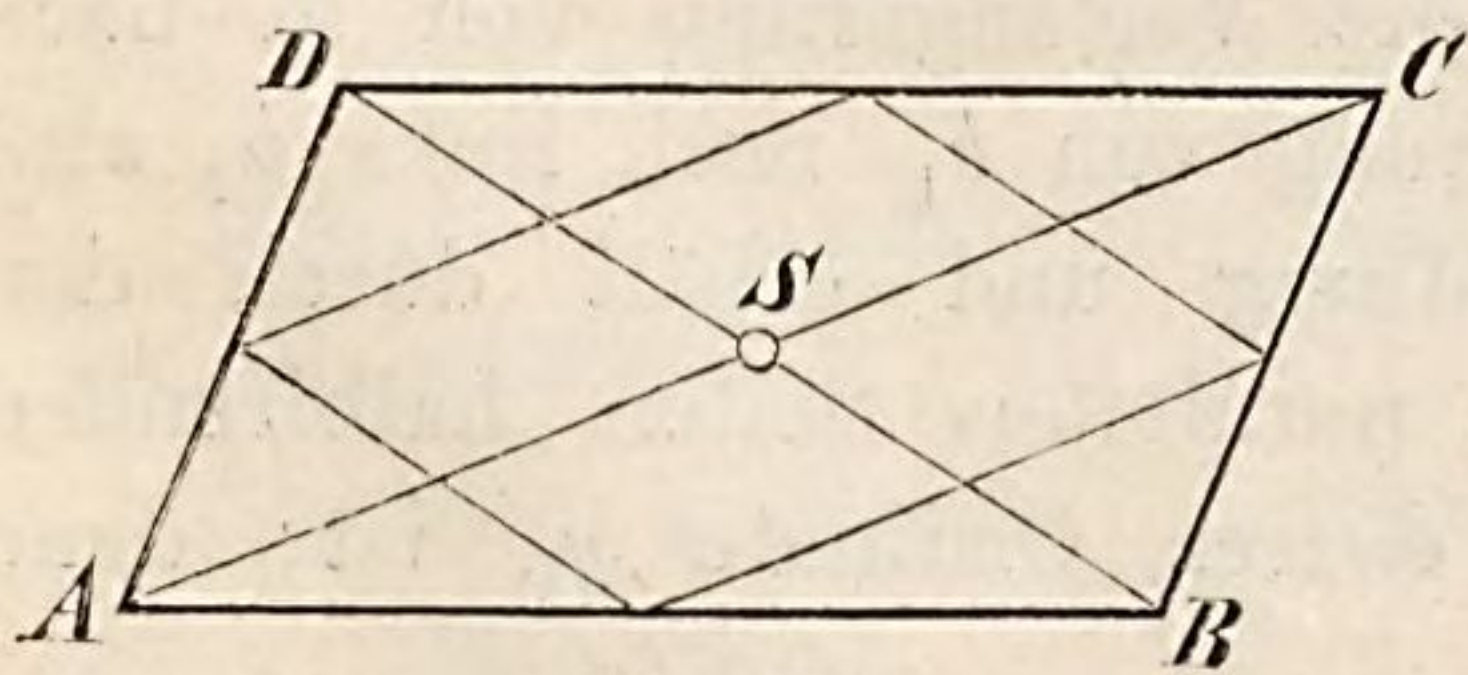


Fig. 254.

Die Diagonalen AC und BD sind die Schwerlinien für alle zu ihnen parallelen Flächenelemente, folglich bildet ihr Durchschnitt den Schwerpunkt der ganzen Fläche.

Schwerpunkt der Trapezfläche.

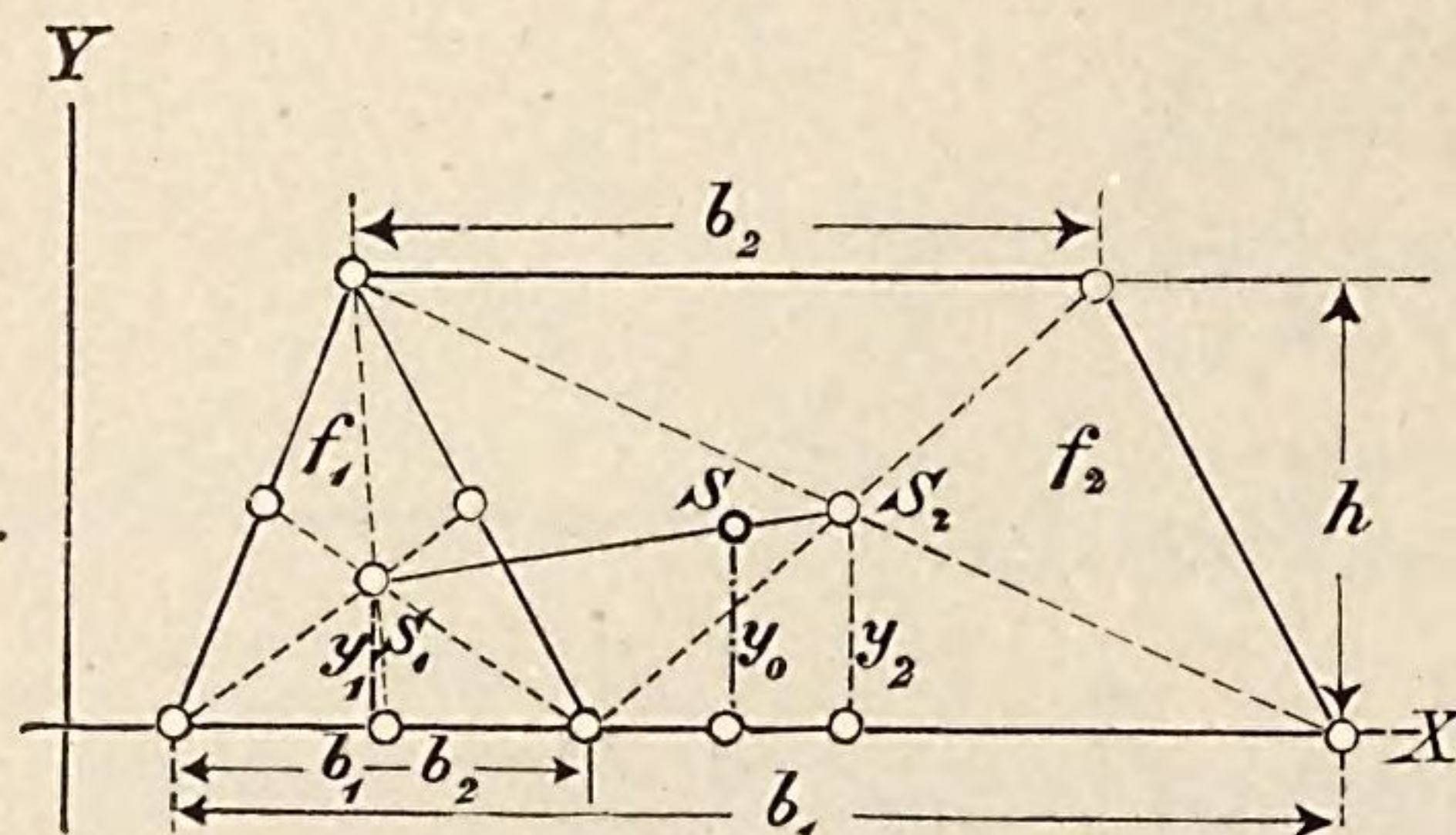


Fig. 255.

Allgemein gilt

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}$$

und mit Rücksicht auf Fig. 255

$$y_0 = \frac{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2}{F}$$

Nun ist

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h,$$

$$f_1 = \frac{b_1 - b_2}{2} \cdot h,$$

$$f_2 = b_2 \cdot h,$$

$$y_1 = \frac{h}{3}$$

und

$$y_2 = \frac{h}{2},$$

folglich wird

$$y_0 = \frac{\frac{(b_1 - b_2) \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3} + b_2 \cdot h \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h} = \frac{(b_1 + 2 \cdot b_2) \cdot h}{3 \cdot (b_1 + b_2)}$$

oder

$$\frac{y_0}{h} = \frac{b_1 + 2 \cdot b_2}{3 \cdot (b_1 + b_2)},$$

welcher Werth graphisch dargestellt werden kann.

Man trägt (Fig. 256) auf die Verlängerung von b_2 nach rechts b_1 und auf die Verlängerung von b_1 nach links b_2 auf, verbindet die Endpunkte geradlinig und erhält durch den Schnittpunkt S mit einer die parallelen Seiten halbirenden Geraden den Schwerpunkt S , dessen Ordinate y_0 ist; denn es ist

$$\frac{m}{n} = \frac{b_1 + \frac{b_2}{2}}{b_2 + \frac{b_1}{2}}$$

und $\frac{h}{y_0} = \frac{m+n}{n} = \frac{m}{n} + 1$ oder

$$\frac{m}{n} = \frac{h}{y_0} - 1.$$

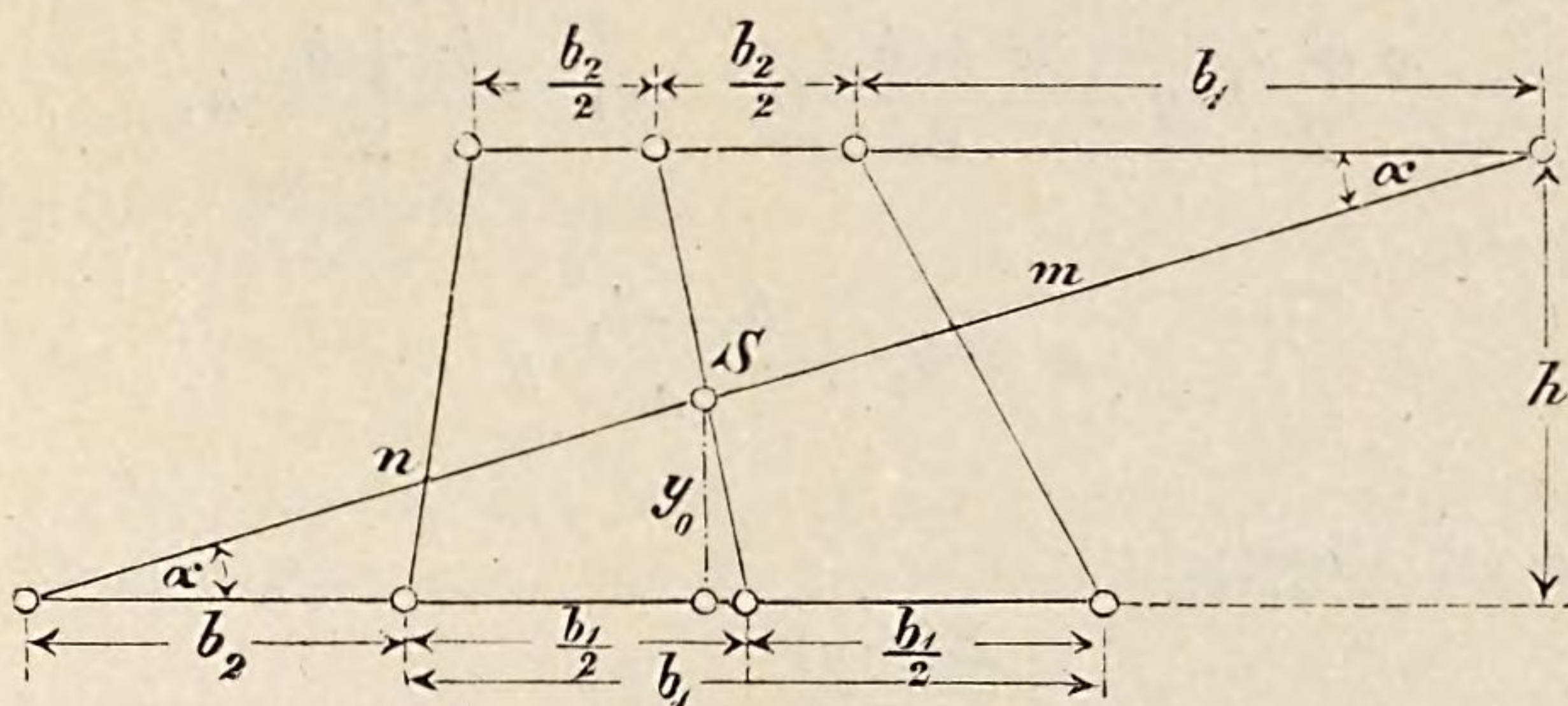


Fig. 256.

Setzt man die beiden Werthe für $\frac{m}{n}$ einander gleich, so folgt

$$\frac{h}{y_0} = \frac{b_1 + \frac{b_2}{2}}{b_2 + \frac{b_1}{2}} + 1 = \frac{3 \cdot (b_1 + b_2)}{2 \cdot b_2 + b_1}$$

oder, wie oben,

$$\frac{y_0}{h} = \frac{b_1 + 2 \cdot b_2}{3 \cdot (b_1 + b_2)}.$$

Der Schwerpunkt des Trapezes lässt sich auch folgendermassen ermitteln:

Zunächst werde die veränderliche Breite x als eine Function von y ausgedrückt.

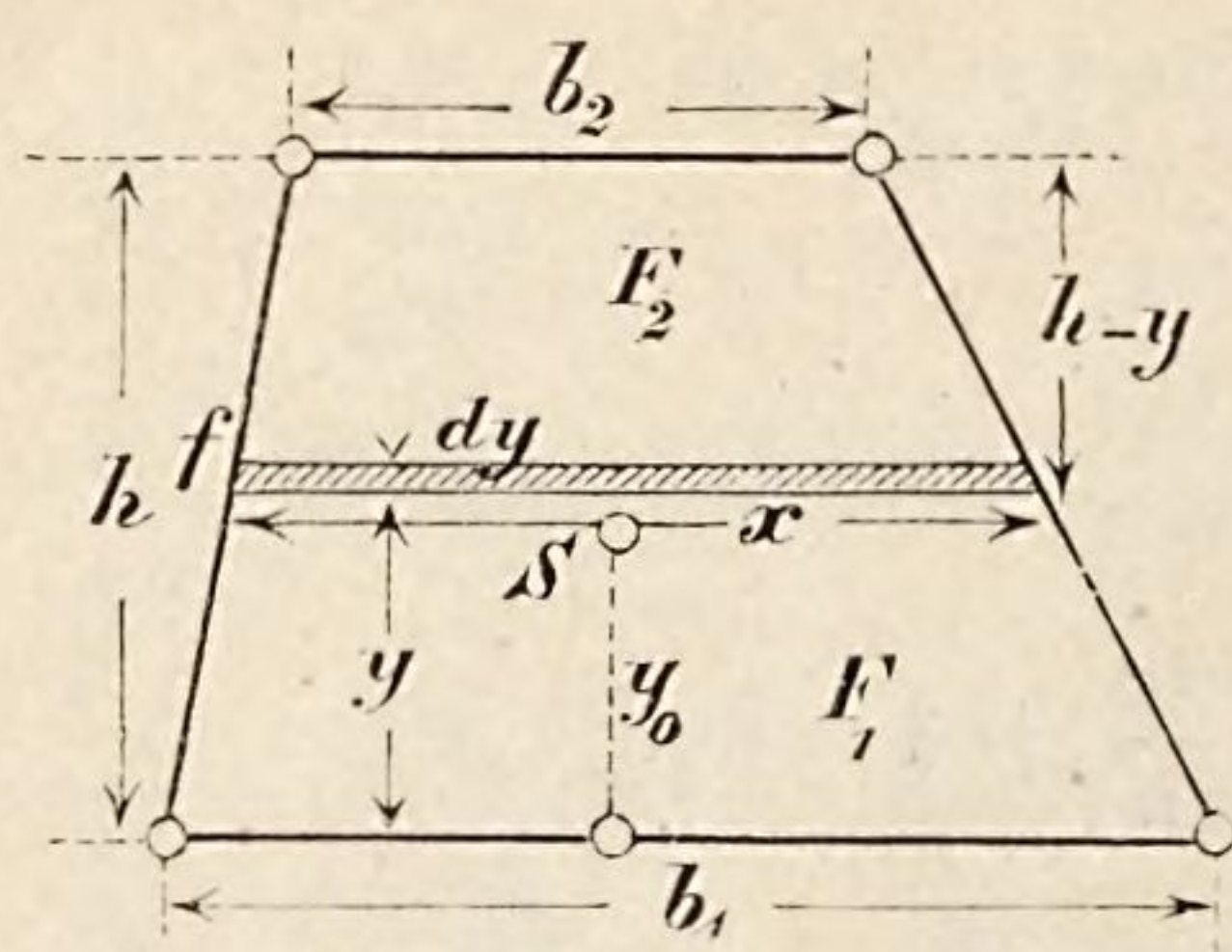


Fig. 257.

Es ist nach Fig. 257

$$F_1 + F_2 = F,$$

$$F = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h,$$

$$F_1 = \frac{x + b_1}{2} \cdot y,$$

$$F_2 = \frac{x + b_2}{2} \cdot (h - y)$$

oder nach Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung für F

$$\frac{x + b_1}{2} \cdot y + \frac{x + b_2}{2} \cdot (h - y) = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h,$$

woraus sich

$$x = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot y$$

ergiebt.

Nun ist allgemein

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}$$

und

$$f = x \cdot dy,$$

$$f \cdot y = x \cdot y \cdot dy$$

$$= \left(b_1 \cdot y + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot y^2 \right) \cdot dy;$$

ferner ist

$$\begin{aligned} \Sigma(f \cdot y) &= \int_0^h \left\{ b_1 \cdot y + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot y^2 \right\} \cdot dy \\ &= \frac{b_1 \cdot h^2}{2} + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{h^2 \cdot (b_1 + 2 \cdot b_2)}{6} \end{aligned}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{(b_1 + 2 \cdot b_2) \cdot h}{3 \cdot (b_1 + b_2)}.$$

Schwerpunkt eines Kreissectors.

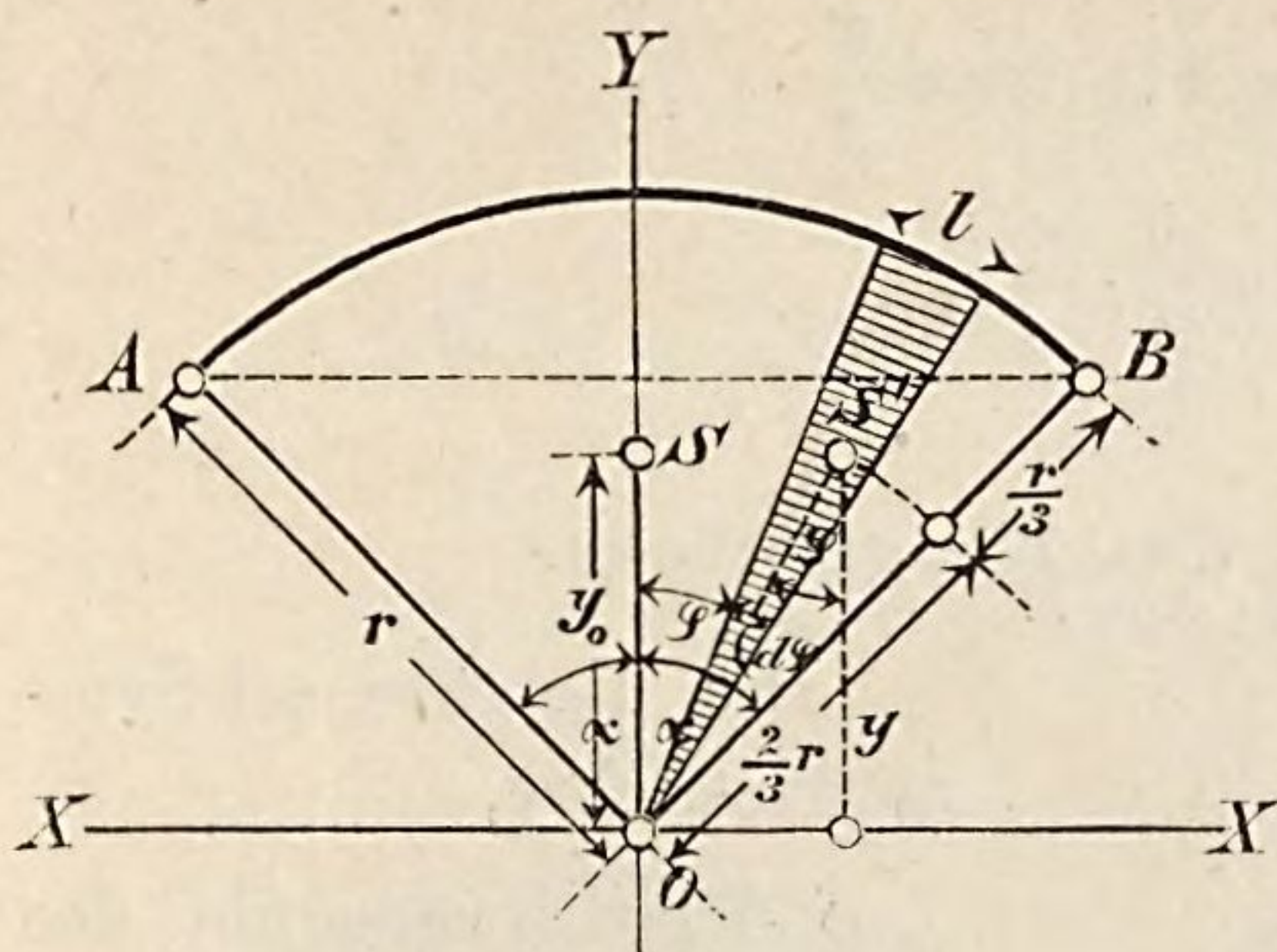


Fig. 258.

Die Y-Achse ist so zu legen, dass sie Schwerlinie wird, dann genügt zur Bestimmung des Schwerpunktes S der Sectorfläche F (Fig. 258)

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}.$$

Nun ist das Bogenelement

$$l = r \cdot d\varphi,$$

folglich das Flächenelement

$$f = \frac{r^2 \cdot d\varphi}{2},$$

und der Hebelarm y des letzteren ist gleich dem Schwerpunktsabstand desselben von der X-Achse und zwar

$$y = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \varphi;$$

demnach ist

$$\begin{aligned} f \cdot y &= \frac{r^2 \cdot d\varphi}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{r^3}{3} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned} \Sigma(f \cdot y)_0^\alpha &= \frac{r^3}{3} \cdot \int_0^\alpha \cos \varphi \cdot d\varphi = \frac{r^3}{3} \cdot \sin \alpha, \\ \Sigma(f \cdot y) &= \frac{2}{3} \cdot r^3 \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Da sich die ganze Sectorfläche durch

$$F = r^2 \cdot \alpha$$

berechnet, so folgt schliesslich

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Specieller Fall: $\alpha = 90^\circ$, giltig für die Halbkreisfläche,
liefert $\sin \alpha = 1; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

und $y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$

Schwerpunkt des Ringsectors.

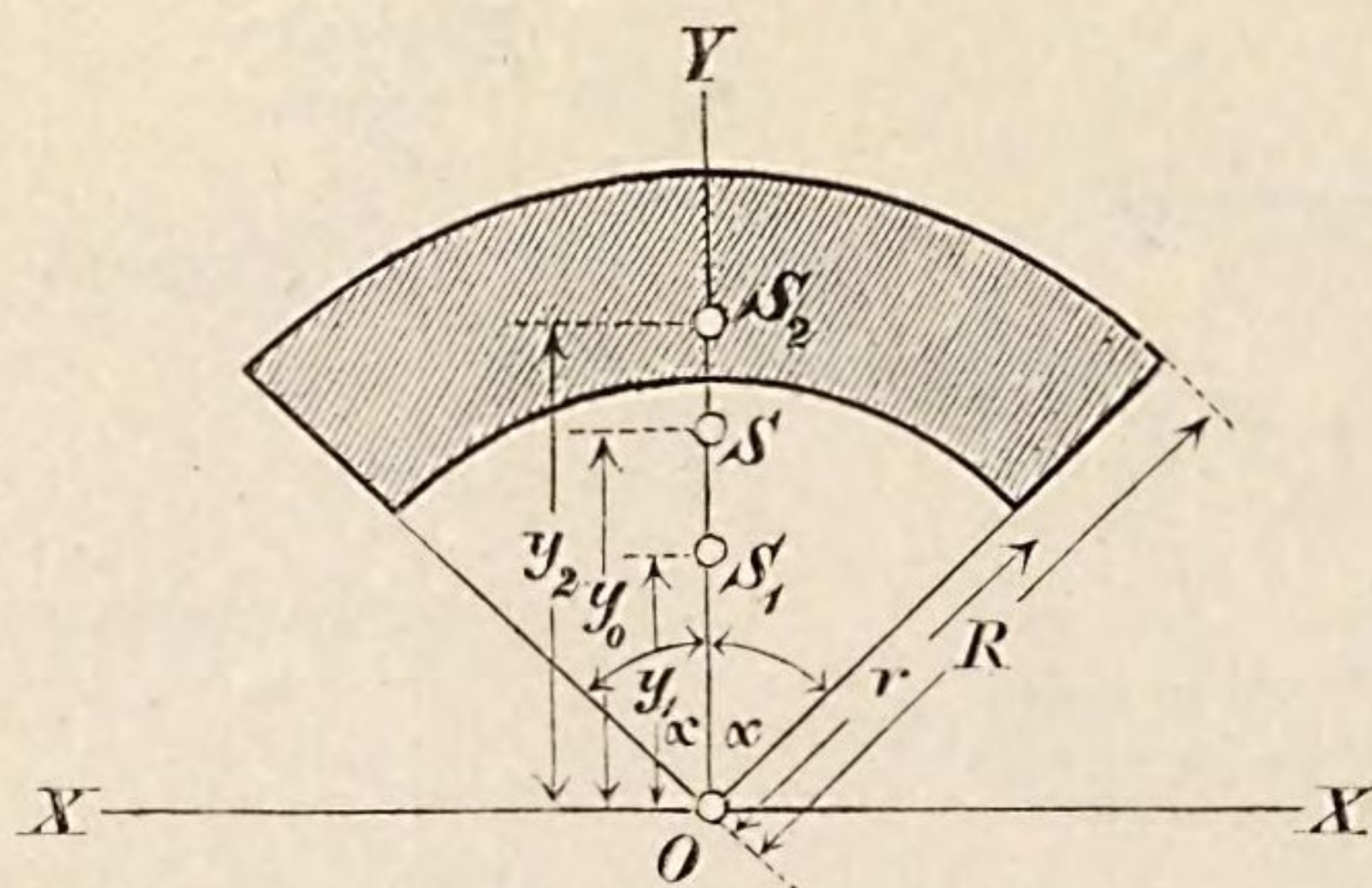


Fig. 259.

Die Y -Achse sei Symmetrie-Achse,

S der Schwerpunkt des Kreissectors F vom Halbmesser R ,

S_1 der Schwerpunkt des Kreissectors f_1 vom Halbmesser r ,

S_2 der Schwerpunkt des Ringsectors f_2 ;

dann ist mit Bezug auf Fig. 259

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2}{F}$$

oder

$$y_2 = \frac{F \cdot y_0 - f_1 \cdot y_1}{f_2}.$$

In dieser Gleichung ist nun

$$F = R^2 \cdot \alpha, \quad f_1 = r^2 \cdot \alpha,$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad y_1 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

und $f_2 = F - f_1 = R^2 \cdot \alpha - r^2 \cdot \alpha = (R^2 - r^2) \cdot \alpha$,
folglich ergibt sich durch Einsetzung der Werthe

$$y_2 = \frac{R^2 \cdot \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} - r^2 \cdot \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}}{(R^2 - r^2) \cdot \alpha}$$

oder

$$y_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Spezieller Fall: Für die Halbkreisfläche ist

$$r = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

also
$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi}.$$

Schwerpunkt eines Kreissegmentes.

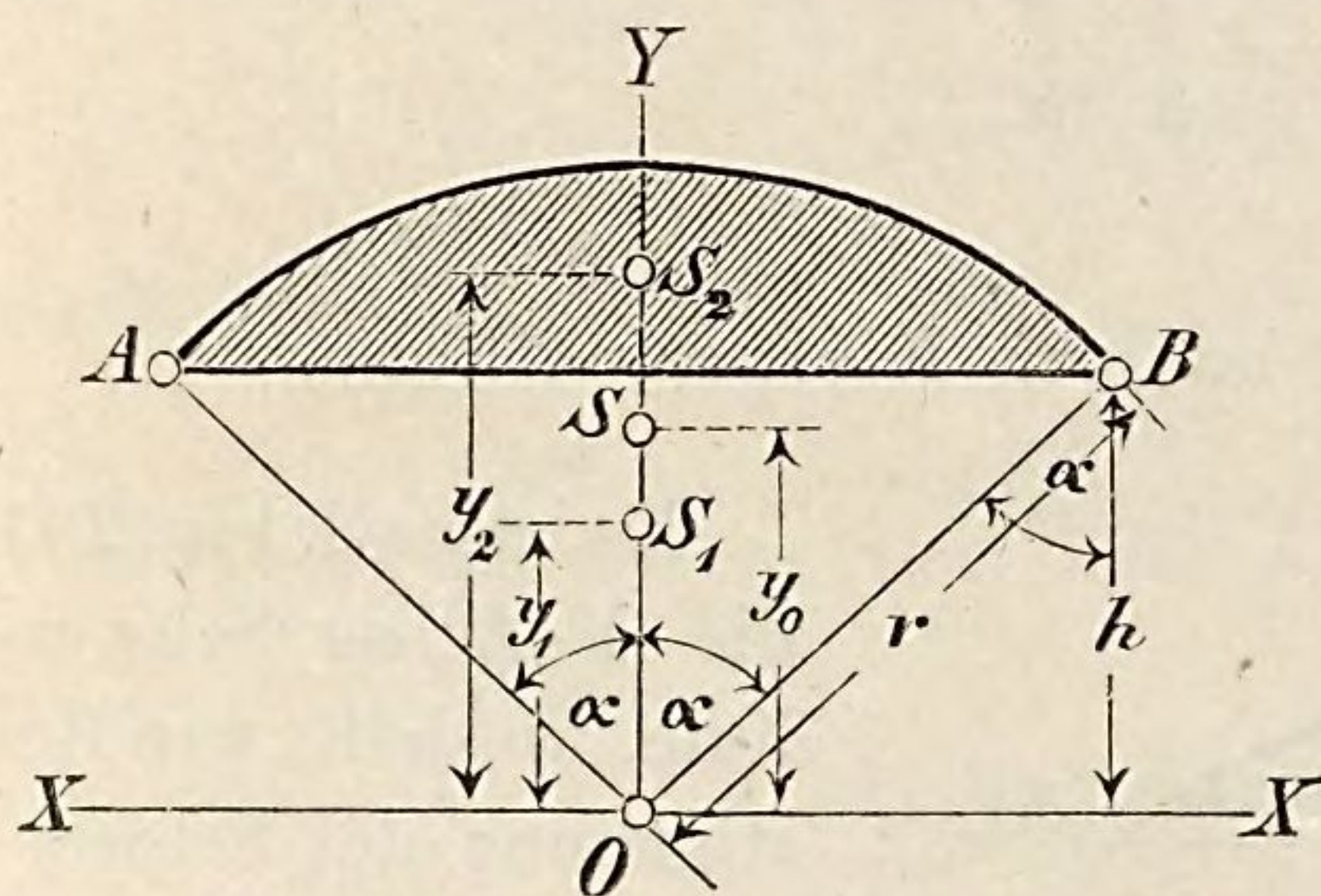


Fig. 260.

Die Y-Achse ist Schwerlinie,

S der Schwerpunkt des Kreissektors F ,

S_1 der Schwerpunkt des Dreiecks $ABO = f_1$

und

S_2 der Schwerpunkt des Kreissegmentes f_2 .

Mit Bezug auf Fig. 260 ist

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2}{F}$$

oder

$$y_2 = \frac{F \cdot y_0 - f_1 \cdot y_1}{f_2};$$

hierin ist aber

$$F = r^2 \cdot \alpha,$$

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

$$f_1 = \frac{2 \cdot r \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot \cos \alpha}{2} = r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} f_2 &= F - f_1 = r^2 \cdot \alpha - r^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= r^2 \cdot (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha), \end{aligned}$$

und es resultirt durch Einsetzung

$$y_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin^3 \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Spezieller Fall: Für die Halbkreisfläche ist

$$h = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also}$$

$$y_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche.

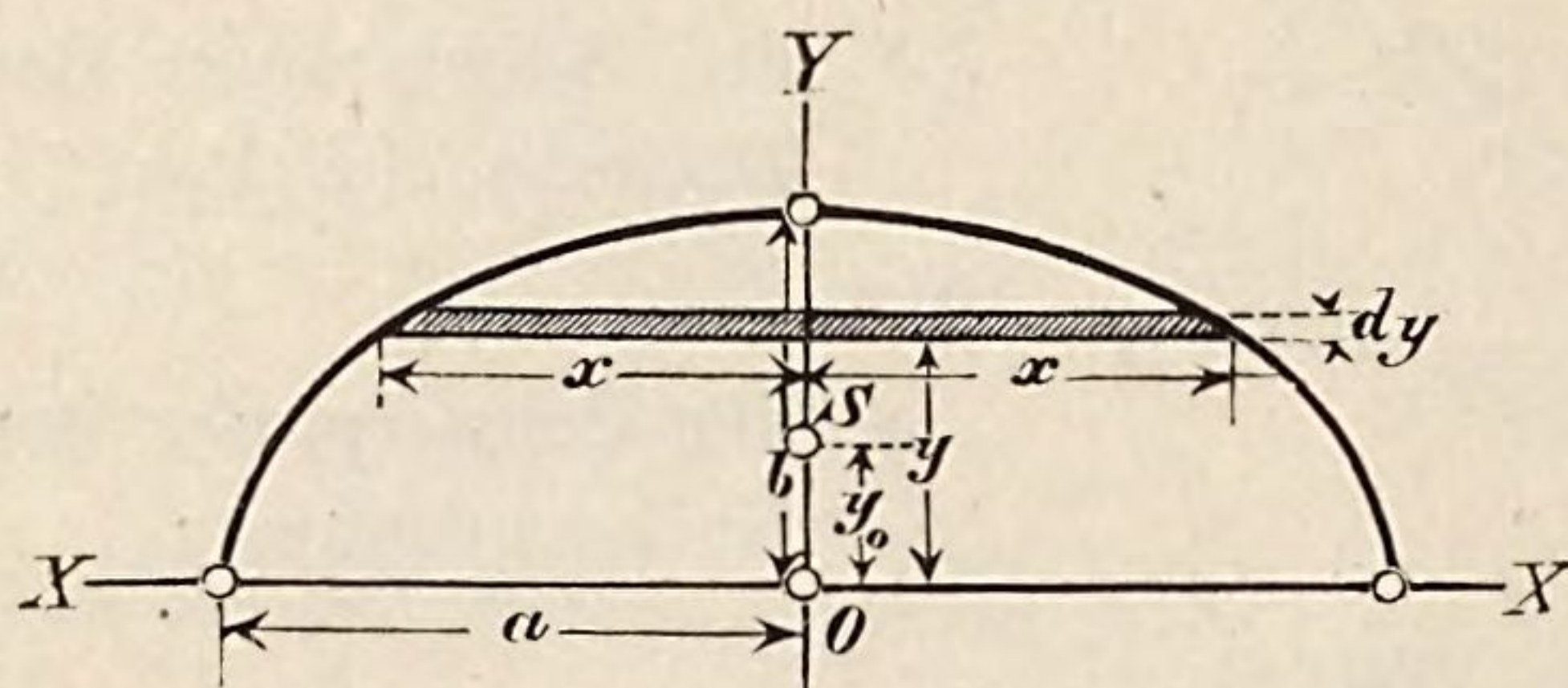


Fig. 261.

Es ist nach Fig. 261 die Y-Achse Schwerlinie, weshalb zur Bestimmung des Schwerpunktes S allein genügt

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}.$$

Ein Flächenelement ist nach Figur 261

$$f = 2 \cdot x \cdot dy,$$

das Moment desselben

$$f \cdot y = 2 \cdot x \cdot y \cdot dy,$$

und die Gleichung der Ellipse heisst

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Differentiirt man letztere, so folgt

$$\frac{x \cdot dx}{a^2} + \frac{y \cdot dy}{b^2} = 0$$

oder

$$y \cdot dy = -\frac{b^2}{a^2} \cdot x \cdot dx.$$

Setzt man diesen Werth in die Momentengleichung ein, so folgt

$$\Sigma(f \cdot y) = -2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot \int_a^0 x^2 \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b^2.$$

Ferner ist

$$F = 2 \cdot \int x \cdot dy;$$

aus der Gleichung der Ellipse ergibt sich aber

$$x = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - y^2},$$

weshalb

$$F = 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \int_0^b \sqrt{b^2 - y^2} \cdot dy$$

oder

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{2} \end{aligned}$$

ist.

Durch Einsetzung der erhaltenen Werthe in die Gleichung für y_0 folgt schliesslich

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi},$$

woraus sich ergibt, dass die Lage des Schwerpunktes unabhängig von der Grösse der Halbachse a ist.

Specieller Fall: Wird $a = b = r$, so erhält man die Halbkreisfläche und wie früher für diese

$$y_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

Schwerpunkt eines Viertels der Ellipsenfläche.

Es dienen zur Bestimmung des Schwerpunktes im vorliegenden Falle die Gleichungen

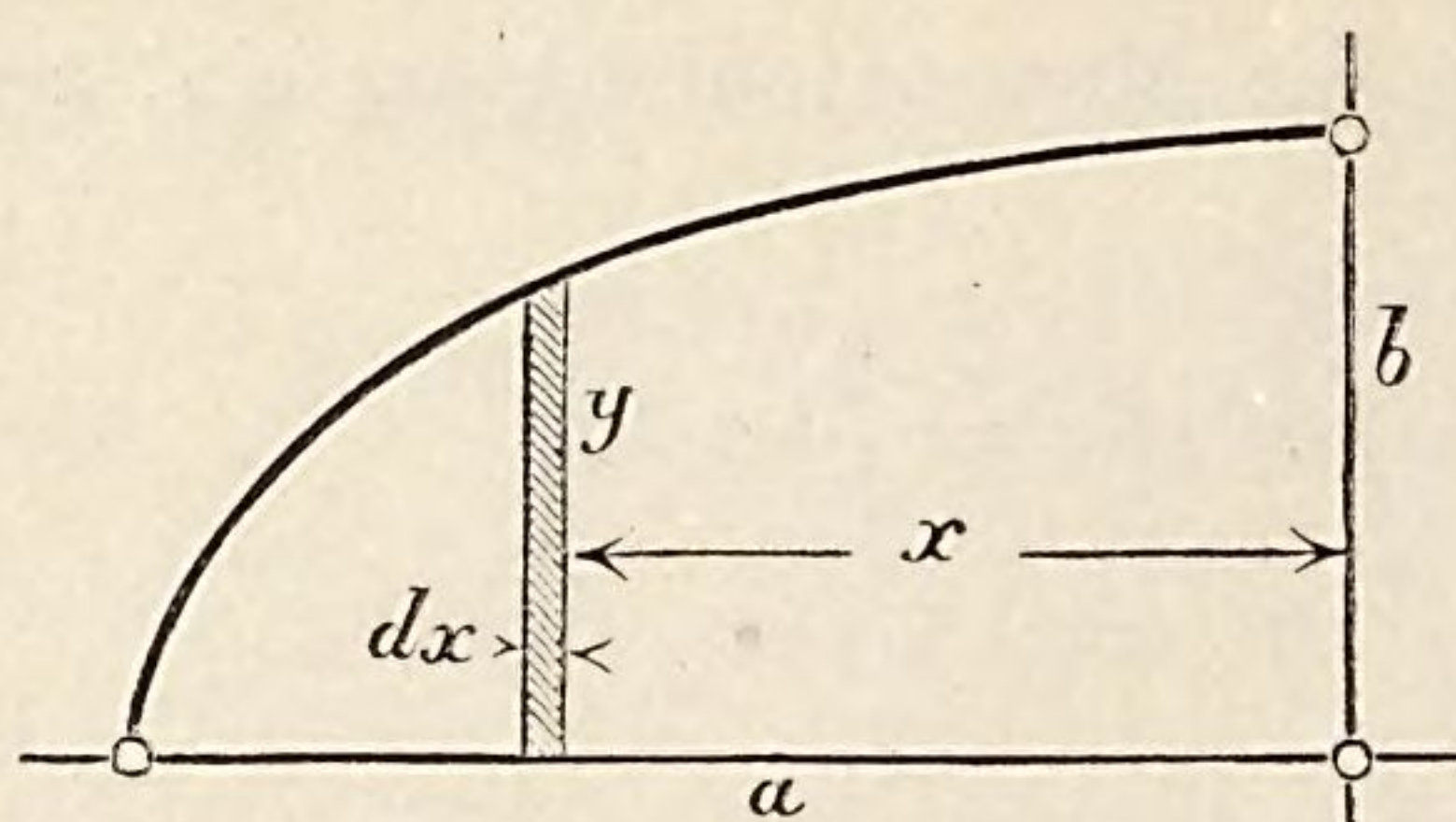


Fig. 262.

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F}$$

und

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}.$$

Nun ist mit Bezug auf
Fig. 262

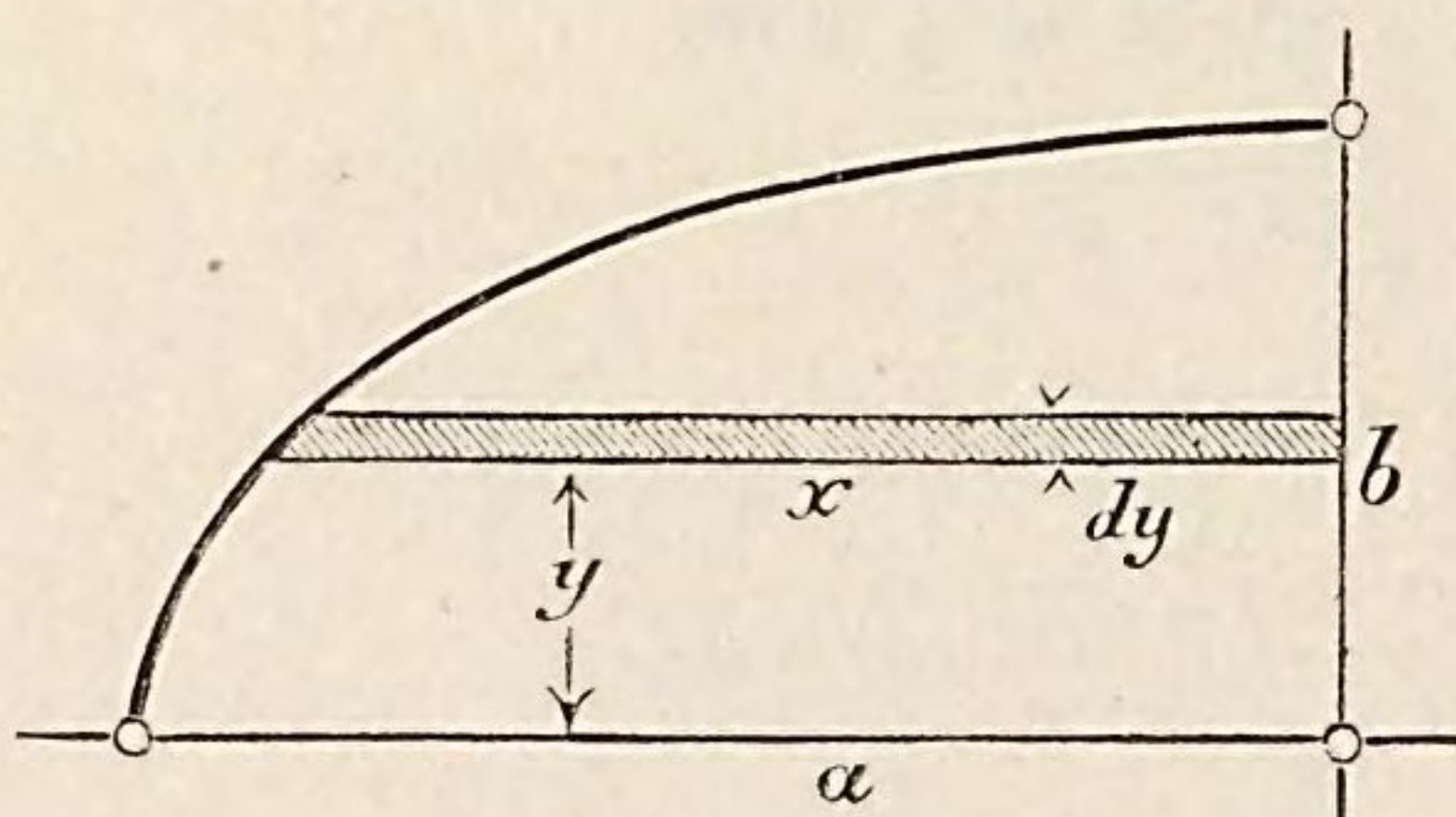


Fig. 263.

$$f = y \cdot dx$$

und

$$f \cdot x = y \cdot x \cdot dx,$$

und mittelst der Gleichung
der Ellipse erhält man

$$x \cdot dx = -\frac{a^2}{b^2} \cdot y \cdot dy,$$

folglich ist

$$\Sigma(f \cdot x) = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \int_b^0 y^2 \cdot dy = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot b.$$

Ferner ist

$$F = \frac{a \cdot b \cdot \pi}{4},$$

also

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}.$$

Mit Bezug auf Fig. 263 ist weiter

$$f = x \cdot dy,$$

$$f \cdot y = x \cdot y \cdot dy$$

und nach voriger Aufgabe

$$\Sigma(f \cdot y) = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b^2;$$

folglich ist

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{b}{\pi}.$$

Spezieller Fall: Wird $a = b = r$, die Fläche also eine Viertelkreisfläche, dann ist

$$\begin{aligned} x_0 = y_0 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \\ &= 0,425 \cdot r. \end{aligned}$$

Schwerpunkt der Parabelfläche.

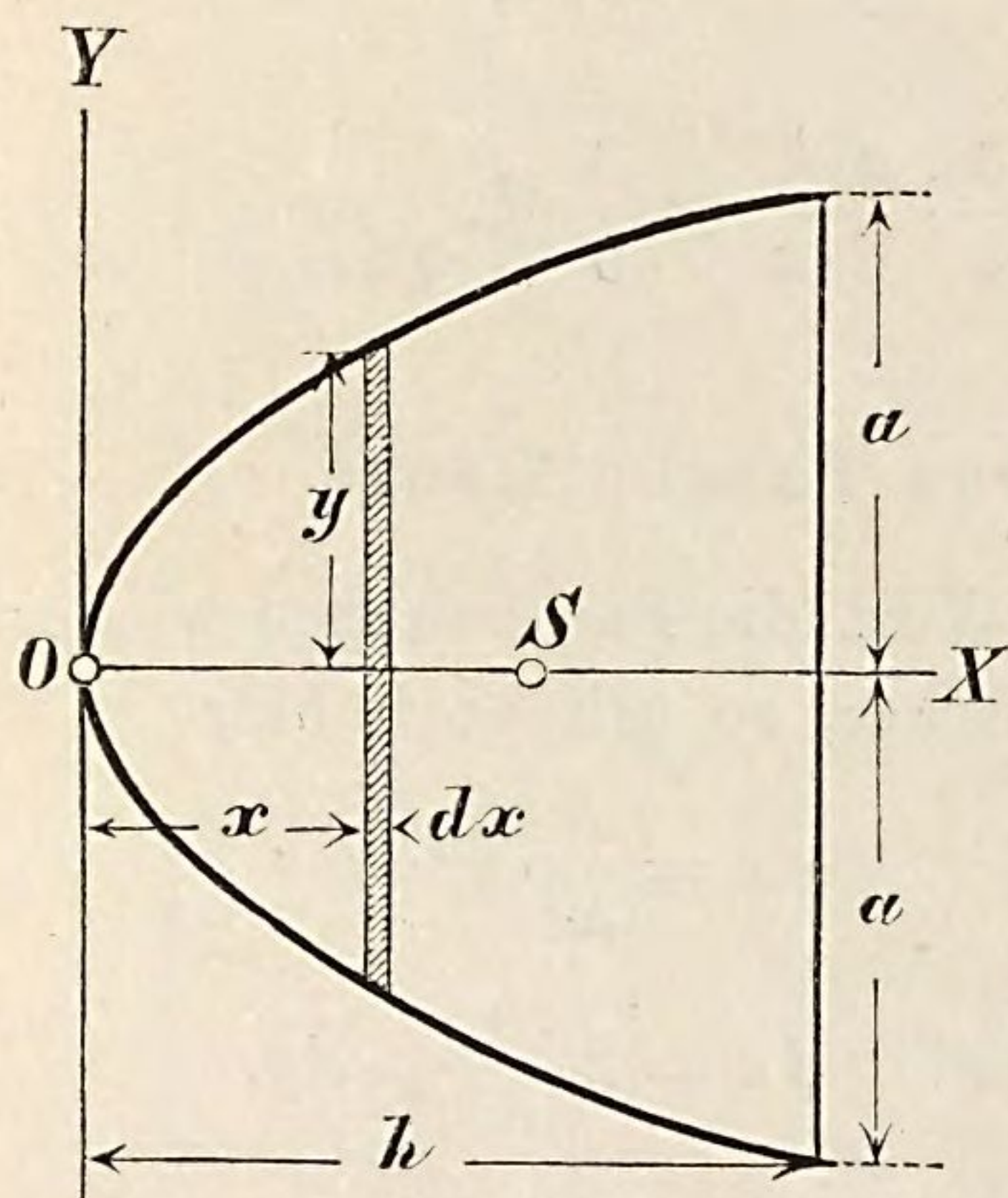


Fig. 264.

Wählt man die Achse der Parabel als X -Achse (Fig. 264), so ist letztere Schwerlinie, und es erübrigt nur die Bestimmung von

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F}$$

zur Ermittlung des Schwerpunktes der Parabelfläche.

Es ist

$$f = 2 \cdot y \cdot dx$$

und

$$f \cdot x = 2 \cdot y \cdot x \cdot dx;$$

da aber gilt

$$\frac{x}{h} = \frac{y^2}{a^2}$$

oder

$$x = \frac{h}{a^2} \cdot y^2$$

und

$$dx = \frac{2 \cdot h}{a^2} \cdot y \cdot dy,$$

so folgt

$$f \cdot x = 4 \cdot \frac{h^2}{a^4} \cdot y^4 \cdot dy$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \Sigma(f \cdot x) &= 4 \cdot \frac{h^2}{a^4} \cdot \int_0^a y^4 \cdot dy = 4 \cdot \frac{h^2}{a^4} \cdot \frac{a^5}{5} \\ &= \frac{4}{5} \cdot a \cdot h^2. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \int y \cdot dx \\ &= 4 \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \int_0^a y^2 \cdot dy = 4 \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{4}{3} \cdot a \cdot h \end{aligned}$$

und schliesslich

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{a \cdot h^2}{a \cdot h} = \frac{3}{5} \cdot h.$$

Schwerpunkt der halben Parabelfläche.

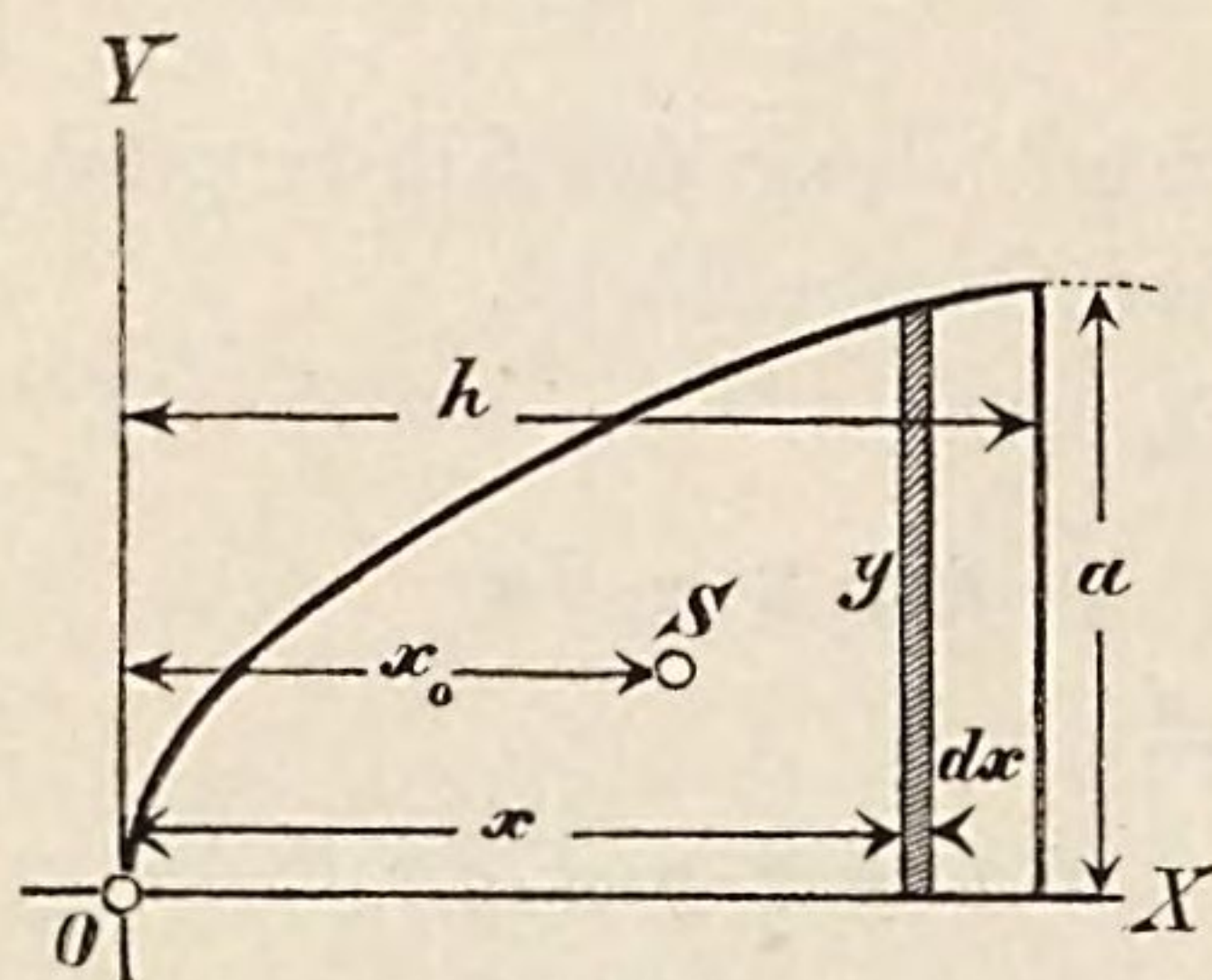


Fig. 265.

Wird die Parabelachse wieder X-Achse, so gilt auch hier

$$x = \frac{h}{a^2} \cdot y^2$$

und $dx = 2 \cdot \frac{h}{a^2} \cdot y \cdot dy.$

Nun ist

$$x_0 = \frac{\Sigma(f \cdot x)}{F},$$

nach Fig. 265

$$\begin{aligned} f &= y \cdot dx \\ &= 2 \cdot \frac{h}{a^2} \cdot y^2 \cdot dy \end{aligned}$$

und $F = \frac{2}{3} \cdot a \cdot h;$

ferner ist

$$\Sigma(f \cdot x) = \frac{2}{5} \cdot a \cdot h^2$$

und $x_0 = \frac{3}{5} \cdot h.$

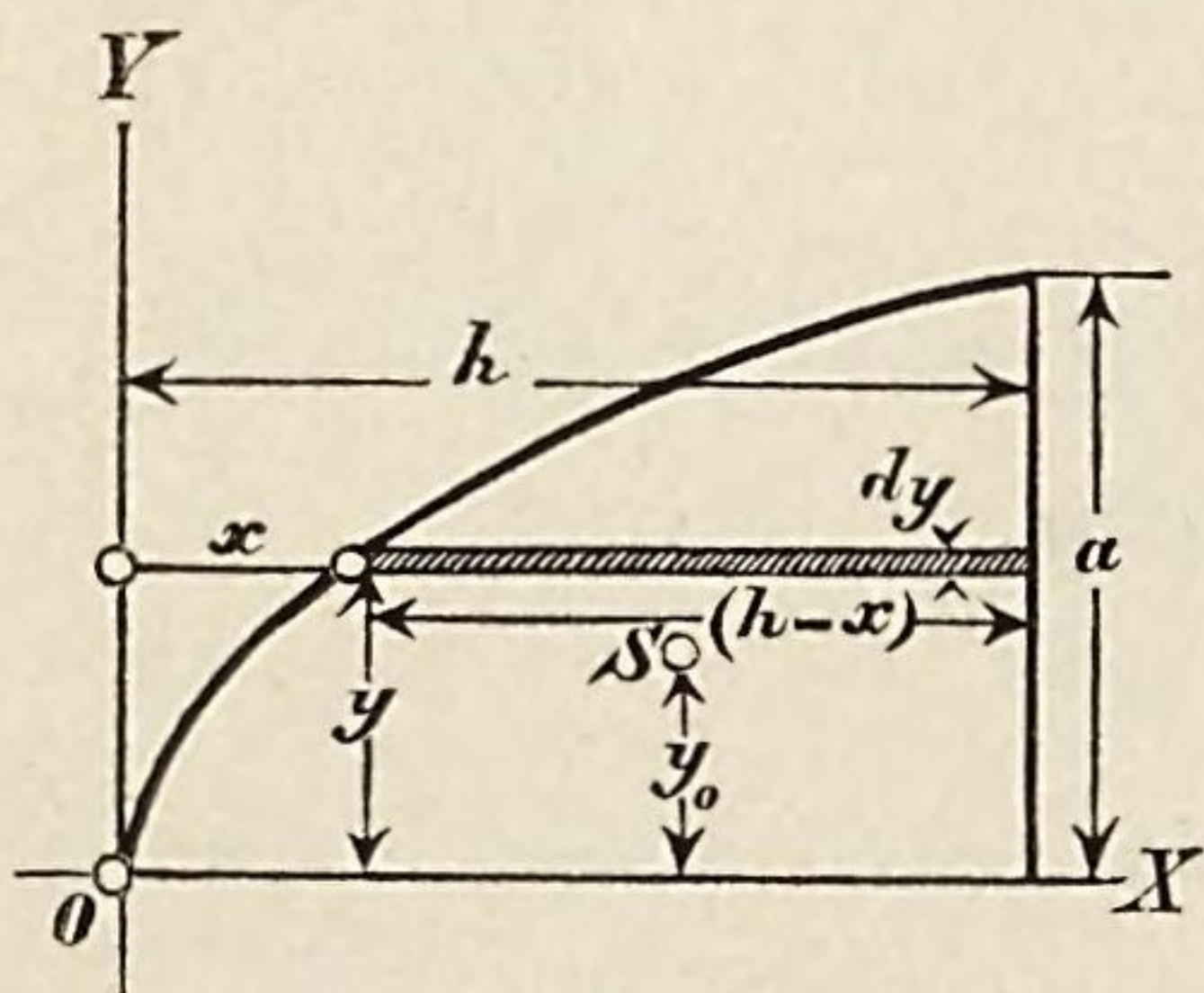


Fig. 266.

Weiter ist

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F},$$

nach Fig. 266

$$f = (h - x) \cdot dy = h \cdot \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \cdot dy,$$

$$f \cdot y = h \cdot \left(y - \frac{y^3}{a^2}\right) \cdot dy,$$

$$\begin{aligned} \Sigma(f \cdot y) &= h \cdot \int_0^a \left(y - \frac{y^3}{a^2}\right) \cdot dy \\ &= \frac{h \cdot a^2}{4}, \end{aligned}$$

folglich wird

$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot a.$$

Schwerpunkt der Cylinderfläche.

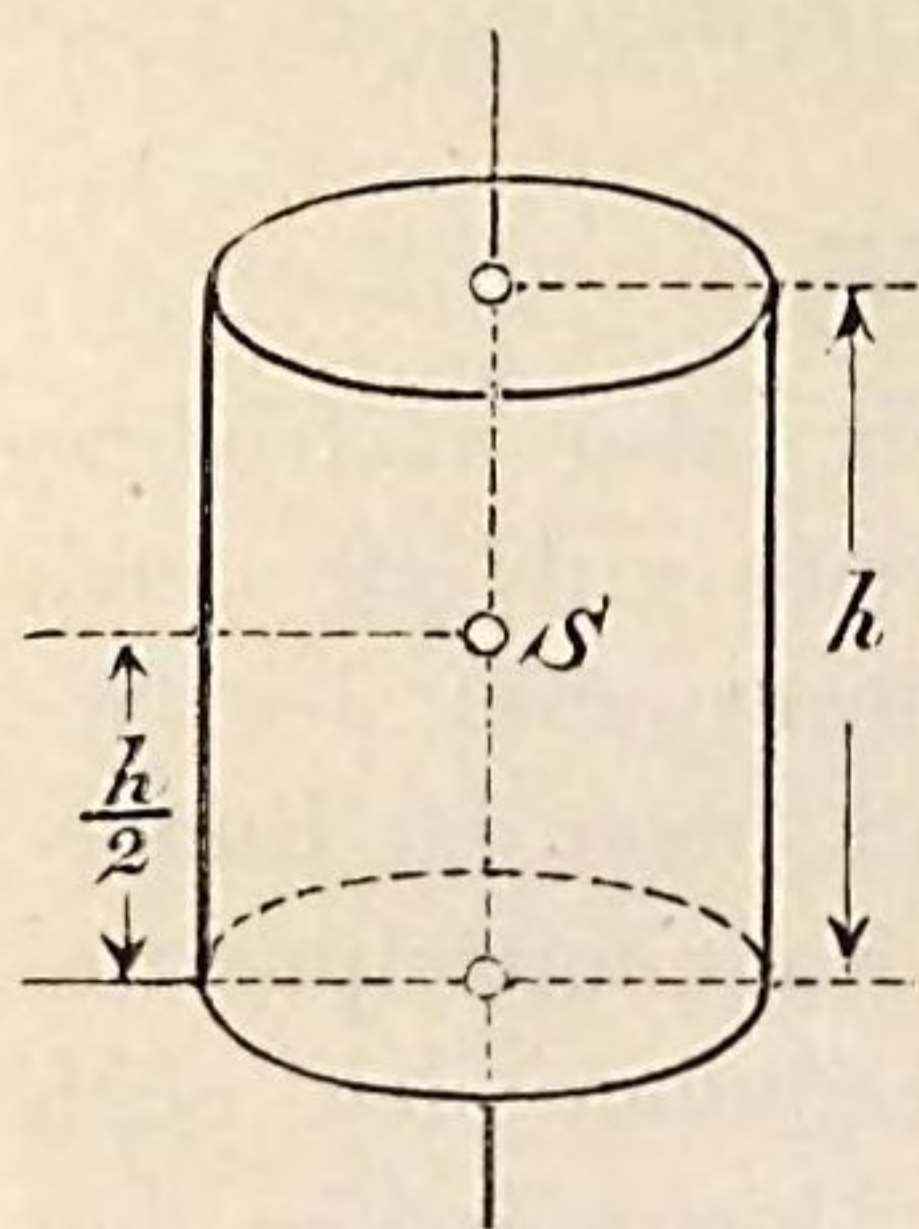


Fig. 267.

Ein Schnitt senkrecht zur Cylinderachse ist ein Kreis und dessen Schwerpunkt der Mittelpunkt; folglich liegen die Schwerpunkte sämtlicher Kreise auf der Cylinderachse und der Schwerpunkt der Oberfläche selbst in der Höhe $\frac{h}{2}$ jener Achse.

Schwerpunkt der Mantelfläche eines geraden Kegels.

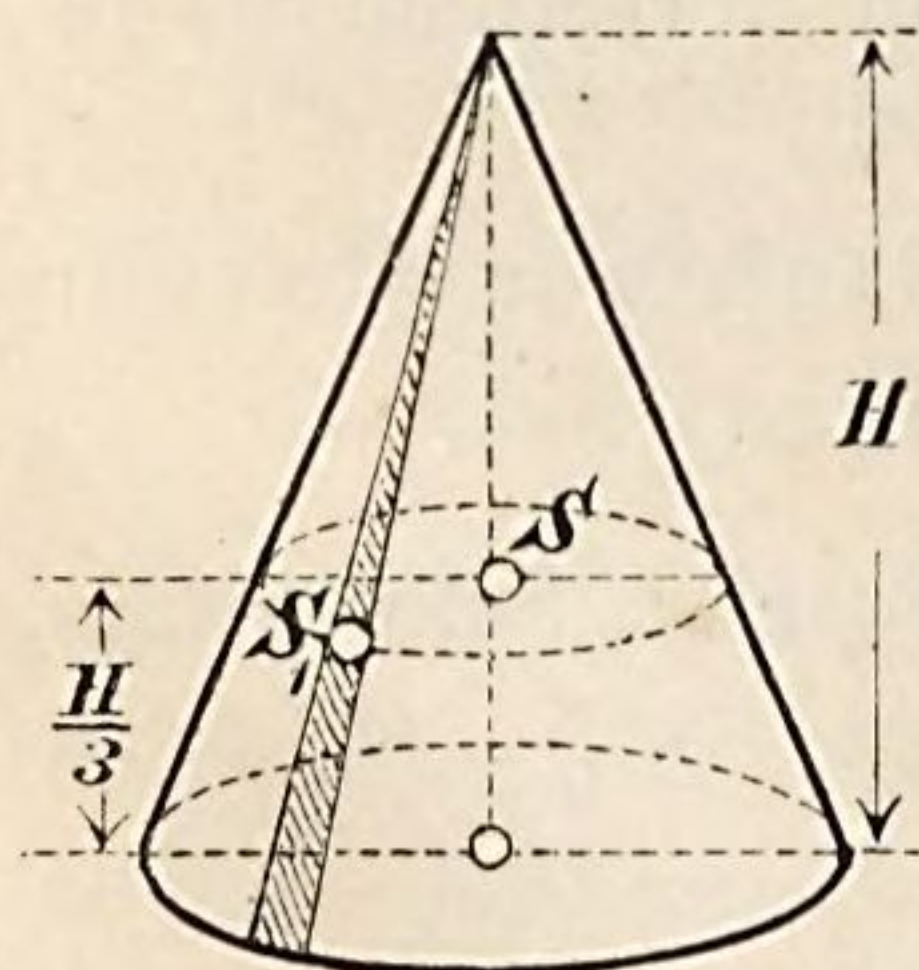


Fig. 268.

Zerlegt man die Mantelfläche (Fig. 268) von der Spitze nach der Basis in Elemente, so hat ein jedes derselben wegen der Dreiecksform seinen Schwerpunkt in $\frac{1}{3}$ der schiefen Höhe des Mantels. Daher liegen sämtliche Schwerpunkte dieser Elemente auf einem Kreise und der Schwerpunkt der Mantelfläche im Mittelpunkt desselben, $\frac{1}{3}H$ auf der Achse aufwärts.

Schwerpunkt einer Kugelschale.

Umschreibt man eine Kugeloberfläche F , wie in Fig. 269, mit einer Cylinderoberfläche F_1 und legt man senkrecht zur

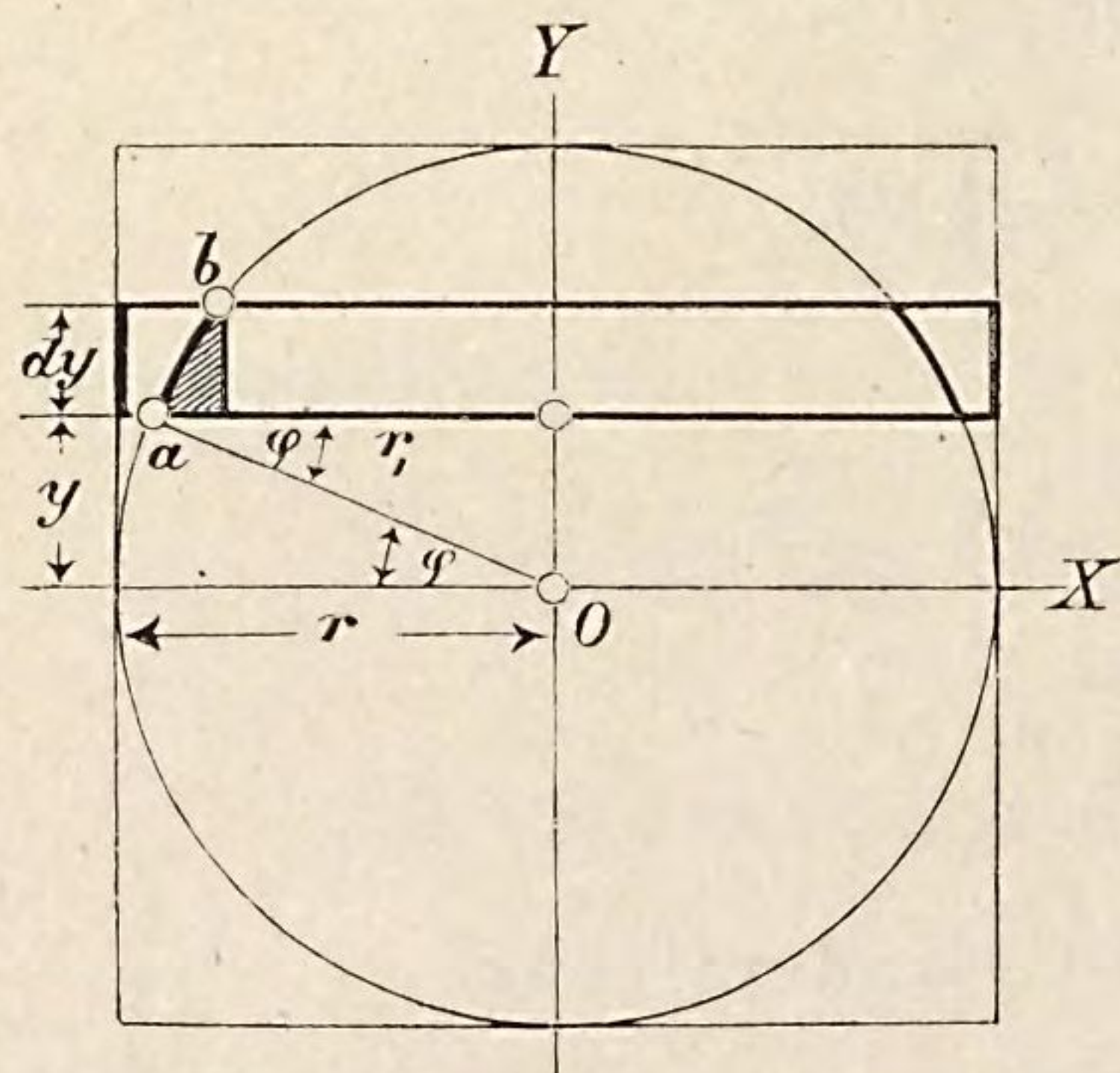


Fig. 269.

Cylinderachse zwei um dy von einander entfernte Schnitte, welche sowohl an der Cylinder-, als auch an der Kugeloberfläche Elemente dF und dF_1 abtrennen, so ist

$$dF = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dy$$

und

$$\begin{aligned} dF_1 &= 2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \widehat{ab} \\ &= 2 \cdot r_1 \cdot \pi \cdot \frac{dy}{\cos \varphi} \\ &= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dy, \end{aligned}$$

also

$$dF = dF_1,$$

d. h. die Elemente haben gleiche Oberflächen, also auch denselben Schwerpunkt. Was aber für die Elemente gilt, gilt auch für Summen derselben, deshalb fällt der Schwerpunkt der Cy-

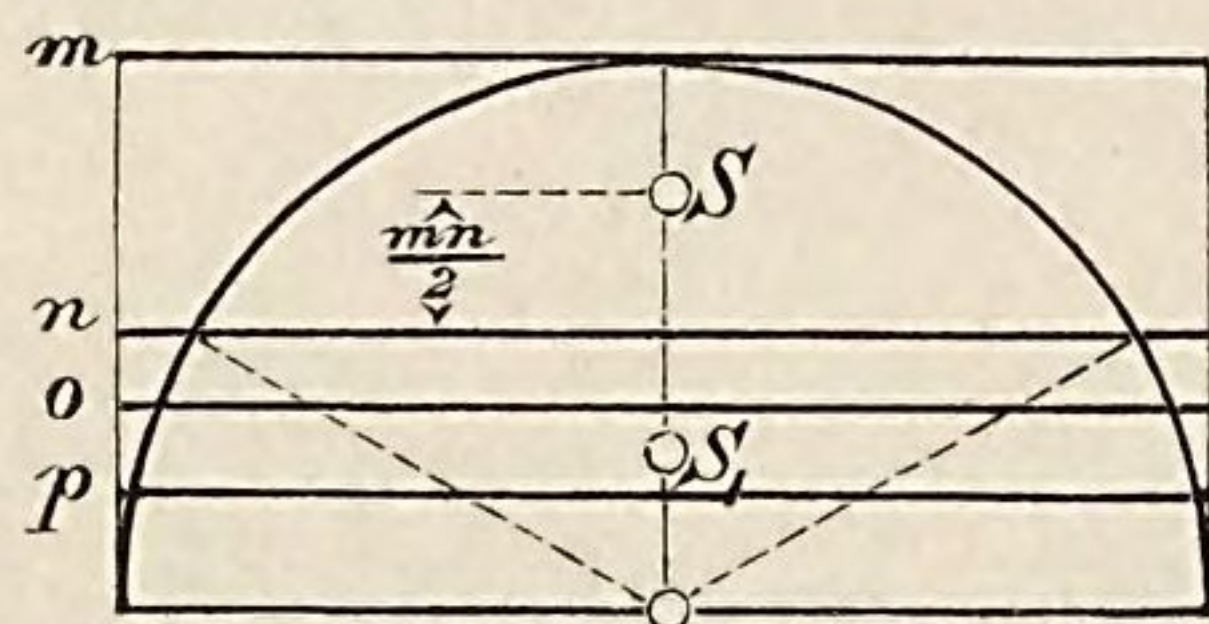


Fig. 270.

linderoberfläche mit dem der Kugeloberfläche, dem Kugelmittelpunkte, zusammen und befinden sich auch die Schwerpunkte der zwischen den Parallelschnitten m und n resp. o und p (Fig. 270) liegenden Oberflächentheile des Cylinders und der Kugel ebenfalls an derselben Stelle.

Schwerpunkte von durch Rotation beliebiger Curven entstandenen Oberflächen.

Ist die Y -Achse Rotationsachse (Fig. 271), also Schwerlinie, dann dient

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F}$$

allein zur Bestimmung des Schwerpunktes.

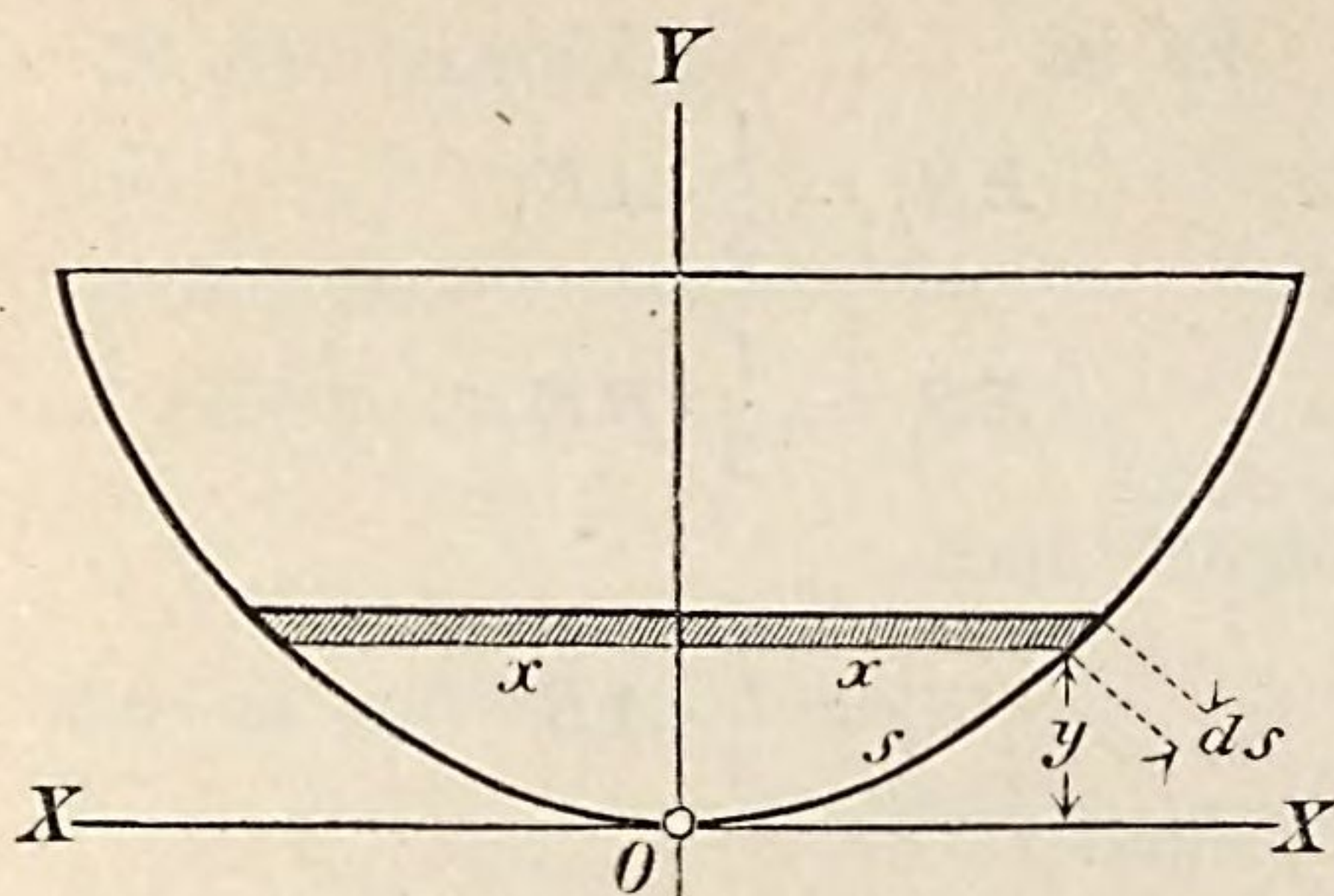


Fig. 271.

Ist gegeben

$$y = \varphi(x),$$

dann ist s durch x oder y auszudrücken und gilt

$$f = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot ds,$$

$$\Sigma(f \cdot y) = 2 \cdot \pi \cdot \int x \cdot y \cdot ds$$

und

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \int x \cdot ds;$$

folglich ist

$$y_0 = \frac{\Sigma(f \cdot y)}{F} = \frac{\int x \cdot y \cdot ds}{\int x \cdot ds}.$$

Schwerpunkt von einem dreiseitigen Prisma.

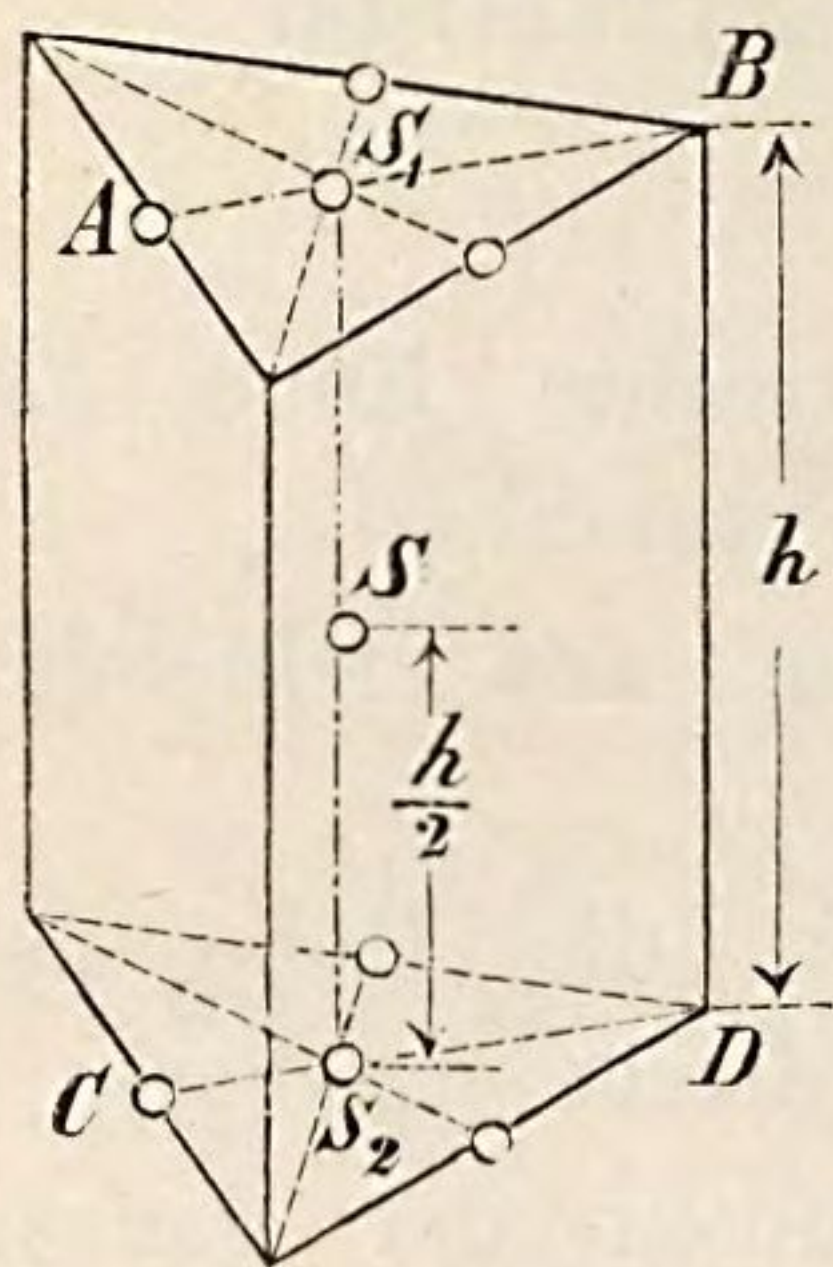


Fig. 272.

Die Schwerpunkte S_1 und S_2 der Endflächen des dreiseitigen Prismas (Fig. 272) bestimmen sich nach Früherem durch

$$AS_1 = CS_2 = \frac{AB}{3} = \frac{CD}{3},$$

und es gilt das Gleiche für die Schwerpunkte aller Parallelschnitte zu den Endflächen. Der Schwerpunkt S des Prismas liegt daher auf der Geraden $S_1 S_2$, welche alle Querschnittschwerpunkte aufnimmt, also in der Entfernung $\frac{h}{2}$ von einer der Endflächen.

Dasselbe Resultat gilt auch für andere Prismen und Cylinder.

Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide.

Ist S_1 der Schwerpunkt der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide (Fig. 273), dann ist die Linie AS_1 Schwerlinie derselben; und ist S_2 der Schwerpunkt der Fläche ACD , dann ist auch BS_2 Schwerlinie und der Durchschnitt S von AS_1 und BS_2 der Schwerpunkt der dreiseitigen Pyramide.

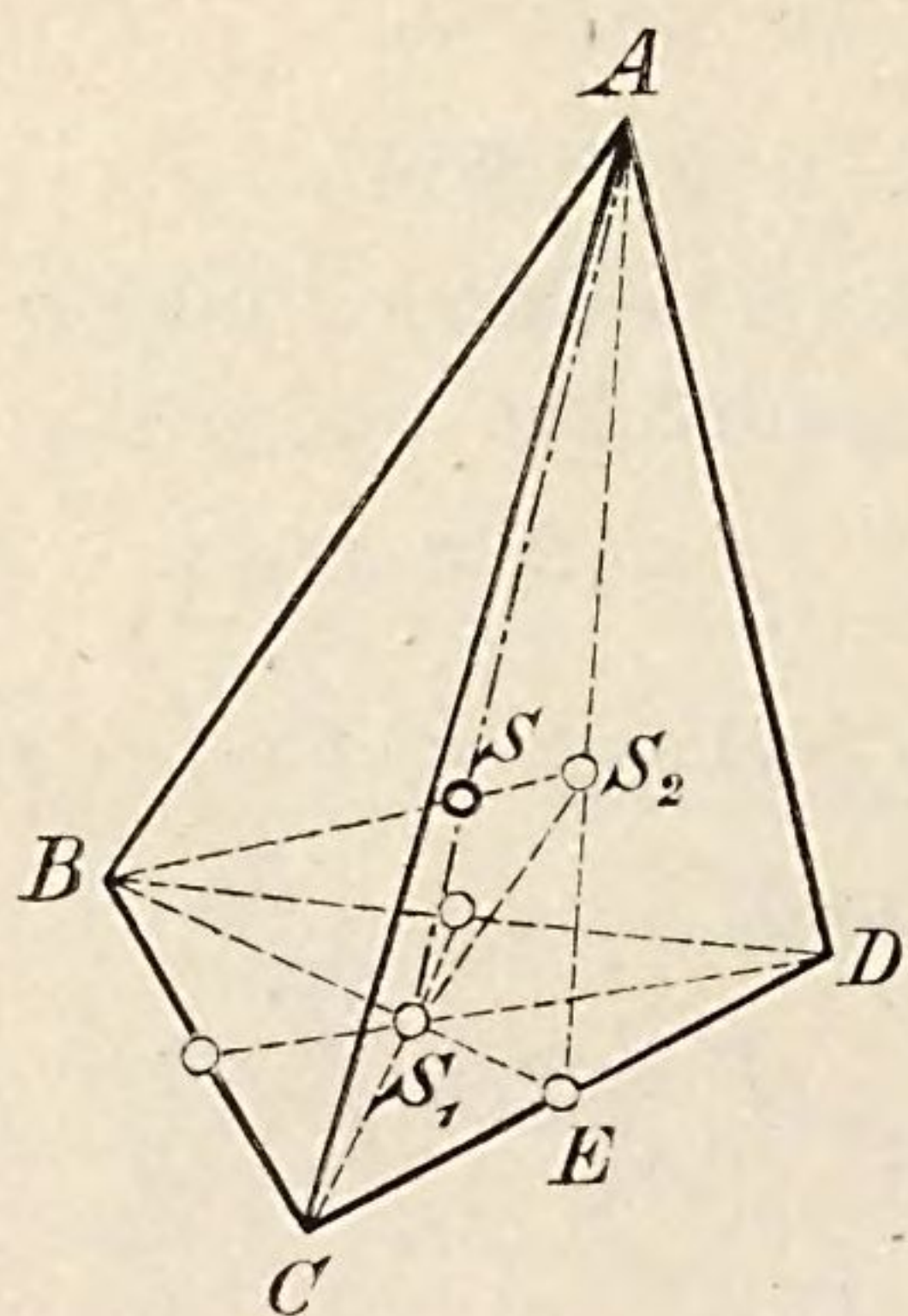


Fig. 273.

Es ist

$$ES_2 = \frac{1}{3} \cdot AE,$$

$$ES_1 = \frac{1}{3} \cdot BE,$$

folglich auch

$$S_1 S_2 = \frac{1}{3} \cdot AB$$

und

$$S_1 S = \frac{1}{3} \cdot AS = \frac{1}{4} \cdot AS_1;$$

hiernach liegt der Schwerpunkt S der Pyramide um ein Viertel der senkrechten Höhe von der Grundfläche entfernt.

Dasselbe Resultat gilt auch für andere Pyramiden und Kegel.

Schwerpunkt einer abgestutzten Pyramide.

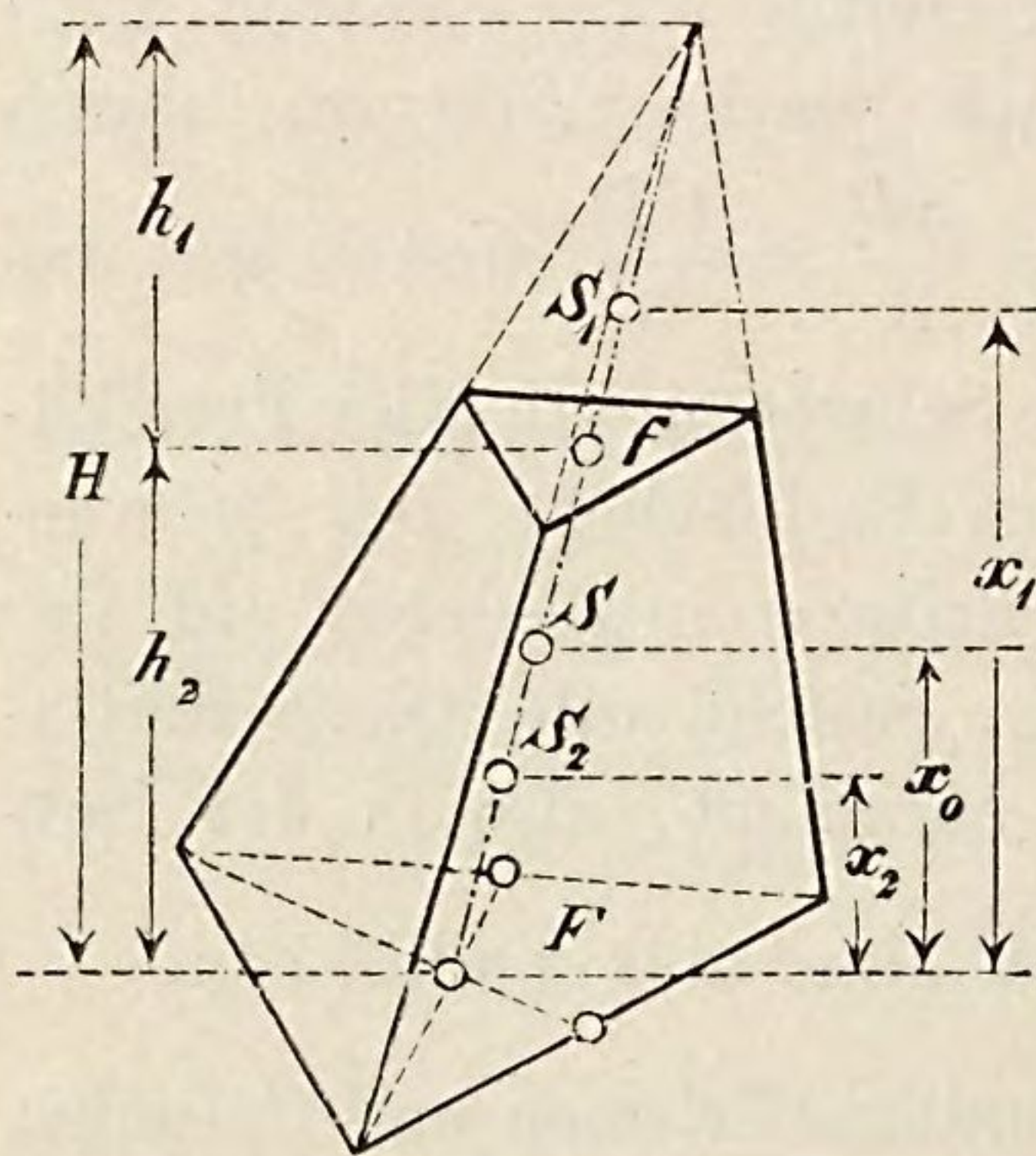


Fig. 274.

Es sei

H die senkrechte Höhe der ganzen Pyramide,

h_1 die Höhe des fehlenden Theiles,

$h_2 = H - h_1$ die Höhe des Stutzes (direct messbar),

V das Volumen der ganzen Pyramide,

v_1 das fehlende Volumen,

und

v_2 das Volumen des Stutzes;

ferner sei

x_0 der senkrechte Abstand des Schwerpunktes S der ganzen Pyramide von der Grundfläche,

x_1 der Schwerpunktsabstand des fehlenden Theiles,

x_2 der Abstand des Schwerpunktes S_2 der abgestutzten Pyramide,

F die Grundfläche,
und
 f die parallele Schnittfläche.

Allgemein gilt

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V}$$

oder im vorliegenden Falle

$$V \cdot x_0 = v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2$$

und

$$x_2 = \frac{V \cdot x_0 - v_1 \cdot x_1}{v_2}.$$

Hierin ist

$$V = \frac{F \cdot H}{3},$$

$$x_0 = \frac{1}{4} \cdot H,$$

$$v_1 = \frac{f \cdot h_1}{3},$$

$$x_1 = \frac{1}{4} \cdot h_1 + h_2,$$

$$v_2 = V - v_1 = \frac{1}{3} \cdot (F \cdot H - f \cdot h_1).$$

H und h_1 müssen in den vorstehenden Werthen noch durch die direct messbare Höhe h_2 ausgedrückt werden.

Es ist

$$\frac{H^2}{h_1^2} = \frac{F}{f},$$

$$\frac{H}{h_1} = \sqrt{\frac{F}{f}}$$

und

$$h_1 = H - h_2,$$

folglich ist

$$H = \sqrt{\frac{F}{f}} \cdot (H - h_2)$$

oder

$$H = \frac{h_2}{1 - \sqrt{\frac{f}{F}}};$$

ferner ist

$$H = h_1 + h_2,$$

welcher Werth in

$$\frac{H}{h_1} = \sqrt{\frac{F}{f}}$$

eingesetzt,

$$h_1 = \frac{h_2}{\sqrt{\frac{F}{f}} - 1}$$

liefert.

Somit resultirt nun

$$x_2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot (F \cdot H^2 - f \cdot h_1^2) - f \cdot h_1 \cdot h_2}{F \cdot H - f \cdot h_1}.$$

Schwerpunkt einer Pyramide von beliebiger Grundfläche.

Allgemein ist

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V}$$

und mit Bezug auf Fig. 275 ist hierin

$$\begin{aligned} v &= dV \\ &= f \cdot dx; \end{aligned}$$

es gilt aber

$$\frac{f}{F} = \frac{x^2}{h^2},$$

$$\text{also } f = \frac{F}{h^2} \cdot x^2,$$

oder

$$v = f \cdot dx = \frac{F}{h^2} \cdot x^2 \cdot dx$$

und

$$V = \frac{F}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{F \cdot h}{3}.$$

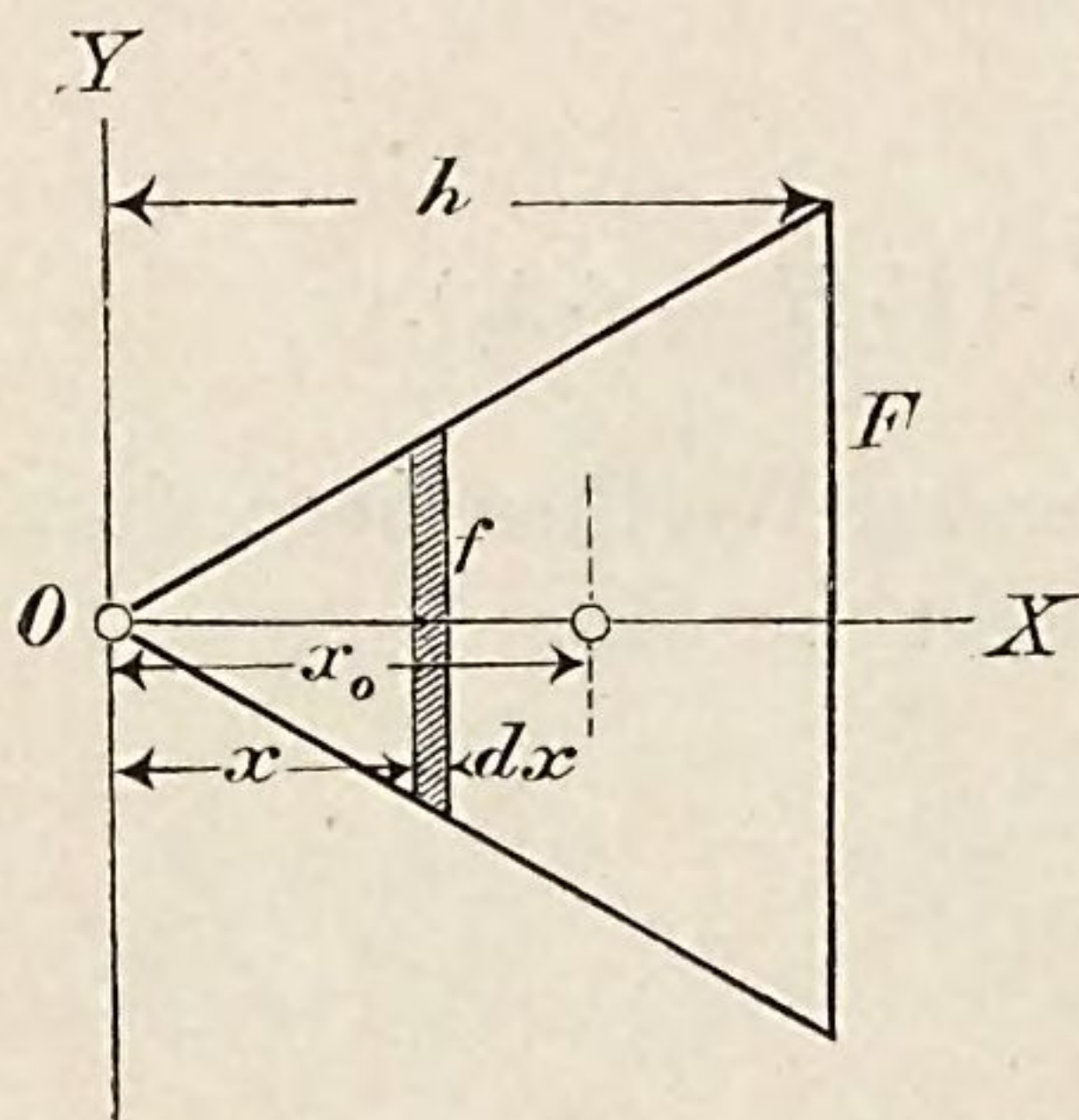


Fig. 275.

Ferner ist

$$v \cdot x = \frac{F}{h^2} \cdot x^3 \cdot dx$$

und

$$\Sigma(v \cdot x) = \frac{F}{h^2} \cdot \int_0^h x^3 \cdot dx = \frac{F \cdot h^2}{4}.$$

Es resultirt somit der Schwerpunktsabstand von der Spitze

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V} = \frac{3}{4} \cdot h,$$

und von der Grundfläche gleich

$$\frac{1}{4}h,$$

wie oben.

Schwerpunkt eines Rotations-Paraboloids.

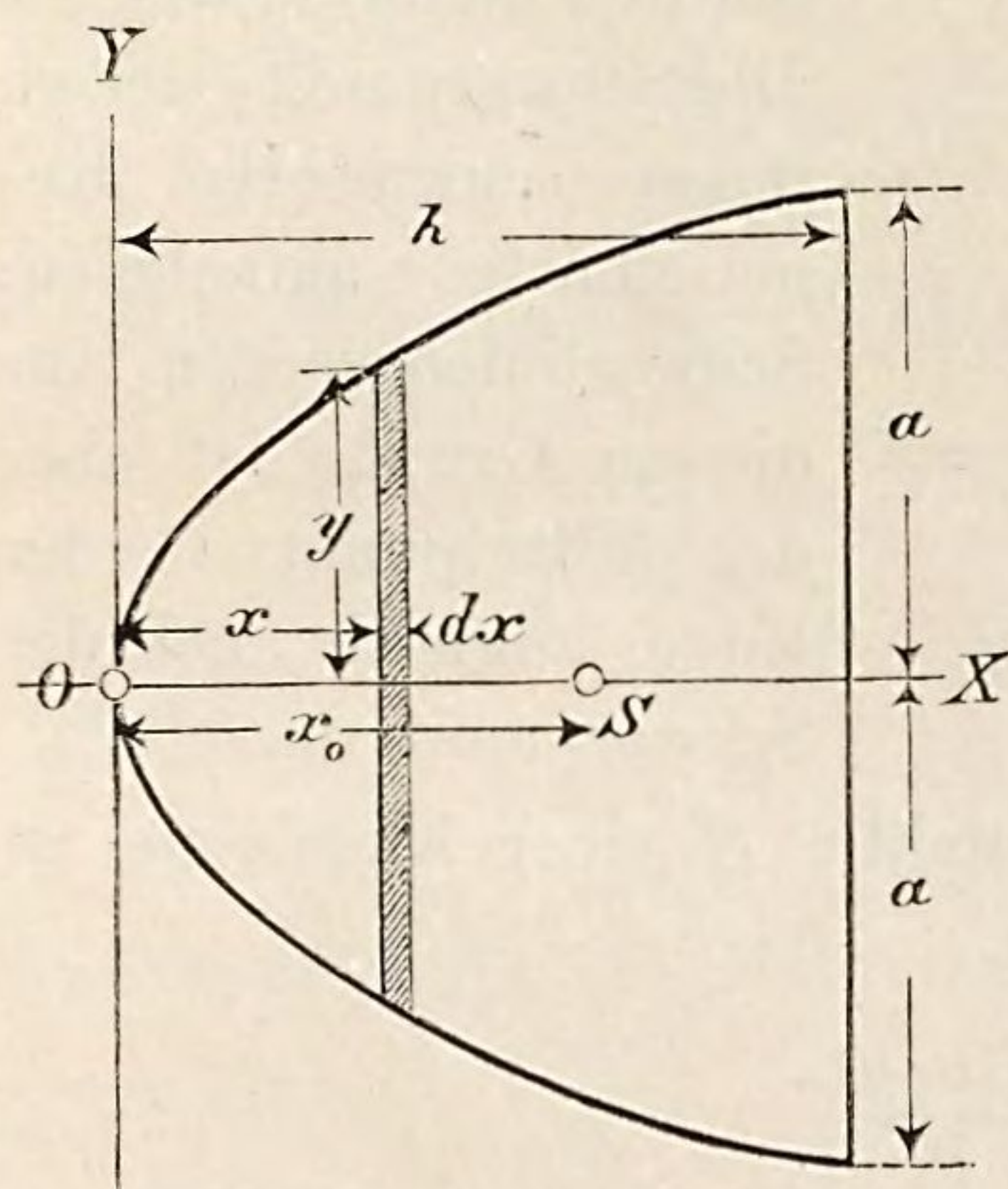


Fig. 276.

Legt man die X -Achse mit der Rotationsachse des Rotations-Paraboloids (Fig. 276) zusammen, so wird dieselbe Schwerlinie, und es bleibt nur zu bestimmen

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V}.$$

Es ist

$$v = y^2 \cdot \pi \cdot dx$$

und

$$y = f(x); \quad \frac{y^2}{a^2} = \frac{x}{h}$$

oder

$$y^2 = \frac{a^2}{h} \cdot x;$$

folglich

$$v = \pi \cdot \frac{a^2}{h} \cdot x \cdot dx$$

und

$$V = \pi \cdot \frac{a^2}{h} \cdot \int_0^h x \cdot dx = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot h}{2}.$$

Ferner ist

$$v \cdot x = \pi \cdot \frac{a^2}{h} \cdot x^2 \cdot dx,$$

$$\Sigma(v \cdot x) = \pi \cdot \frac{a^2}{h} \cdot \int_0^h x^2 \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot a^2 \cdot h^2 \cdot \pi$$

und durch Einsetzung der Werthe ergibt sich

$$x_0 = \frac{\Sigma(v \cdot x)}{V} = \frac{2}{3} \cdot h.$$

Schwerpunkt einer Kugelzone von der Dicke $(h_1 - h)$.

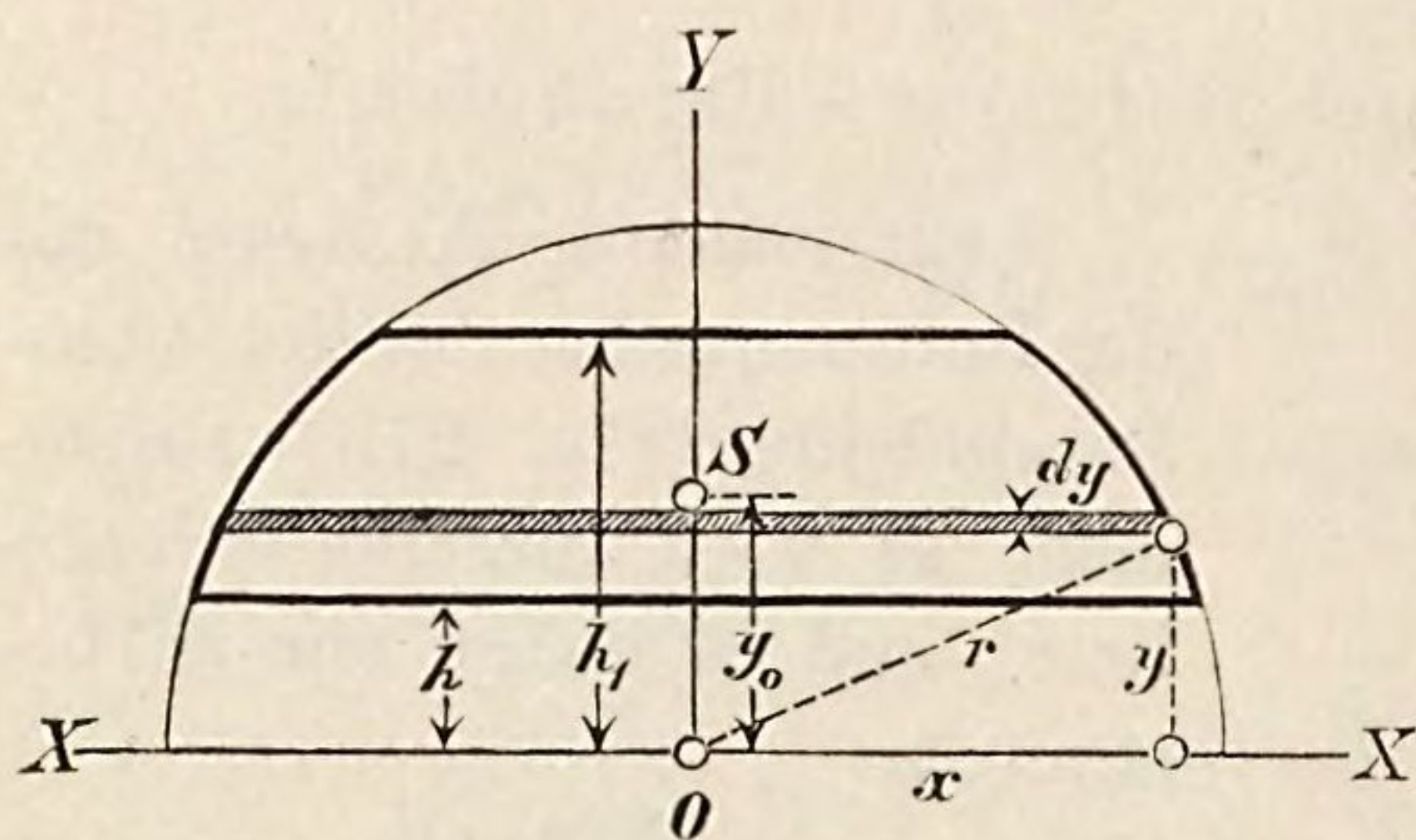


Fig. 277.

Die X - und Y -Achse mögen durch den Mittelpunkt O der Kugel laufen und dadurch, weil sie alle Schwerpunkte der zu ihnen senkrechten Kugelschnitte aufnehmen, Schwerlinien werden. Aus diesem Grunde ist aber der Mittelpunkt O der Kugel zugleich auch der Schwerpunkt derselben.

Zur Ermittlung des Schwerpunktes S einer Kugelzone ist nun lediglich die Berechnung von

$$y_0 = \frac{\Sigma(v \cdot y)}{V}$$

erforderlich.

Hierin ist im vorliegenden Falle mit Rücksicht auf Fig. 277

$$v = x^2 \cdot \pi \cdot dy$$

und

$$x^2 = r^2 - y^2$$

oder

$$v = (r^2 - y^2) \cdot \pi \cdot dy.$$

Durch Integration in den Grenzen h und h_1 ergibt sich

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_h^{h_1} (r^2 - y^2) \cdot dy \\ &= \pi \cdot \left\{ \left(r^2 \cdot h_1 - \frac{h_1^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot h - \frac{h^3}{3} \right) \right\} \\ &= \pi \cdot \left\{ r^2 \cdot (h_1 - h) - \frac{1}{3} \cdot (h_1^3 - h^3) \right\}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} v \cdot y &= \pi \cdot (r^2 - y^2) \cdot y \cdot dy \\ \text{und } \Sigma(v \cdot y) &= \pi \cdot \int_h^{h_1} (r^2 \cdot y - y^3) \cdot dy \\ &= \pi \cdot \left\{ \frac{r^2}{2} \cdot (h_1^2 - h^2) - \frac{1}{4} \cdot (h_1^4 - h^4) \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ r^2 \cdot (h_1^2 - h^2) - \frac{1}{2} \cdot (h_1^4 - h^4) \right\}. \end{aligned}$$

Mit den erhaltenen Werthen ergibt sich

$$y_0 = \frac{\Sigma(v \cdot y)}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot (h_1^2 - h^2) - \frac{1}{2} \cdot (h_1^4 - h^4)}{r^2 \cdot (h_1 - h) - \frac{1}{3} \cdot (h_1^3 - h^3)}.$$

Erster specieller Fall: $h = 0$ und $h_1 = r$ liefert den Schwerpunkt für die Halbkugel, also

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^4 - \frac{1}{2} \cdot r^4}{r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^3} = \frac{3}{8} \cdot r.$$

Zweiter specieller Fall: Für ein Kugelsegment ist $h_1 = r$ zu setzen, und es gilt zur Bestimmung des Schwerpunktes

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(r^2 - h^2)^2}{2 \cdot r^3 - 3 \cdot r^2 \cdot h + h^3}.$$

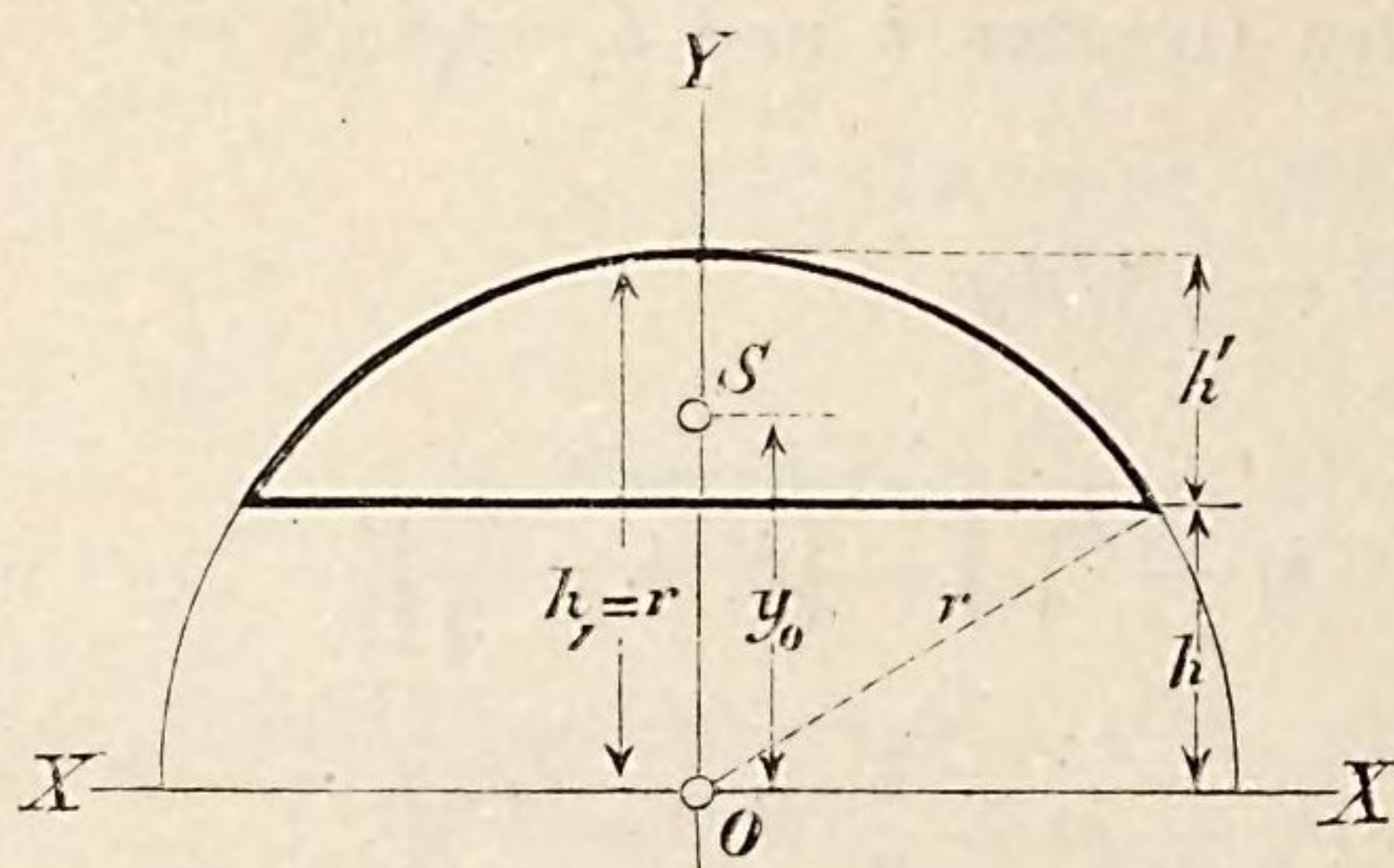


Fig. 278.

Führt man in diese Gleichung die Höhe h' des Segmentes ein, setzt man also

$$h = r - h',$$

so folgt

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h')^2}{(3r - h')};$$

und würde man beispielsweise für die Halbkugel

$h' = r$ setzen, so würde aus dieser Gleichung — wie oben — folgen

$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot r.$$

Schwerpunkt des Kugelausschnittes.

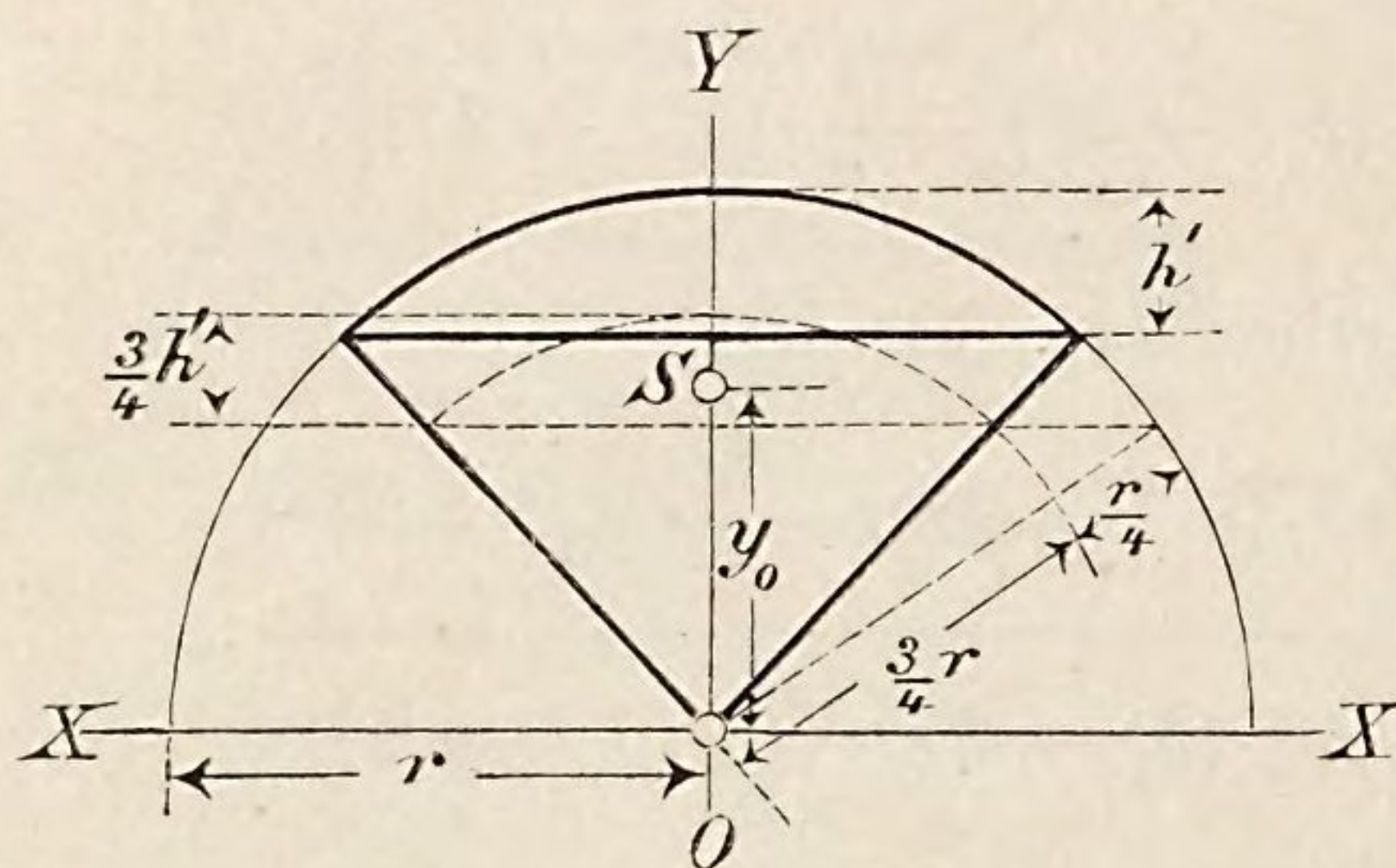


Fig. 279.

Zerlegt man den Kugelausschnitt (Fig. 279) in pyramidale Elemente, deren Spitzen in O liegen, dann finden sich die Schwerpunkte derselben auf einer Kugelhaube vom Halbmesser $\frac{3}{4} \cdot r$, weshalb der

Schwerpunkt dieser Haube der Schwerpunkt des Kugelausschnittes wird. Letzterer bestimmt sich aber nach Früherem mit Bezug auf Fig. 280 durch

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot r - \frac{3}{8} \cdot h'$$

oder durch

$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot (2r - h').$$

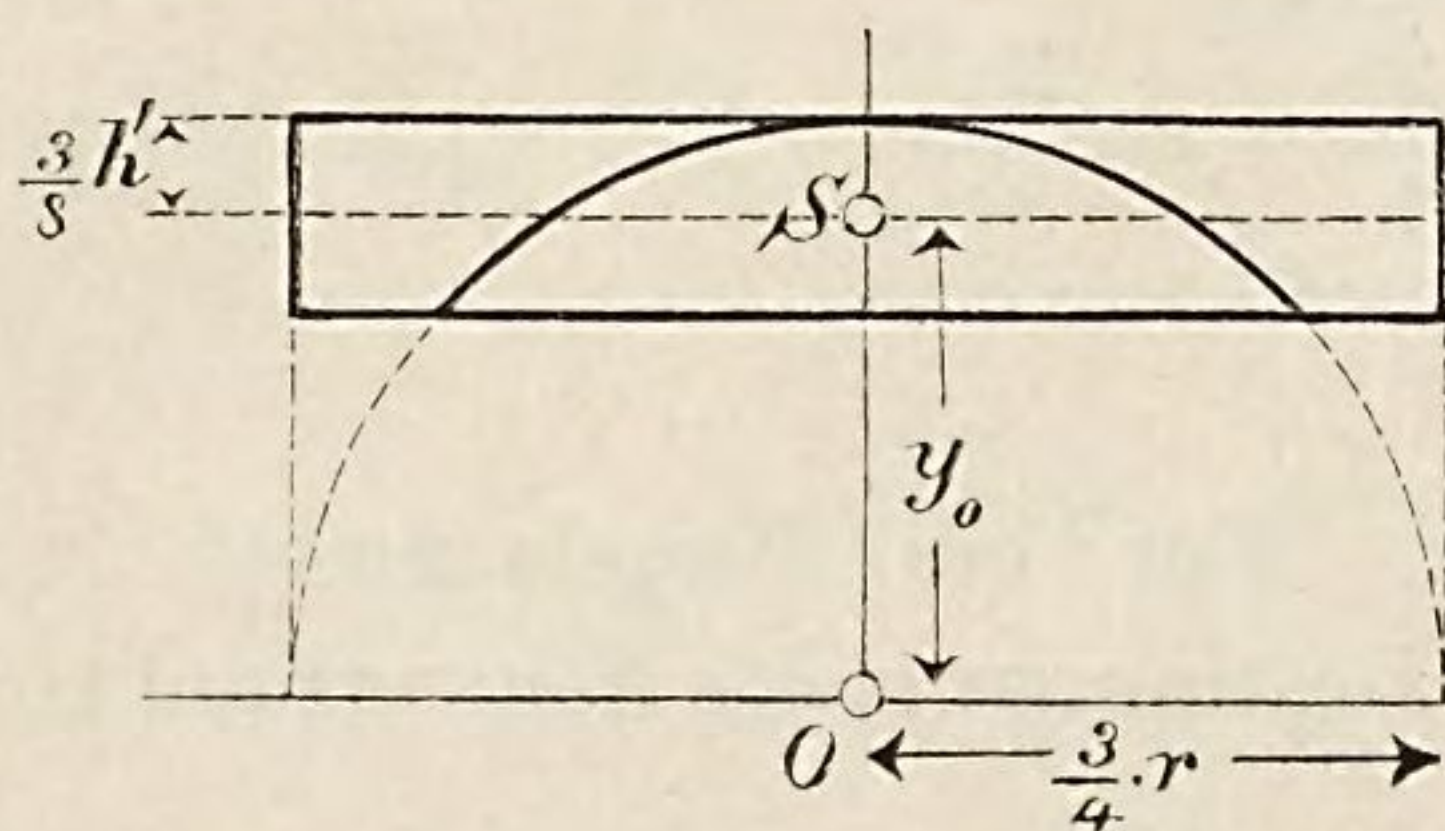


Fig. 280.

Spezieller Fall: Für die Halbkugel ist

$$h' = r,$$

also
$$y_0 = \frac{3}{8} \cdot r.$$

Schwerpunkt des halben Ellipsoids.

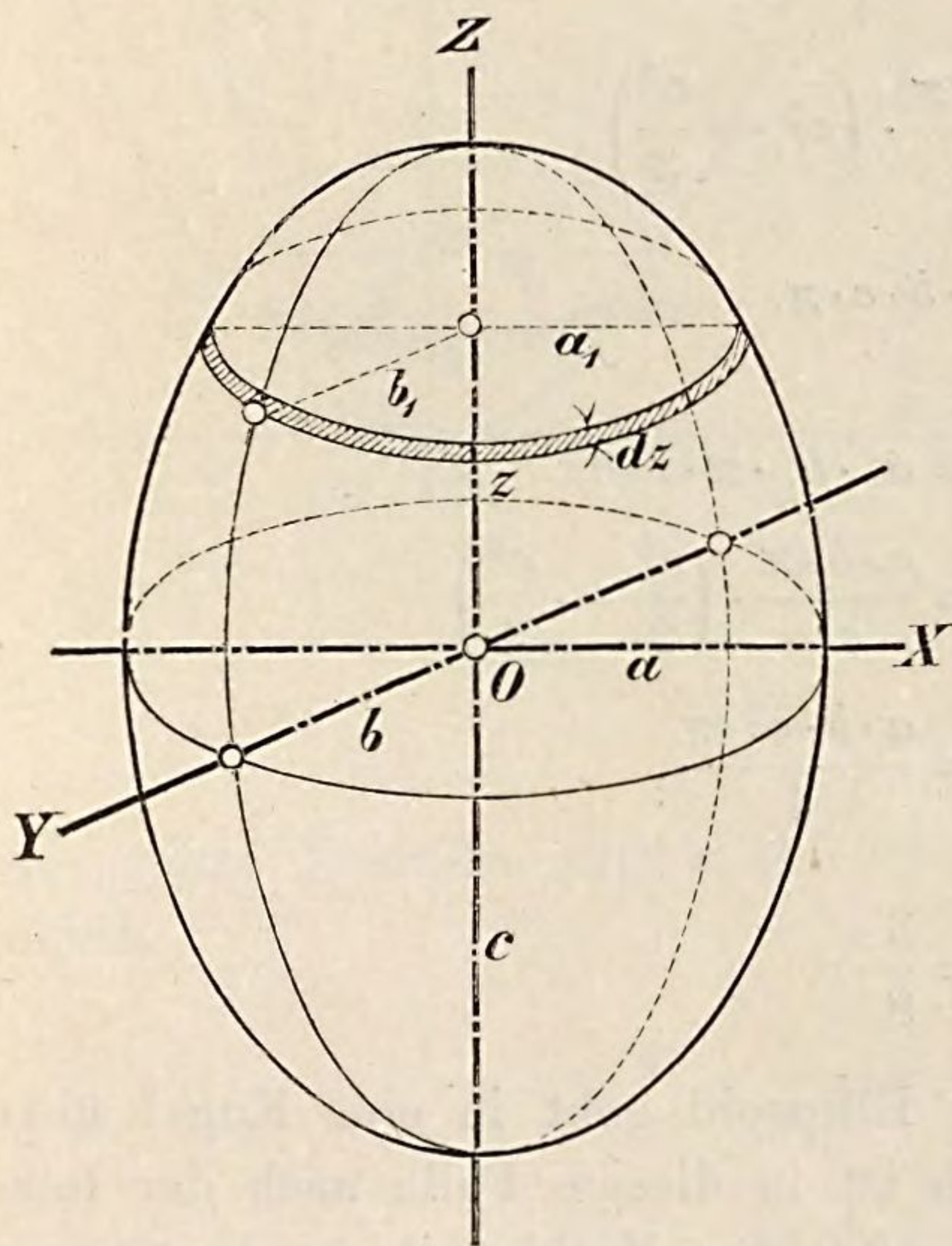


Fig. 281.

Die senkrecht aufeinander stehenden Achsen X, Y, Z (Fig. 281) schneiden sich im Mittelpunkte O des Ellipsoides. Die durch die XY -Ebene erzeugte Schnittlinie bildet eine Ellipse mit den Halbachsen a und b , die durch die XZ -Ebene erzeugte Schnittlinie eine Ellipse mit den Halbachsen a und c und die durch die YZ -Ebene hervorgebrachte Schnittlinie eine Ellipse mit den Halbachsen b und c .

Die Gleichungen der beiden letzten Ellipsen sind

$$\frac{a_1^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{b_1^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

aus welchen sich die Achsen der ersten Ellipse ergeben durch

$$a_1 = \frac{a}{c} \cdot \sqrt{c^2 - z^2}$$

und
$$b_1 = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{c^2 - z^2}.$$

Zur Bestimmung des Schwerpunktes dient

$$z_0 = \frac{\Sigma(v \cdot z)}{V},$$

und hierin ist

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cdot b_1 \cdot \pi \cdot dz \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot (c^2 - z^2) \cdot dz, \end{aligned}$$

folglich ist

$$\begin{aligned} V &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \int_0^c (c^2 - z^2) \cdot dz, \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) \end{aligned}$$

oder
$$V = \frac{2}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi.$$

Weiter ist

und
$$\begin{aligned} \Sigma(v \cdot z) &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(\frac{c^4}{2} - \frac{c^4}{4} \right) \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c^2 \cdot \pi}{4}, \end{aligned}$$

folglich ist

$$z_0 = \frac{3}{8} \cdot c.$$

Spezieller Fall: Das Ellipsoid geht in eine Kugel über für $a = b = c = r$, folglich ist in diesem Falle nach der letzten Gleichung der Schwerpunkt der Halbkugel zu bestimmen nach

$$z_0 = \frac{3}{8} \cdot r,$$

wie oben.

Schwerpunkt des elliptischen Paraboloids.

Die Fig. 282 zeigt ein elliptisches Paraboloid mit der Achse Z , in welchem die Schnittlinien der XZ - und der YZ -Ebene Parabeln mit den Gleichungen

$$\frac{z}{h} = \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{b^2}$$

sind.

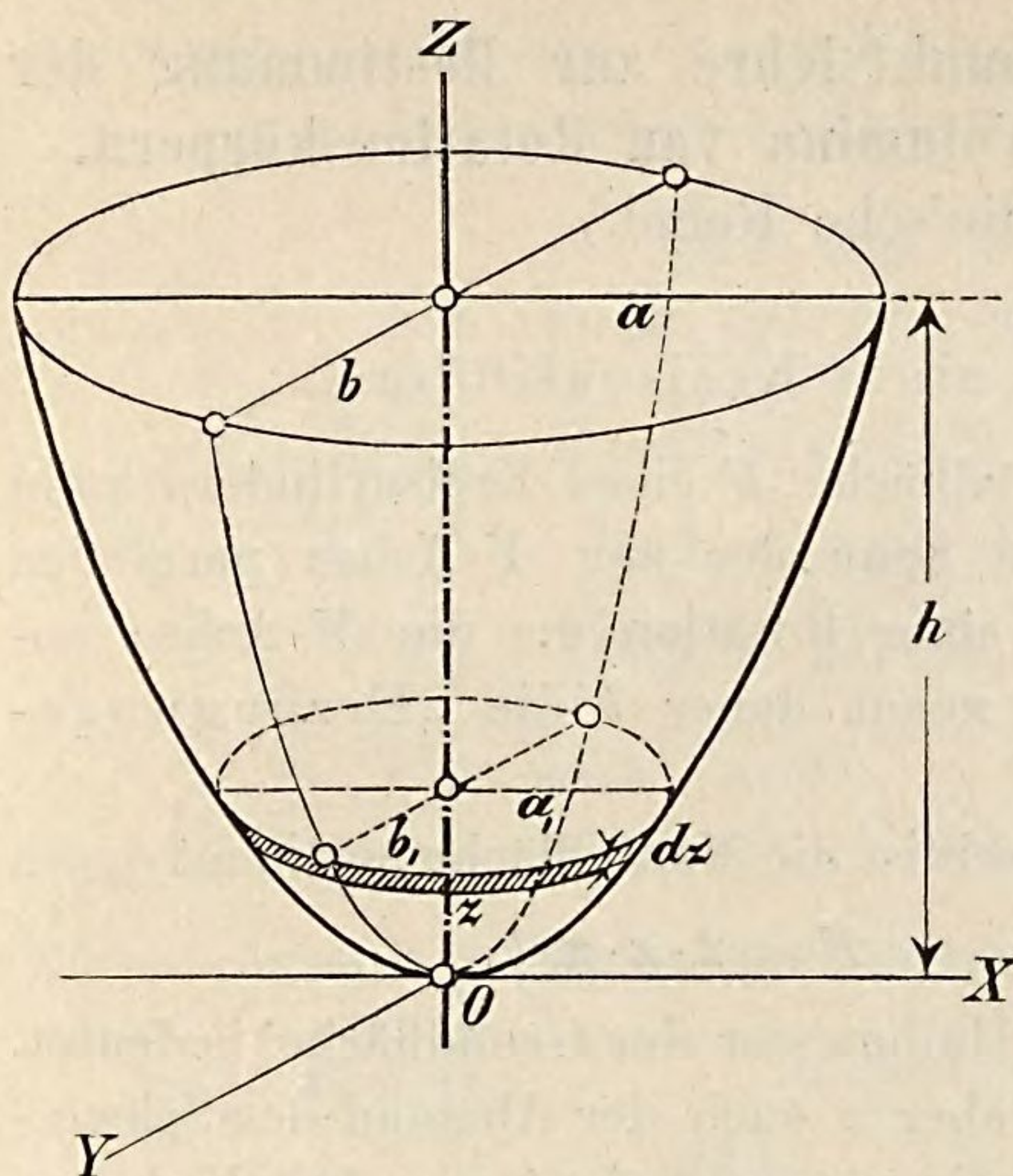


Fig. 282.

Aus letzteren folgt

$$a_1 = \sqrt{\frac{a^2}{h} \cdot z}$$

und

$$b_1 = \sqrt{\frac{b^2}{h} \cdot z}.$$

Zur Schwerpunktsbestimmung dient

$$y_0 = \frac{\Sigma(v \cdot y)}{V},$$

und es findet sich das Volumenelement durch

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cdot b_1 \cdot \pi \cdot dz \\ &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{h} \cdot z \cdot dz, \end{aligned}$$

das ganze Volumen aber durch die Integration dieses Werthes, durch

$$\begin{aligned} V &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{h} \cdot \int_0^h z \cdot dz \\ &= \frac{a \cdot b \cdot h \cdot \pi}{2}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} v \cdot z &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{h} \cdot z^2 \cdot dz, \\ \Sigma(v \cdot z) &= \frac{a \cdot b \cdot \pi}{h} \cdot \int_0^h z^2 \cdot dz \\ &= \frac{a \cdot b \cdot h^2 \cdot \pi}{3} \end{aligned}$$

und endlich

$$z_0 = \frac{\Sigma(v \cdot z)}{V} = \frac{2}{3} \cdot h.$$

**Benutzung der Schwerpunktslehre zur Bestimmung der
Oberflächen und der Volumina von Rotationskörpern.**
(Guldin'sche Regel.)

Mantelfläche eines Kreiscylinders.

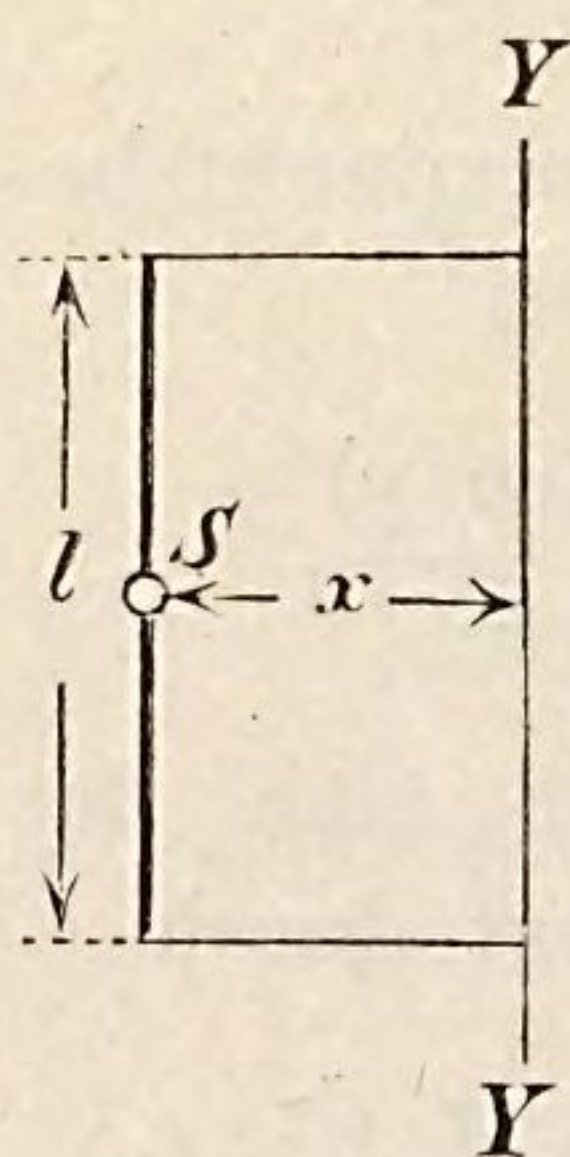


Fig. 283.

Die Mantelfläche F eines Kreiscylinders kann man als die Spur der zur Y -Achse parallelen Linie l bei einer Rotation um die Y -Achse ansehen; man nennt daher l die „Erzeugungsline“.

Geometrisch ist die Mantelfläche bestimmt durch

$$F = 2 \cdot x \cdot \pi \cdot l,$$

wenn x den Halbmesser der Grundfläche bedeutet.

Nun ist aber x auch der Abstand des Schwerpunktes der Erzeugungsline l von der Y -Achse, folglich ist auch

$$2 \cdot x \cdot \pi = w,$$

der Schwerpunktsweg bei einer Umdrehung, und die Mantelfläche

$$F = l \cdot w.$$

Ferner ist

$$l \cdot x = \mathfrak{M}_y,$$

das Moment der Linie l bezogen auf die Y -Achse, weshalb die Mantelfläche auch durch

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y$$

ausgedrückt werden kann.

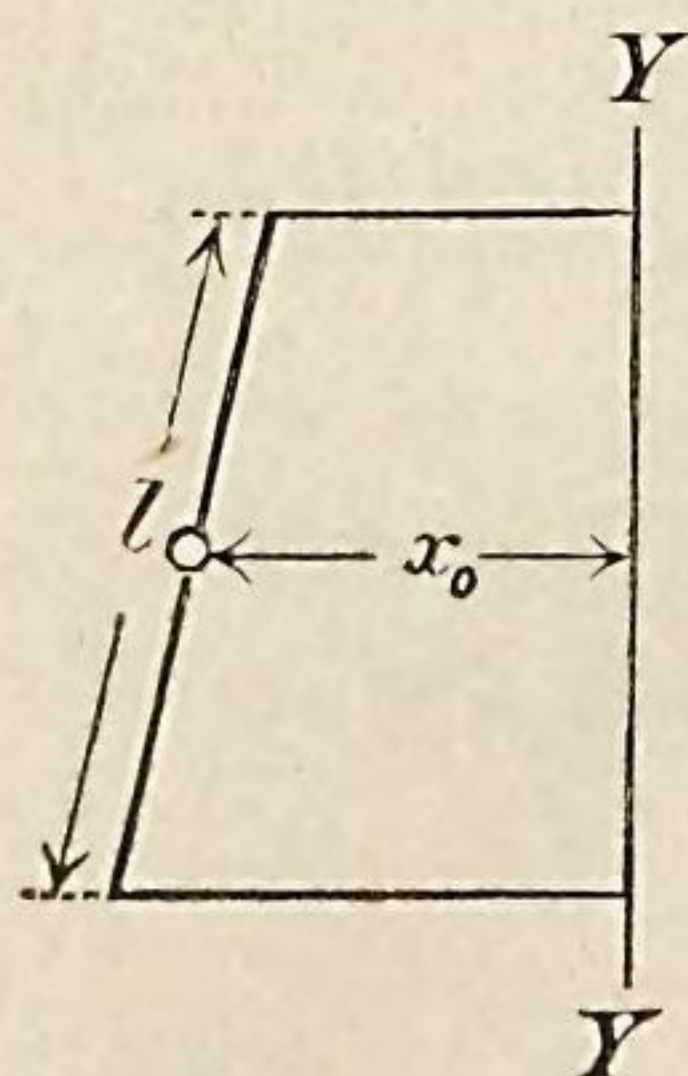


Fig. 284.

Mantelfläche eines abgestutzten
Kegels (Fig. 284).

$$1) \quad F = 2 \cdot x_0 \cdot \pi \cdot l,$$

$$2) \quad F = l \cdot w,$$

$$3) \quad F = 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y.$$

Schwerpunkt einer durch Rotation einer gebrochenen Linie entstandenen Oberfläche.

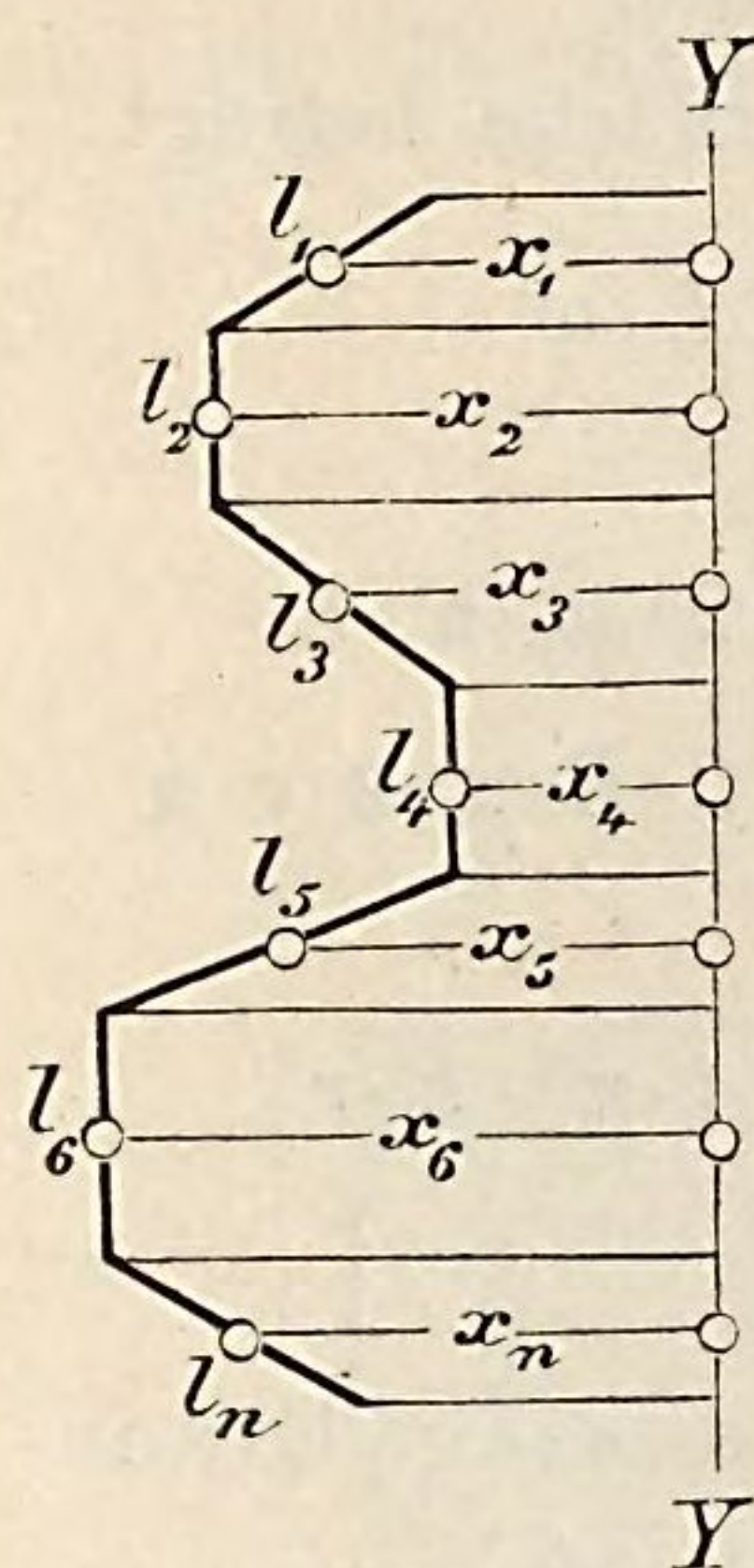


Fig. 285.

Nach dem Vorigen und nach Fig. 285 findet sich hier die Mantelfläche durch

$$\begin{aligned} F &= 2 \cdot \pi \cdot x_1 \cdot l_1 + 2 \cdot \pi \cdot x_2 \cdot l_2 + \dots + 2 \cdot \pi \cdot x_n \cdot l_n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot (x_1 \cdot l_1 + \dots + x_n \cdot l_n) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \Sigma(l \cdot x) \end{aligned}$$

oder durch

$$F = 2 \cdot \pi \cdot L \cdot x_0,$$

in welcher Gleichung

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n$$

und

x_0 der Abstand des Schwerpunktes der Linie L von der Y -Achse ist.

Oberfläche der Kugel.

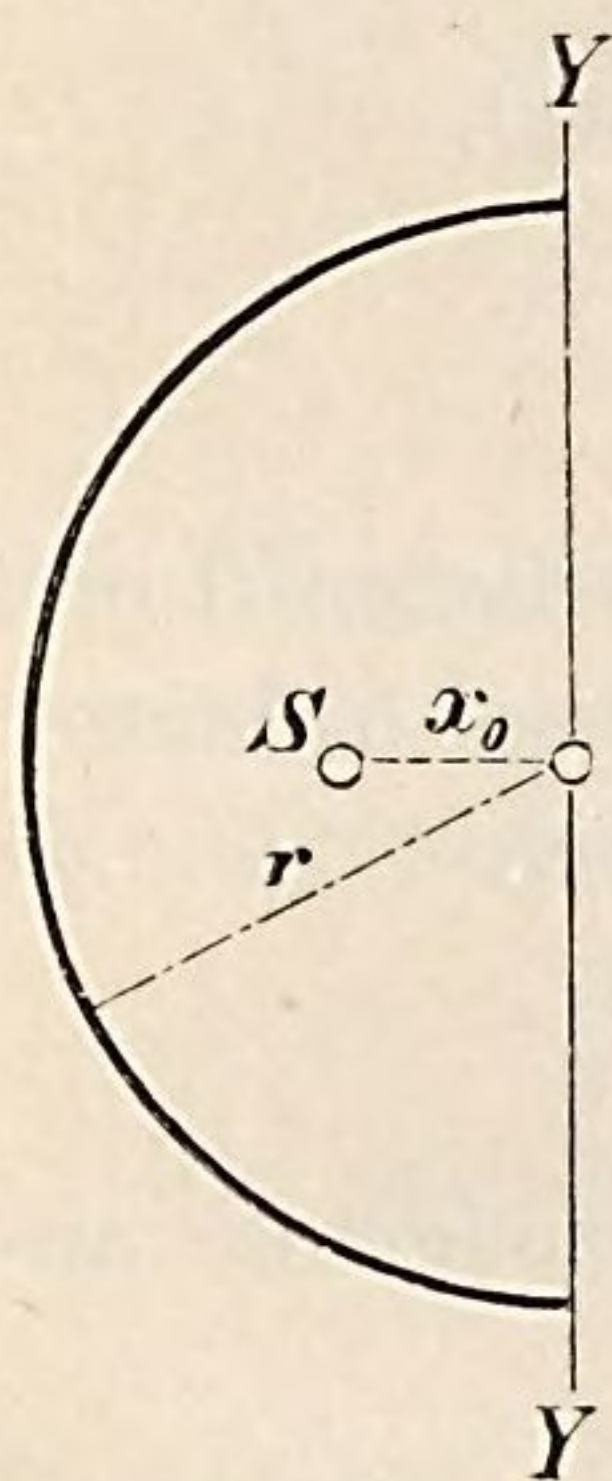


Fig. 286.

Die Erzeugungslinie der Kugeloberfläche F (Fig. 286) ist ein Halbkreis, dessen Schwerpunkt nach Früherem durch

$$x_0 = \frac{2 \cdot r}{\pi}$$

zu bestimmen ist, während sich die Länge L des Halbkreises durch

$$L = r \cdot \pi$$

berechnen lässt.

Daher ist

$$\begin{aligned} F &= L \cdot w \\ &= L \cdot 2 \cdot x_0 \cdot \pi \end{aligned}$$

oder

$$F = 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Oberfläche eines Kreisringes.

Für die Oberfläche eines Kreisringes vom Halbmesser R ist der Kreis vom Halbmesser r die Erzeugungslinie.

Die Oberfläche beträgt

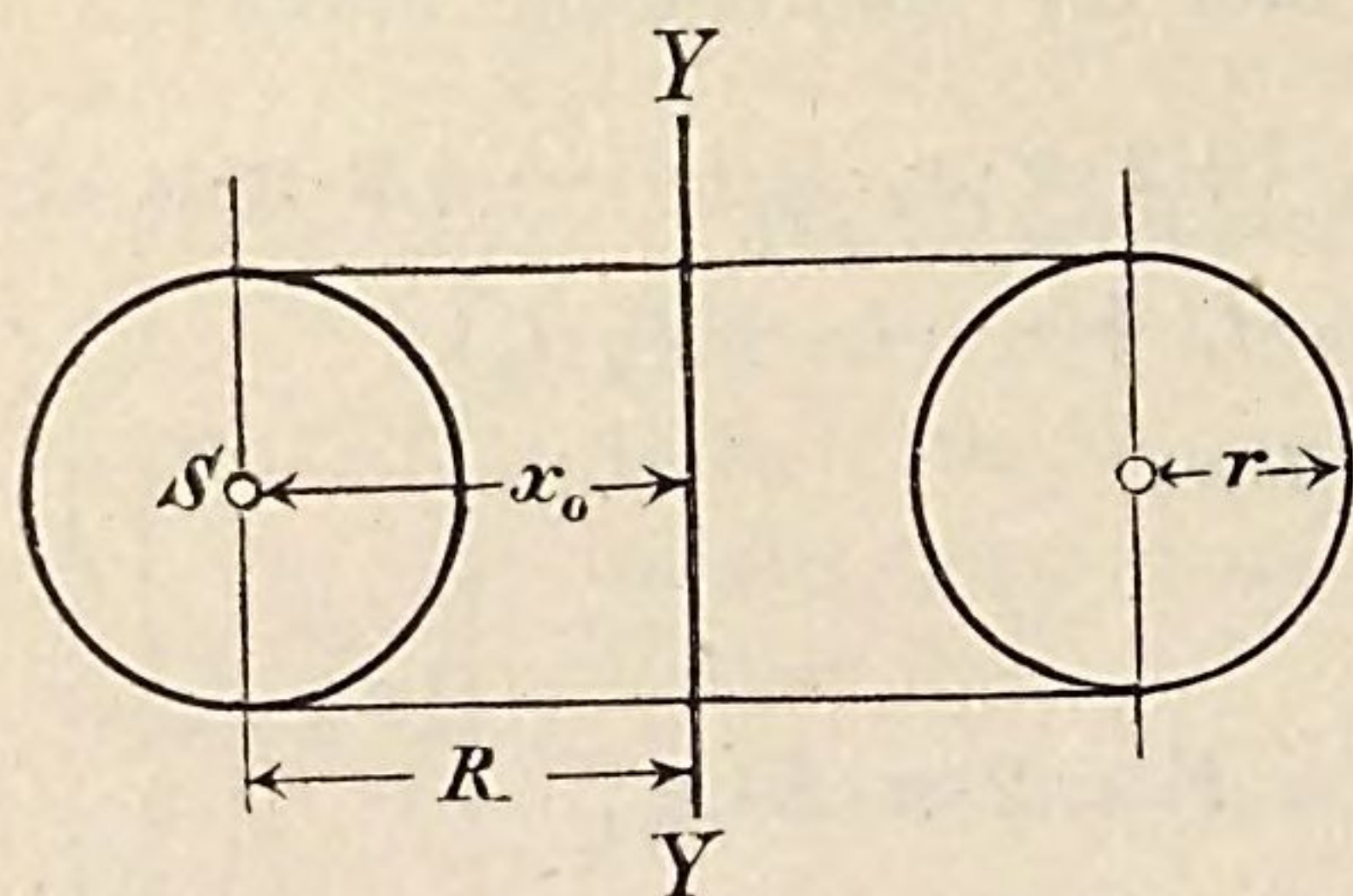


Fig. 287.

$$F = L \cdot w$$

oder

$$F = 2 \cdot x_0 \cdot \pi \cdot L$$

$$= 2 \cdot R \cdot \pi \cdot 2 \cdot r \cdot \pi$$

oder

$$F = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r.$$

Mantelfläche eines Rotationskörpers, dessen Erzeugungslinie eine Curve $x = f(y)$ ist.

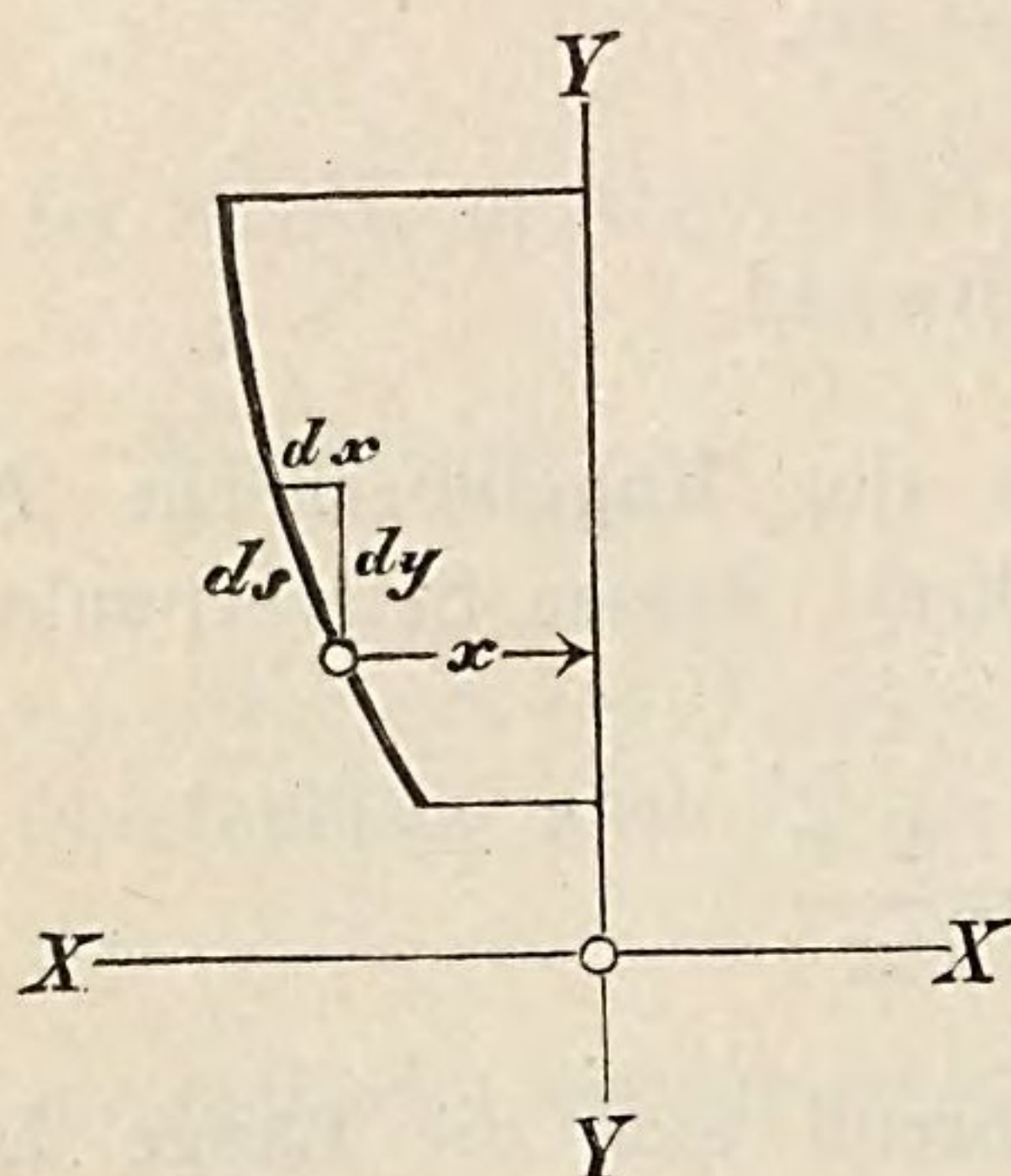


Fig. 288.

Die Gleichung zur Bestimmung der durch die Rotation einer gebrochenen Linie erzeugten Oberfläche heisst

$$F = 2 \cdot \pi \cdot (L \cdot x_0),$$

in welcher

$$L \cdot x_0 = \mathfrak{M}_y$$

das Moment der gebrochenen Linie bezogen auf die Y-Achse bedeutet. Man kann daher schreiben

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y$$

und diese Gleichung auf eine stetig gekrümmte Erzeugende anwenden.

Mit Bezug auf Fig. 288 ist

$$d\mathfrak{M}_y = x \cdot ds$$

und

$$\mathfrak{M}_y = \int x \cdot ds,$$

ferner ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$x = f(y)$$

und die Oberfläche

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \int x \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Volumen eines Cylinders.

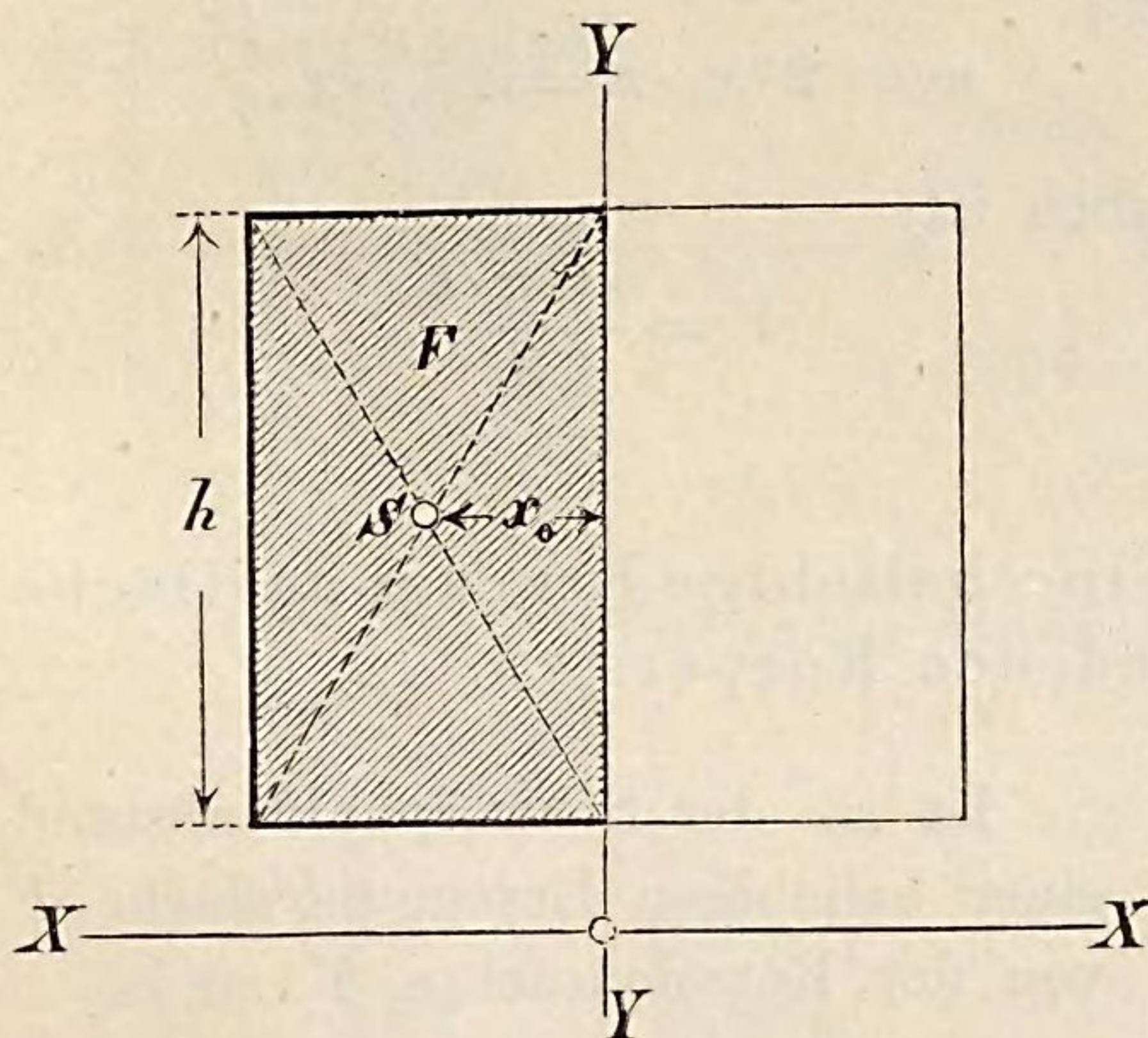


Fig. 289.

Geometrisch ist das Volumen eines Kreiscylinders vom Halbmesser r und der Höhe h

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

oder

$$V = (r \cdot h) \cdot (r \cdot \pi),$$

worin

$$F = r \cdot h$$

die halbe Schnittfläche des Cylinders durch die Y -Achse und

$$r \cdot \pi = 2 \cdot x_0 \cdot \pi = w$$

der Weg des Schwerpunktes S jener Fläche bei einer Umdrehung derselben um die Y -Achse ist; folglich findet man das Cylindervolumen auch durch

$$V = F \cdot w.$$

Da man aber auch schreiben kann

$$V = 2 \cdot \pi \cdot (F \cdot x_0),$$

in welchem Werthe

$$F \cdot x_0 = \mathfrak{M}_y$$

das Moment der „Erzeugungsfläche F “ bezogen auf die Rotationsachse Y ist, so folgt auch

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y.$$

Volumen eines Kegels.

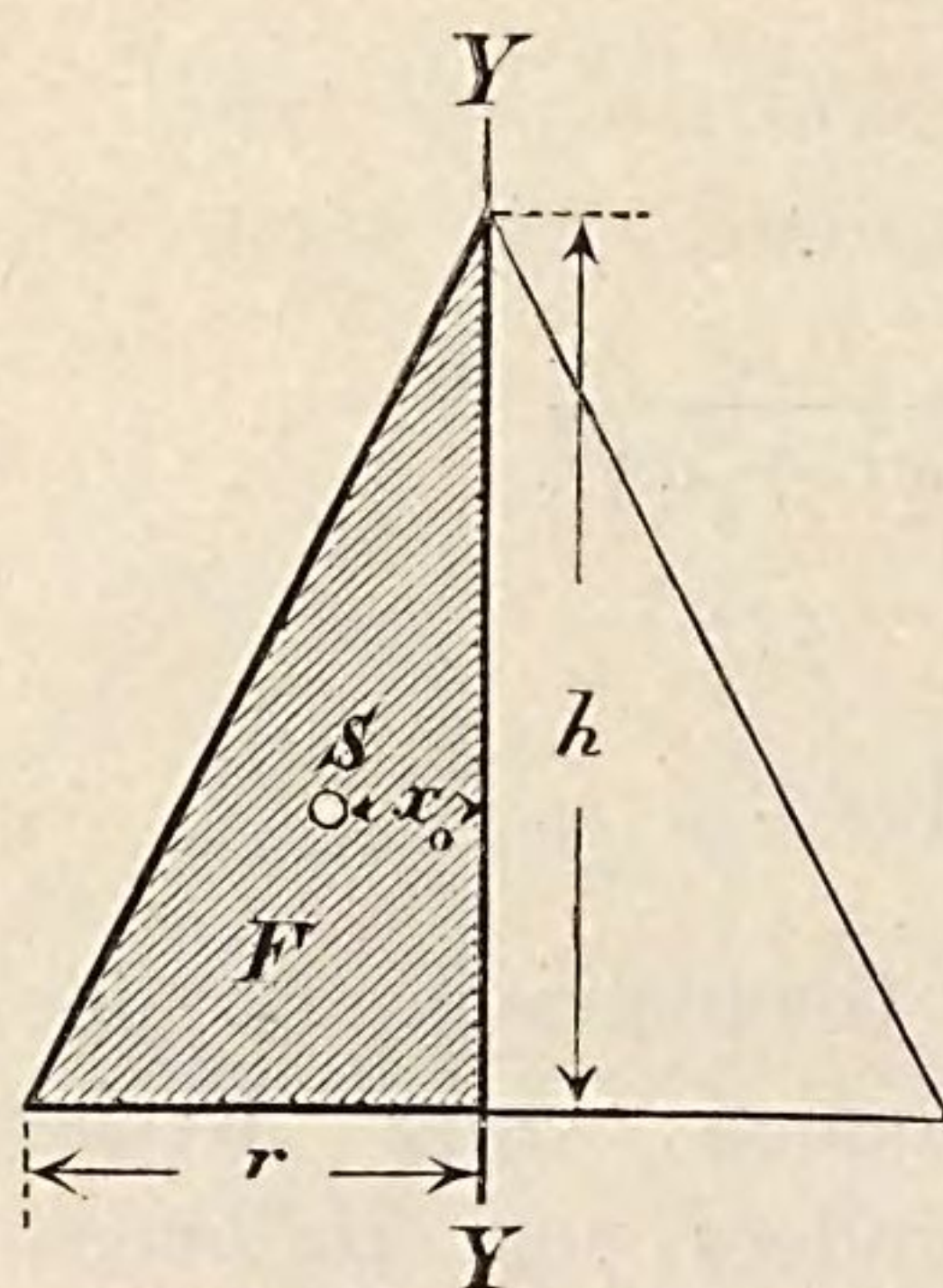


Fig. 290.

Es ist das Volumen des Kegels

$$V = F \cdot w,$$

die Erzeugungsfläche ein rechtwinkeliges Dreieck

$$F = \frac{r \cdot h}{2}$$

und der Schwerpunktsweg

$$w = 2 \cdot x_0 \cdot \pi = 2 \cdot \frac{r}{3} \cdot \pi,$$

folglich ist

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

Volumen eines durch eine beliebige Erzeugungsfläche
entstandenen Körpers.

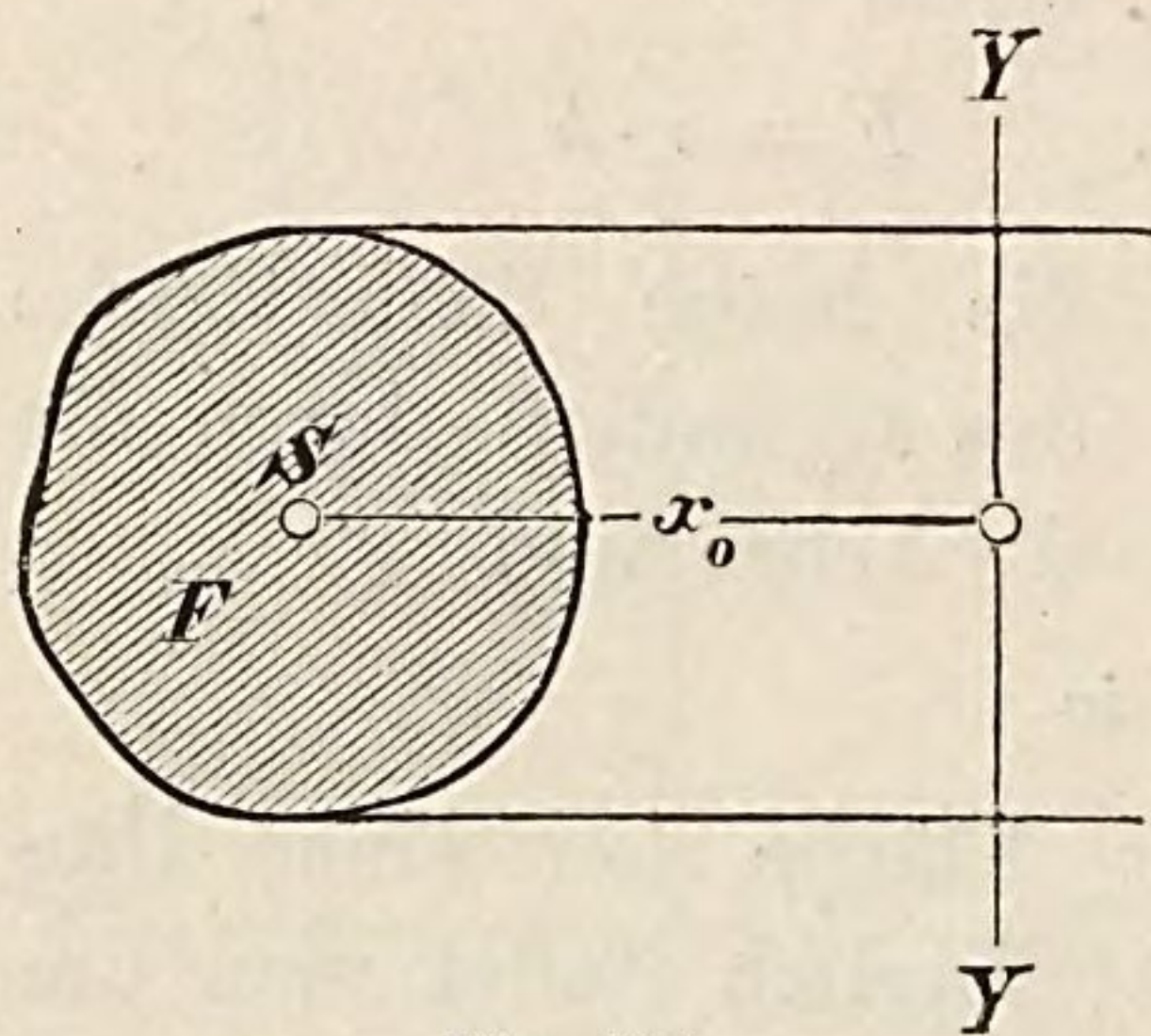


Fig. 291.

Ist x_0 der Schwerpunktsabstand einer beliebigen Erzeugungsfläche F von der Rotationsachse Y , so ist

$$V = 2 \cdot \pi \cdot F \cdot x_0.$$

Ist F beispielsweise eine Kreisfläche

$$F = r^2 \cdot \pi$$

und

$$x_0 = R,$$

so ergibt sich

$$V = 2 \cdot \pi^2 \cdot r^2 \cdot R$$

das Volumen eines Kreisringes.

Bildet die Erzeugungsfläche die Zusammensetzung solcher Flächen, von denen sich der Schwerpunkt leicht bestimmen lässt, so ist

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y \\ &= 2 \cdot \pi \cdot F \cdot x_0 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \Sigma(f \cdot x). \end{aligned}$$

Wäre die Erzeugungsfläche von einer Curve begrenzt, welche durch die Gleichung

$$x = f(y)$$

ausgedrückt ist, so würde die letzte Gleichung ganz allgemein heissen

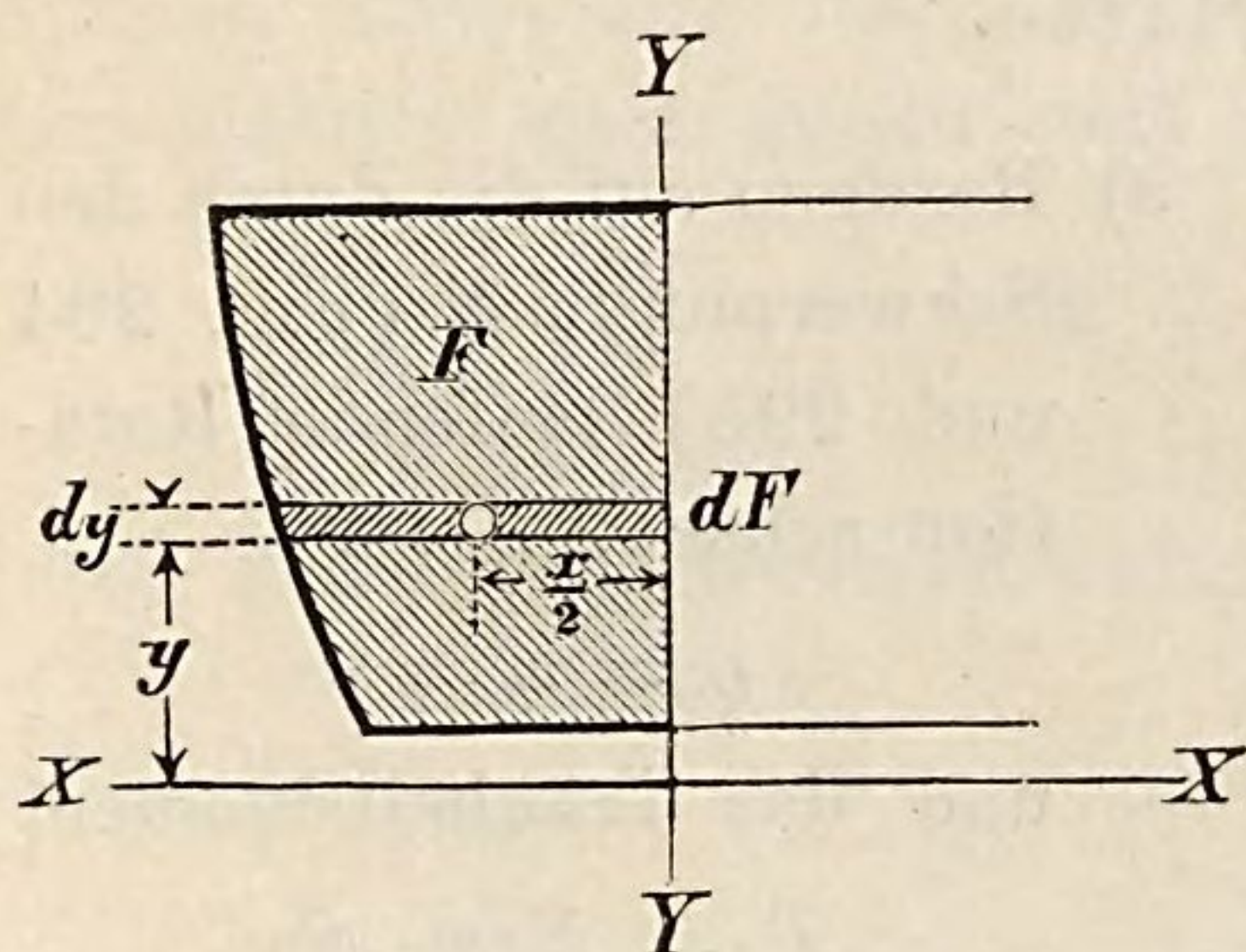


Fig. 292.

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int d\mathfrak{M}_y$$

und mit Bezug auf Fig. 292 würde sein

$$d\mathfrak{M}_y = dF \cdot \frac{x}{2} = x \cdot dy \cdot \frac{x}{2}$$

oder

$$\mathfrak{M}_y = \frac{1}{2} \cdot \int x^2 \cdot dy$$

und

$$V = \pi \cdot \int x^2 \cdot dy.$$

Volumen einer Kugel.

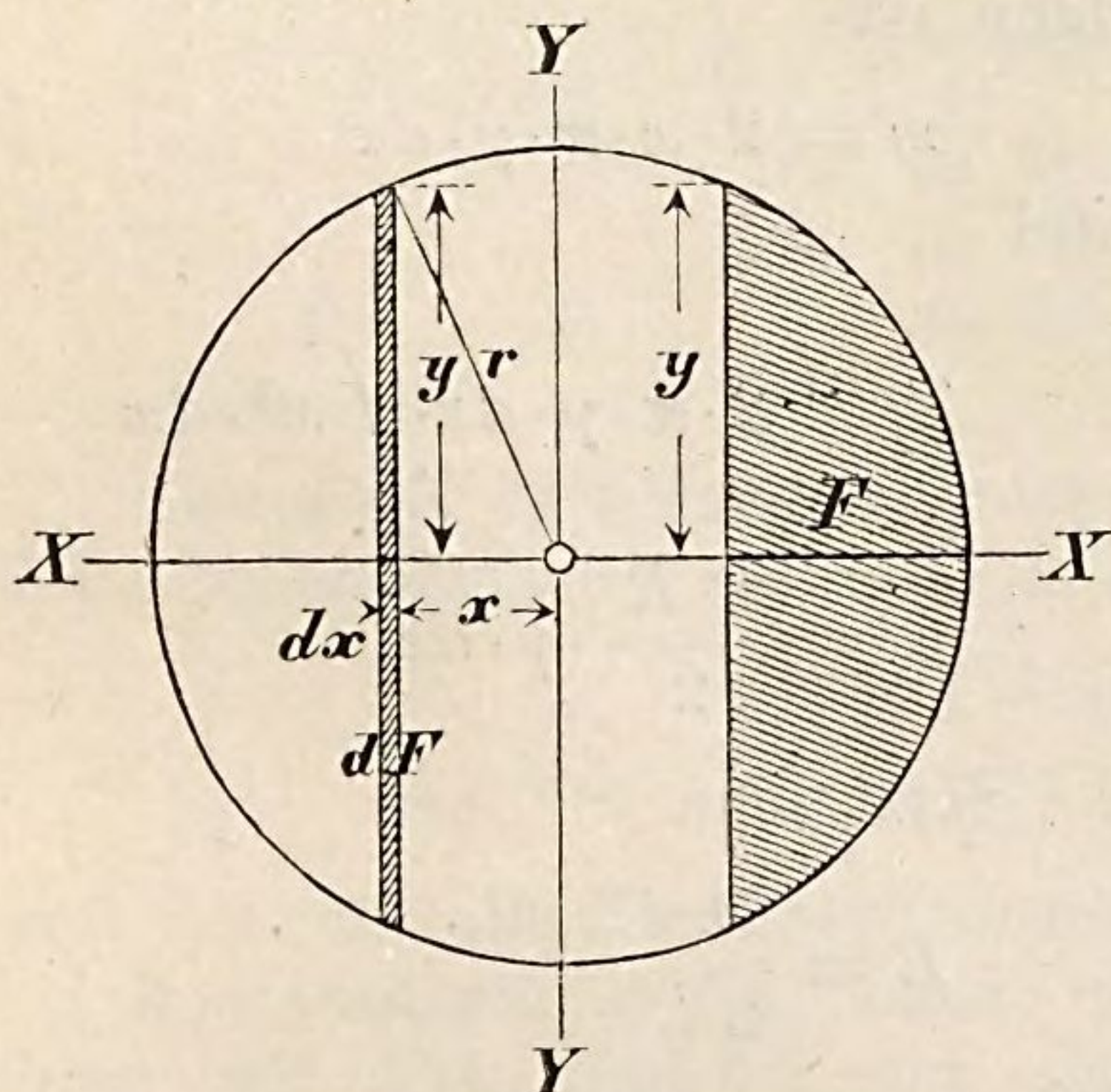


Fig. 293.

Mit Bezug auf Fig. 293 ist

$$dF = 2 \cdot y \cdot dx,$$

$$d\mathfrak{M}_y = 2 \cdot y \cdot x \cdot dx$$

und allgemein gilt

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \mathfrak{M}_y,$$

also

$$V = 4 \cdot \pi \cdot \int y \cdot x \cdot dx.$$

Nun ist

$$x^2 = r^2 - y^2,$$

also

$$x \cdot dx = -y \cdot dy,$$

folglich

$$V = -4 \cdot \pi \cdot \int_y^0 y^2 \cdot dy$$

oder

$$V = \frac{4}{3} \cdot y^3 \cdot \pi.$$

Wird $y = r$, so erhält man das Volumen der ganzen Kugel durch

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi.$$

Bestimmung von Trägheitsmomenten starrer Körper.

[Allgemeine Form: $T = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$.]

Trägheitsmoment einer unendlich dünnen cylindrischen Platte.

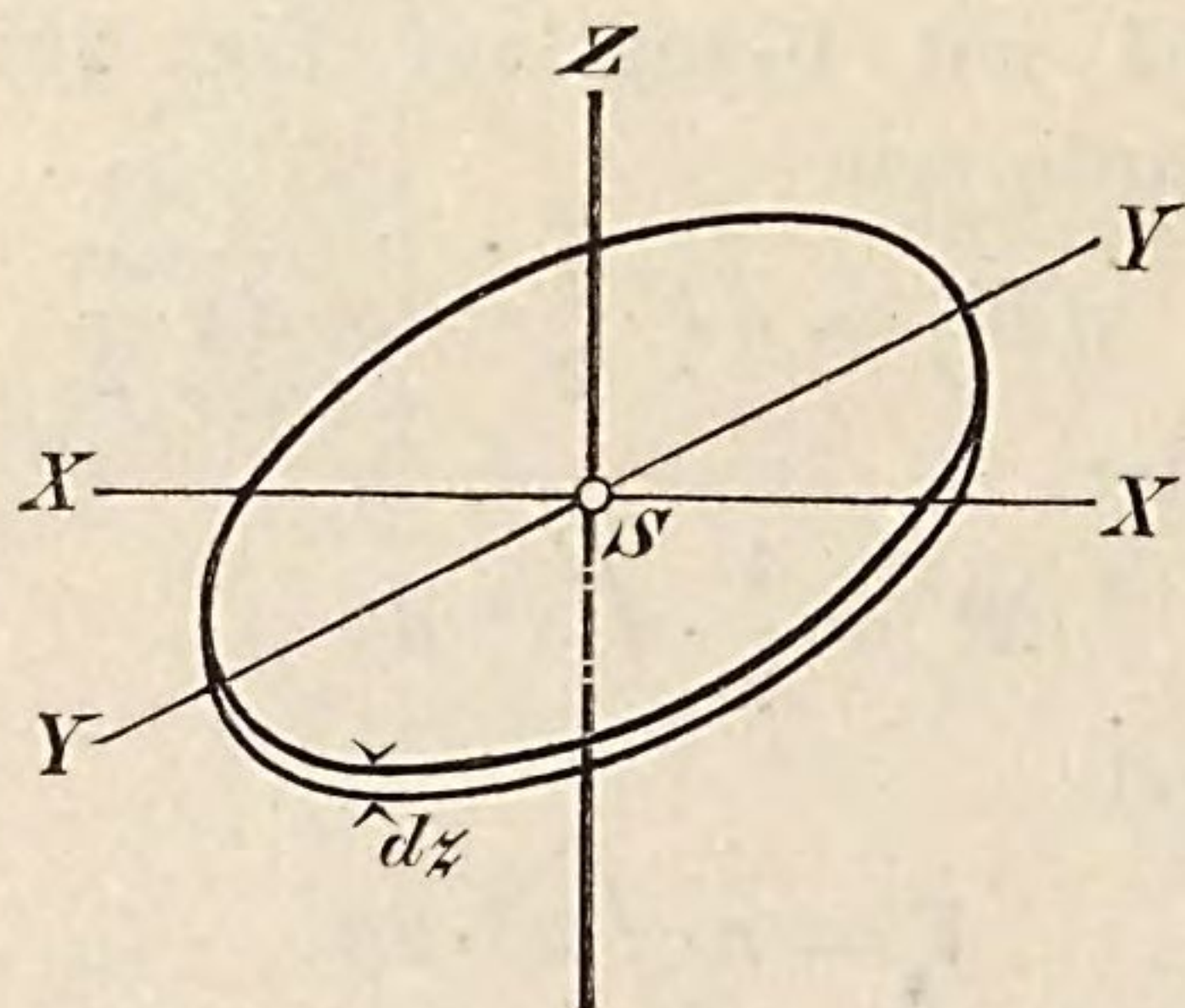


Fig. 294.

a) Bezogen auf die durch den Schwerpunkt S (Fig. 294 und 295) laufende Rotationsachse ZZ ist

$$\varrho = x = y$$

und das Trägheitsmoment

$$T_z = \Sigma(m \cdot x^2).$$

Bedeutet nun

γ die Masse pro Cubikeinheit, dann ist

$$m = 2 \cdot x \cdot \pi \cdot \gamma \cdot dz$$

und

$$\begin{aligned} T_z &= 2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot dz \cdot \int_0^R x^3 \cdot dx \\ &= \frac{\pi \cdot R^4}{2} \cdot \gamma \cdot dz. \end{aligned}$$

Setzt man

$$R = \frac{D}{2},$$

so folgt

$$T_z = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (\gamma \cdot dz),$$

woraus sich ergibt, dass sich das Trägheitsmoment mit Hilfe des sogenannten Querschnittsmomentes* $\frac{\pi \cdot D^4}{32}$ bestimmen lässt.

* Der allgemeine Ausdruck für das Trägheitsmoment

$$T = \Sigma(m \cdot \varrho^2)$$

lässt sich folgendermassen umschreiben:

Zerlegt man ferner das erste Resultat wie nachstehend

$$T_z = (R^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot dz) \cdot \frac{R^2}{2},$$

so stellt der Klammerwerth die ganze Masse M der unendlich dünnen Kreisplatte dar, und es kann infolgedessen das Trägheitsmoment auch geschrieben werden

$$T_z = \frac{M \cdot R^2}{2}$$

oder, wenn G das Gewicht und g die Acceleration der Schwere ist,

$$T_z = \frac{G \cdot R^2}{2 \cdot g}.$$

b) Bezogen auf die in die unendlich dünne Kreisplatte fallende durch den Schwerpunkt S (Fig. 294 und 295) laufende X - oder Y -Achse ist

$$T_x = T_y,$$

$$T_z = T_x + T_y$$

$$= 2 T_x,$$

Entspricht dem Massenelement m von unendlich kleiner Dicke dz das Flächenelement f auf der Platte, so ist

$$m = f \cdot dz \cdot \gamma$$

$$\text{und} \quad T = \Sigma(f \cdot \varrho^2) \cdot \gamma \cdot dz,$$

weil $\gamma \cdot dz$ für alle Elemente constant bleibt.

Den Ausdruck $\Sigma(f \cdot \varrho^2)$ nennt man wegen der Aehnlichkeit in der Form mit dem Ausdruck des Trägheitsmomentes „das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche“ oder besser „Querschnittsmoment“.

Dasselbe berechnet sich im vorliegenden Falle folgendermassen: Nach Fig. 295 ist

$$f = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx,$$

$$\varrho = x$$

und

$$\Sigma(f \cdot \varrho^2) = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^R x^3 \cdot dx = \frac{\pi \cdot R^4}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32}.$$

also

$$\begin{aligned}
 T_x &= \frac{T_z}{2} \\
 &= \frac{\pi \cdot R^4}{4} \cdot \gamma \cdot dz \\
 &= \frac{G \cdot R^2}{4 \cdot g}.
 \end{aligned}$$

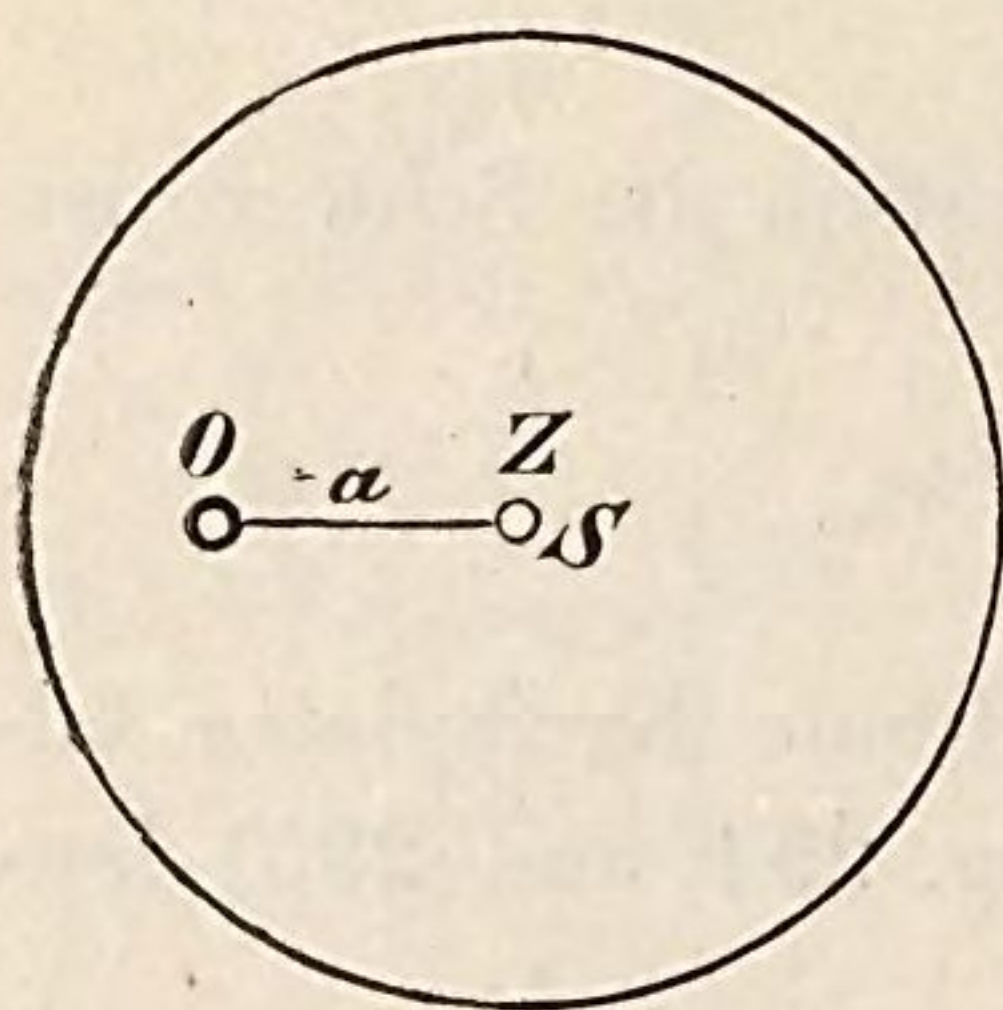


Fig. 296.

c) Trägheitsmoment der unendlich dünnen Kreisplatte bezogen auf eine im Abstände a zur Rotationsachse Z parallele O -Achse (Fig. 296).

Es ist allgemein

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2$$

und hier

$$T_0 = T_z + M \cdot a^2,$$

also

$$= \frac{M \cdot R^2}{2} + M \cdot a^2$$

oder

$$\begin{aligned}
 &= M \cdot \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \\
 &= \frac{G}{g} \cdot \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right).
 \end{aligned}$$

Wäre $a = R$, läge die Drehachse also auf der Peripherie der Kreisplatte, dann würde

$$T_0 = \frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2$$

sein.

d) Trägheitsmoment der unendlich dünnen Kreisplatte bezogen auf eine im Abstände z zur X -Achse parallel laufende Achse NN (Fig. 297).

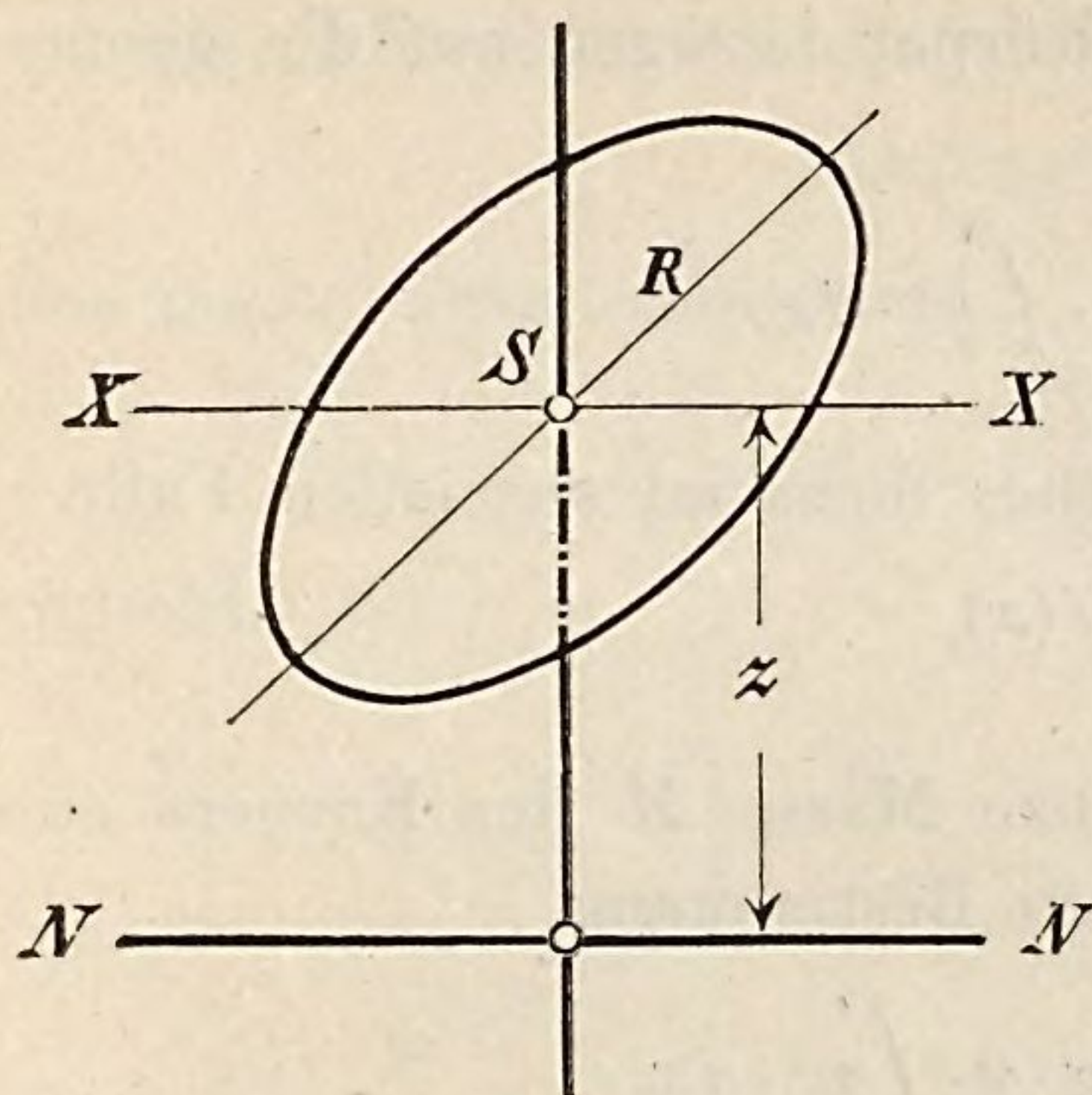


Fig. 297.

Allgemein ist

$$T_n = T_s + M \cdot a^2$$

und im vorliegenden Falle

$$T_n = T_x + M \cdot z^2$$

oder

nach Einsetzung der Werthe

$$\begin{aligned} T_n &= M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) \\ &= \frac{G}{g} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right). \end{aligned}$$

Allgemeine Formen zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Rotationskörpern.

a) Trägheitsmoment des Rotationskörpers bezogen auf die Rotations-(Schwerpunkts-)Achse X.

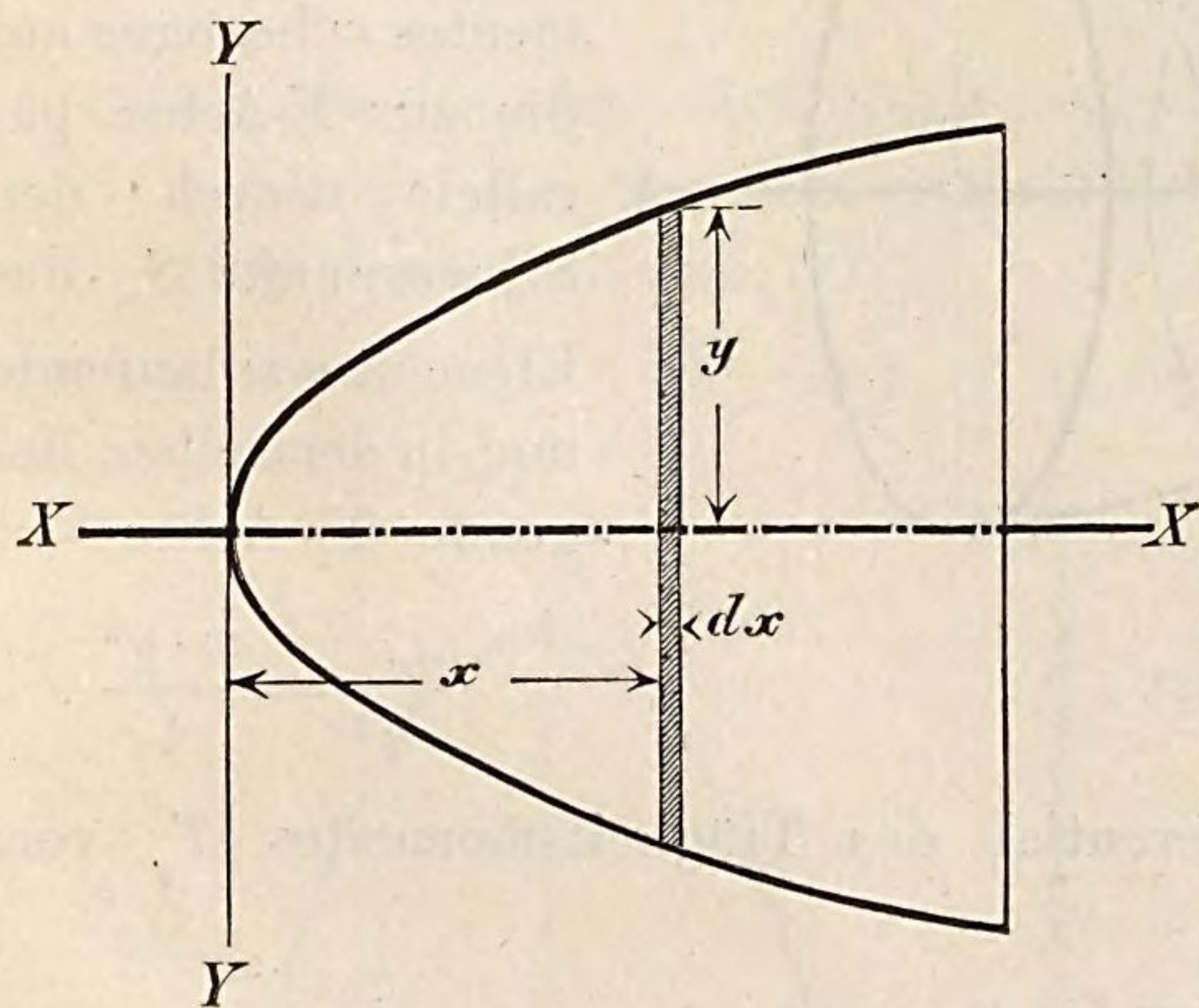


Fig. 298.

Man schneidet aus dem Körper senkrecht zur Rotationsachse die unendlich dünne Kreisscheibe

$$y^2 \cdot \pi \cdot dx,$$

deren Trägheitsmoment bezogen auf die Rotationsachse nach dem Obigen ausgedrückt wird durch

$$dT_x = \frac{m \cdot y^2}{2},$$

und, da die Masse des Körperelementes

$$m = y^2 \cdot \pi \cdot dx \cdot \gamma$$

ist, so ergibt sich die allgemeine Form zur Bestimmung des

Trägheitsmomentes vom ganzen Körper bezogen auf die geometrische Achse X durch

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx.$$

Zur Ermittlung dieses Werthes muss im speciellen Falle

$$y = f(x)$$

gegeben sein.

Soll in das Resultat die ganze Masse M des Körpers eingeführt werden, so dient zu deren Bestimmung

$$M = \Sigma(m) = \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx.$$

- b) Trägheitsmoment des Rotationskörpers bezogen auf die zur geometrischen Achse X senkrecht gelegenen und mit derselben sich schneidenden Achse Y (Fig. 299).

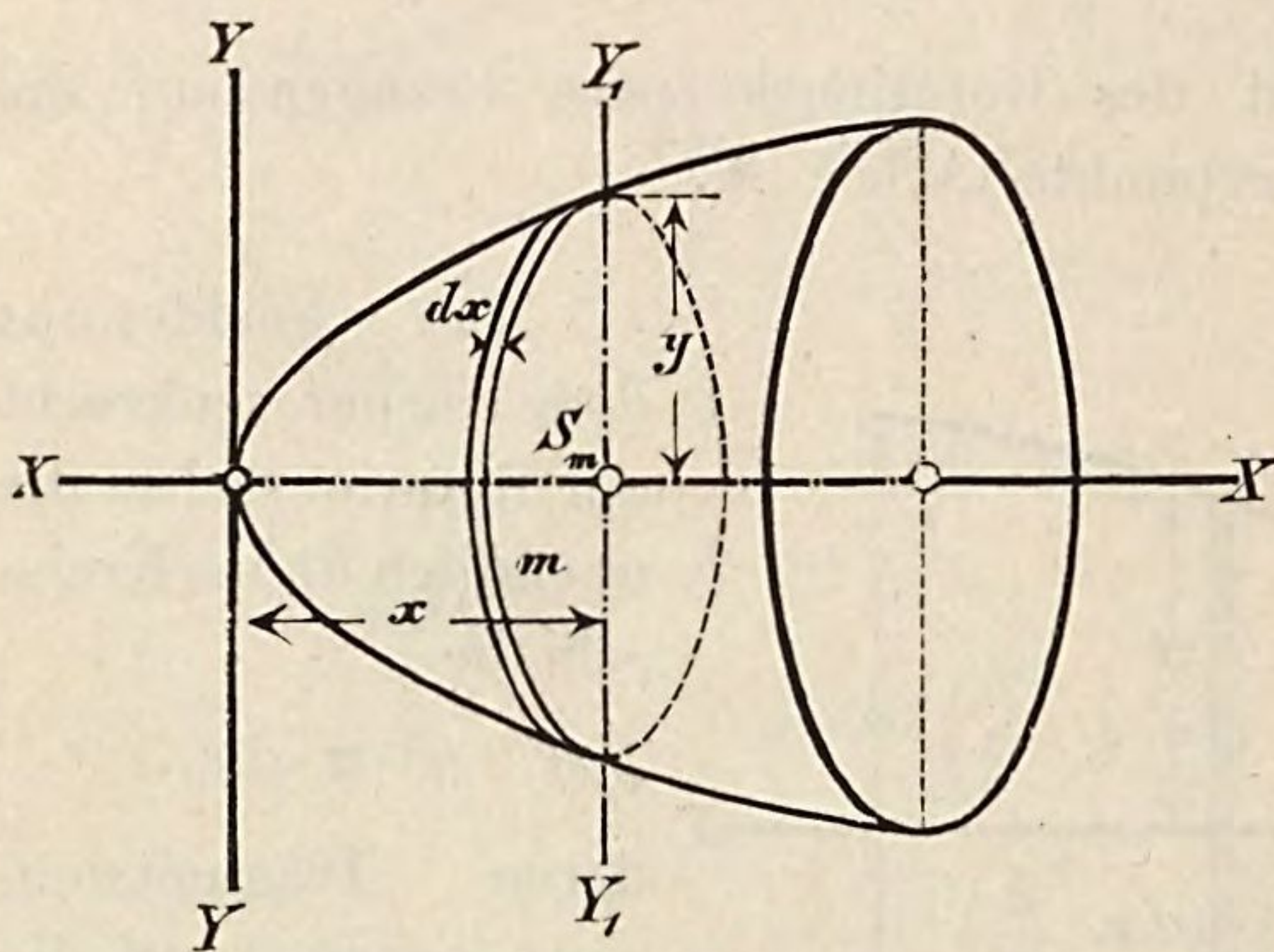


Fig. 299.

Man bestimmt zunächst das Trägheitsmoment T_{y_1} des Elementes m bezogen auf die zur Y -Achse parallele durch den Schwerpunkt S_m des Elementes m laufende und in demselben liegende Y_1 -Achse

$$T_{y_1} = \frac{m \cdot y^2}{4}$$

und hierauf das Differential des Trägheitsmomentes T_y vom ganzen Körper durch

$$\begin{aligned} dT_y &= T_{y_1} + m \cdot x^2 \\ &= \frac{m \cdot y^2}{4} + m \cdot x^2 \\ &= m \cdot \left(\frac{y^2}{4} + x^2 \right), \end{aligned}$$

woraus sich unter Berücksichtigung des Werthes

$$m = y^2 \cdot \pi \cdot dx \cdot \gamma$$

das ganze Trägheitsmoment

$$T_y = \pi \cdot \gamma \cdot \int \left(\frac{y^4}{4} + y^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx$$

ergiebt.

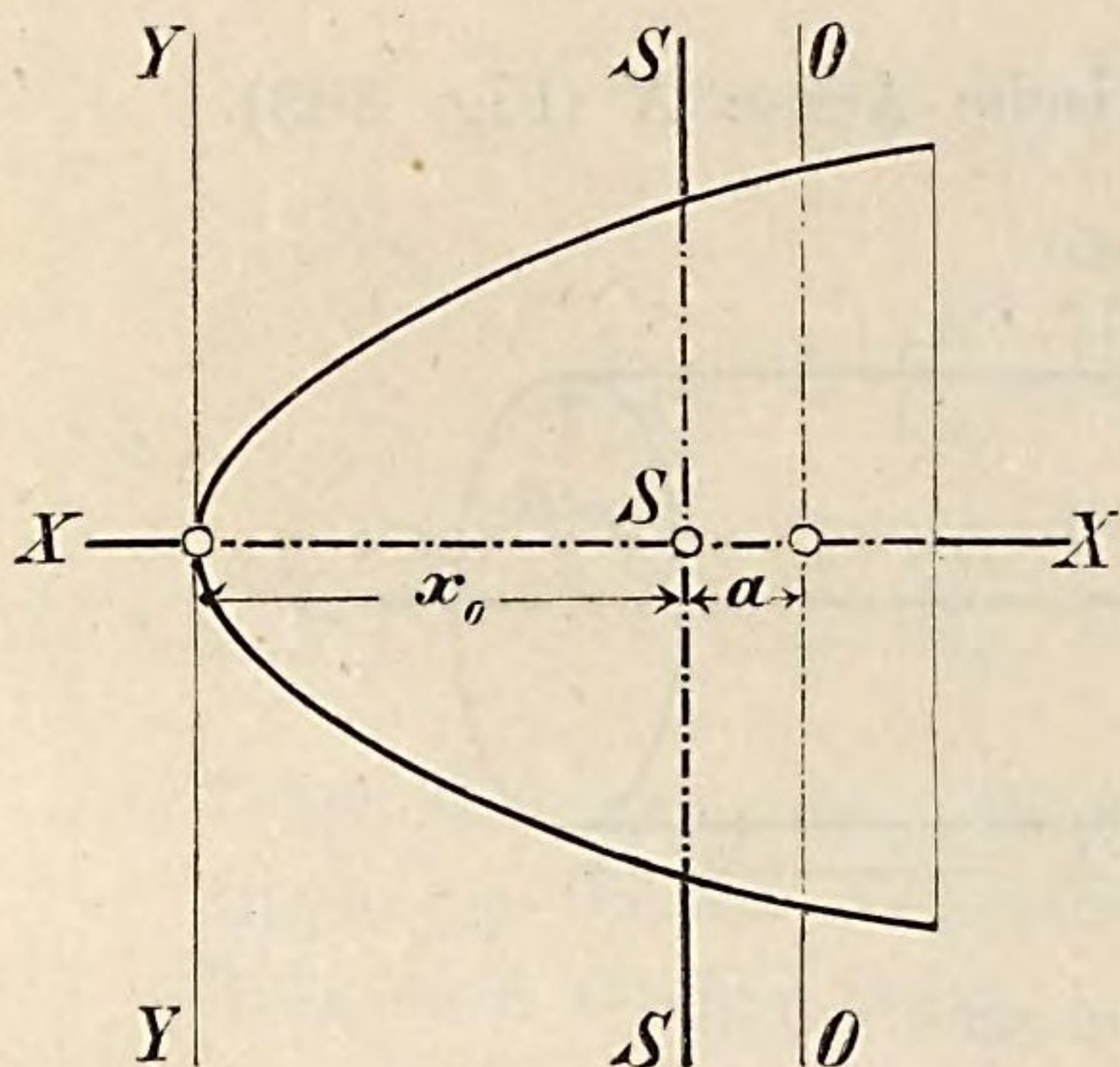


Fig. 300.

c) Trägheitsmoment des Rotationskörpers bezogen auf eine durch den Körperschwerpunkt S laufende und zur Y -Achse parallele Achse S (Fig. 300).

Es ist

$$T_s = T_y - M \cdot x_0^2.$$

d) Trägheitsmoment des Rotationskörpers bezogen auf eine beliebige aber zur Schwerpunktsachse S parallele Achse O (Fig. 300, 301 und 302).

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2,$$

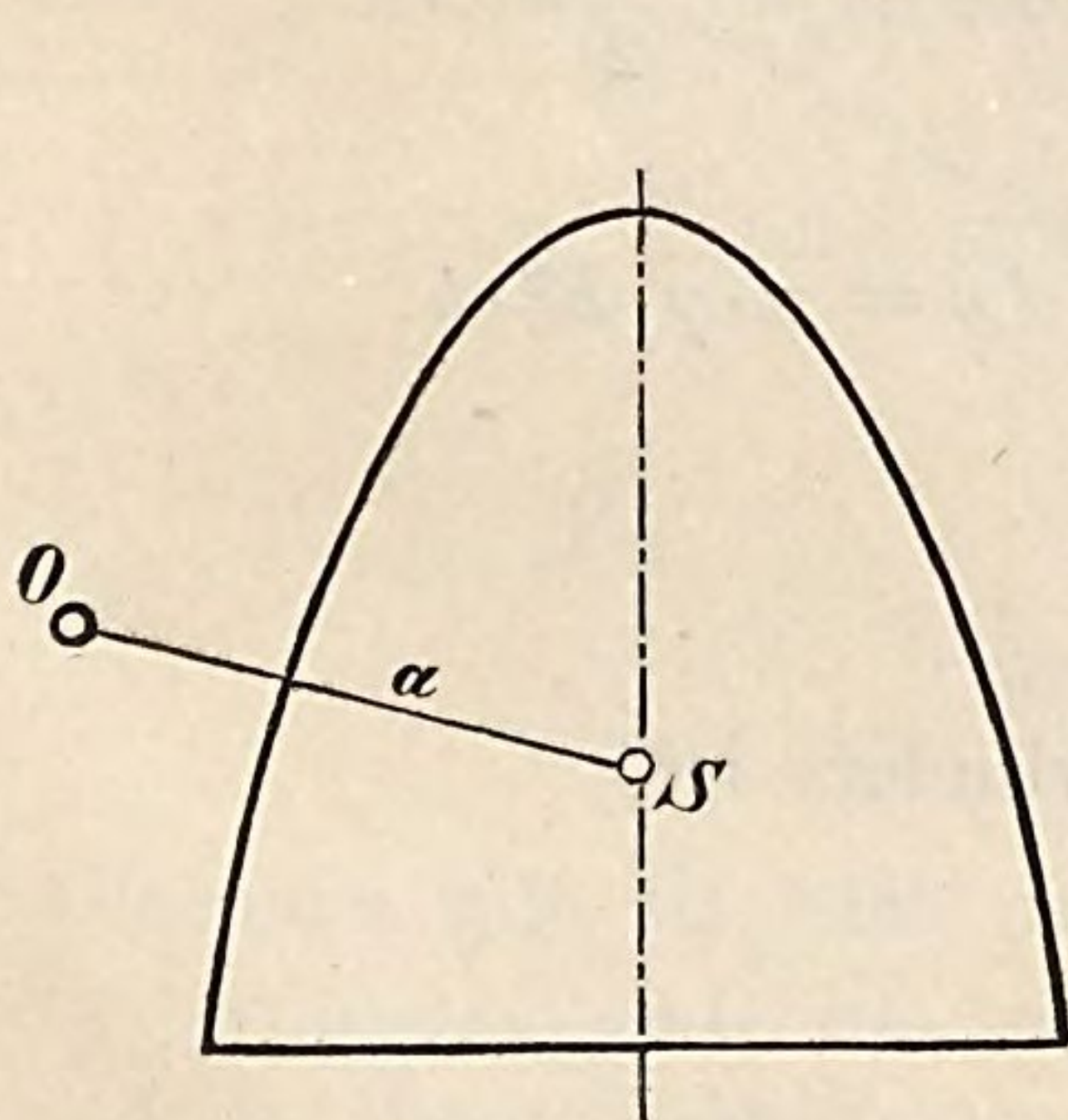


Fig. 301.

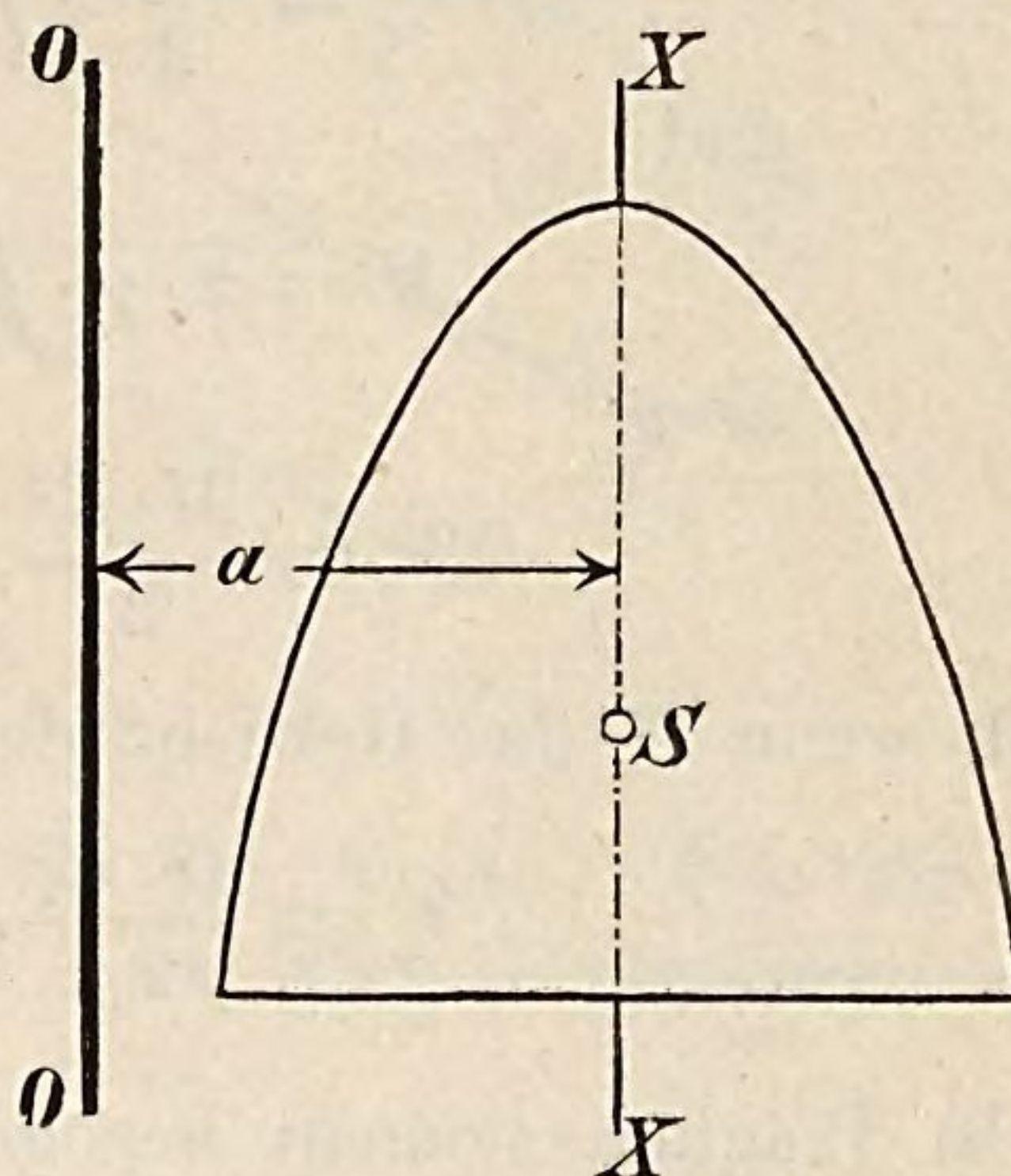


Fig. 302.

und da mit Bezug auf Fig. 302

$$T_s = T_x$$

ist, so gilt für dieselbe auch

$$T_0 = T_x + M \cdot a^2.$$

Trägheitsmoment eines massiven Cylinders

a) bezogen auf die geometrische Achse X (Fig. 303).

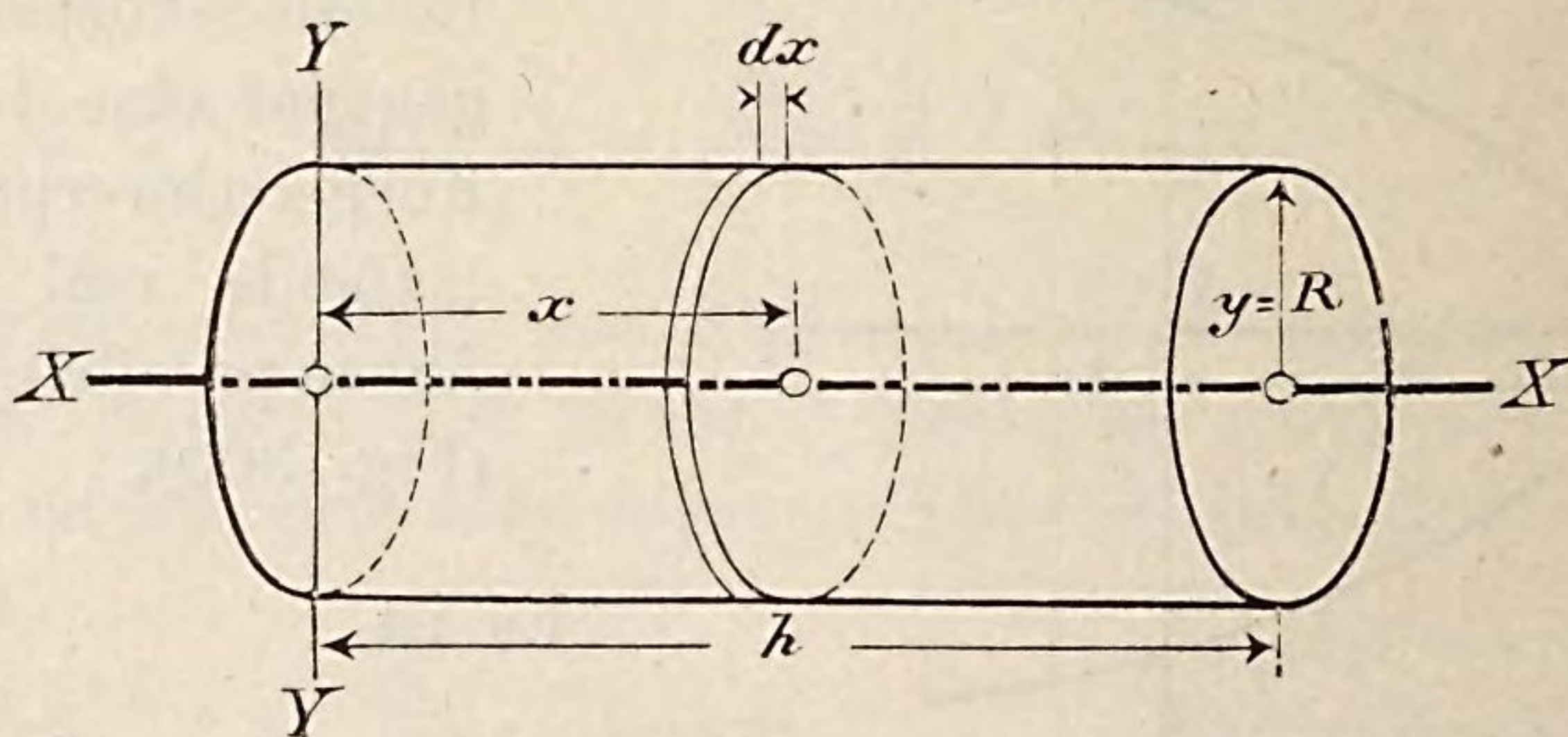


Fig. 303.

Hier ist

$$y = R \text{ constant}$$

und

x wächst von 0 bis h ,

folglich ergibt sich

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot R^4 \cdot h}{2}$$

und

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx = \pi \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot h,$$

also

$$T_x = \frac{M \cdot R^2}{2},$$

und, wenn G das Gewicht des Cylinders ist,

$$T_x = \frac{G \cdot R^2}{2g}.$$

b) Trägheitsmoment bezogen auf die senkrecht zur X -Achse stehende und dieselbe schneidende Y -Achse (Fig. 303).

Allgemein ist

$$T_y = \pi \cdot \gamma \cdot \int \left(\frac{y^4}{4} + y^2 \cdot x^2 \right) \cdot dx,$$

also hier

$$T_y = \pi \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \int_0^h \left(\frac{R^2}{4} \cdot h + x^2 \cdot dx \right)$$

$$= \pi \cdot \gamma \cdot R^2 \cdot \left(\frac{R^2}{4} \cdot h + \frac{h^3}{3} \right)$$

oder

$$\begin{aligned} T_y &= M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \\ &= \frac{G}{g} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right). \end{aligned}$$

- c) Trägheitsmoment des Cylinders bezogen auf eine beliebige durch den Punkt O laufende, in der XY -Ebene liegende Drehachse O (Fig. 304).

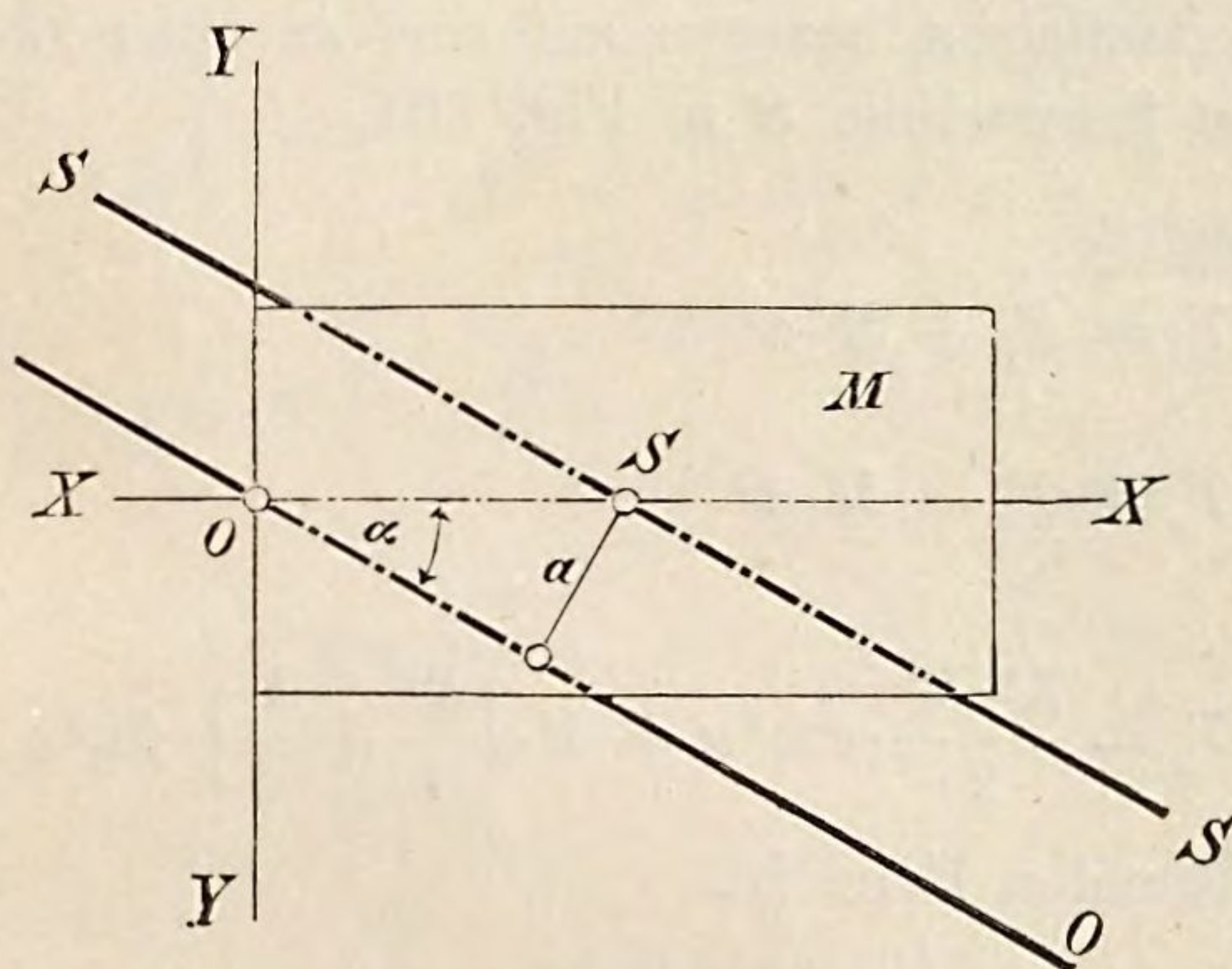


Fig. 304.

Allgemein gilt, da nach der Lage der X - und Y -Achse der Werth $\sum(m \cdot x \cdot y) = 0$ ist, jene Achsen also Hauptachsen und T_x und T_y Hauptträgheitsmomente sind,

$$T_0 = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \sin^2 \alpha,$$

folglich ist im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha + M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \frac{G}{g} \cdot \left\{ \frac{R^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha + \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Wäre beispielsweise $\alpha = 45^\circ$, so wäre

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = 0,707$$

und

$$T_0 = 0,707 \cdot \frac{G}{g} \cdot \left\{ \frac{3}{4} \cdot R^2 + \frac{h^2}{3} \right\}.$$

Zur Verzeichnung der Trägheitsellipse in der XY -Ebene findet man die Achse für einen beliebigen Winkel α durch

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{T_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{G}{g} \cdot \left\{ \frac{R^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha + \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\}}}.$$

d) Trägheitsmoment bezogen auf eine zu einer O -Achse parallelen Schwerlinie S in Fig. 304.

Allgemein ist

$$T_0 = T_s + M \cdot a^2$$

oder

$$T_s = T_0 - M \cdot a^2$$

also hier

$$T_s = \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha + M \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha - M \cdot a^2.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$a = \frac{h}{2} \cdot \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{G}{g} \cdot \left\{ \frac{R^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2} + \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\} \\ &= \frac{G}{2g} \cdot \left\{ R^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Für $\alpha = 0$ wird $a = 0$ und

$$T_s = T_x = \frac{M \cdot R^2}{2};$$

für $\alpha = 90^\circ$ wird

$$T_0 = T_y$$

und

$$T_s = \frac{G}{4 \cdot g} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$

e) Kennt man das Trägheitsmoment T_s bezogen auf eine beliebige Schwerpunktsachse (Fig. 305, 306, 307, 308, 309

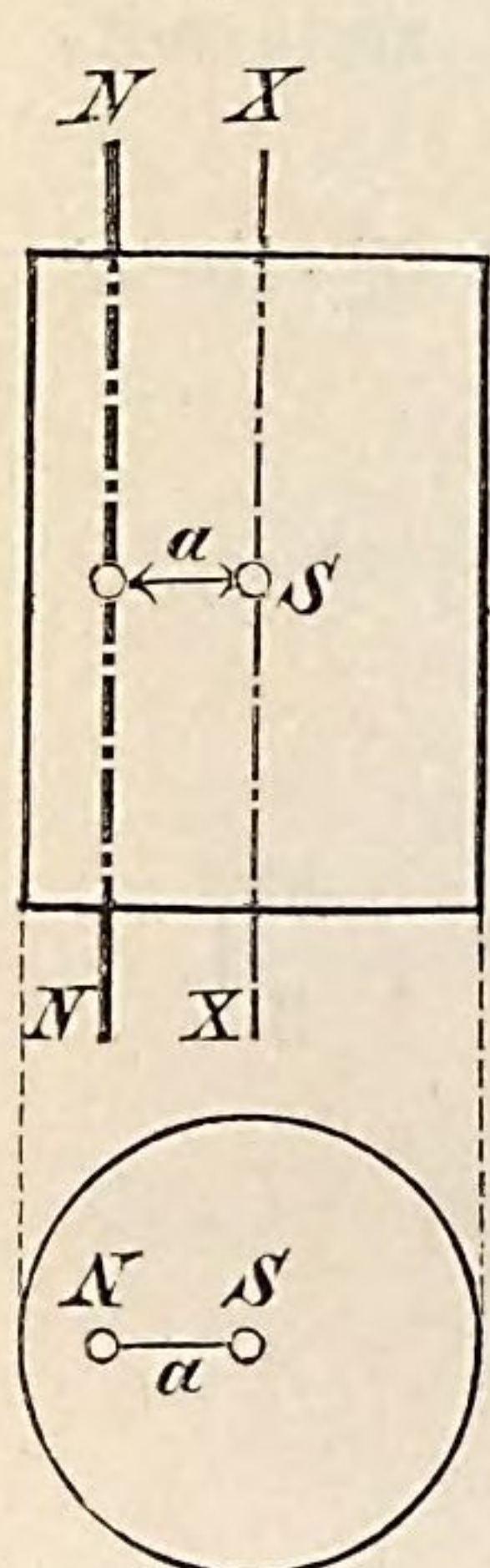


Fig. 305.

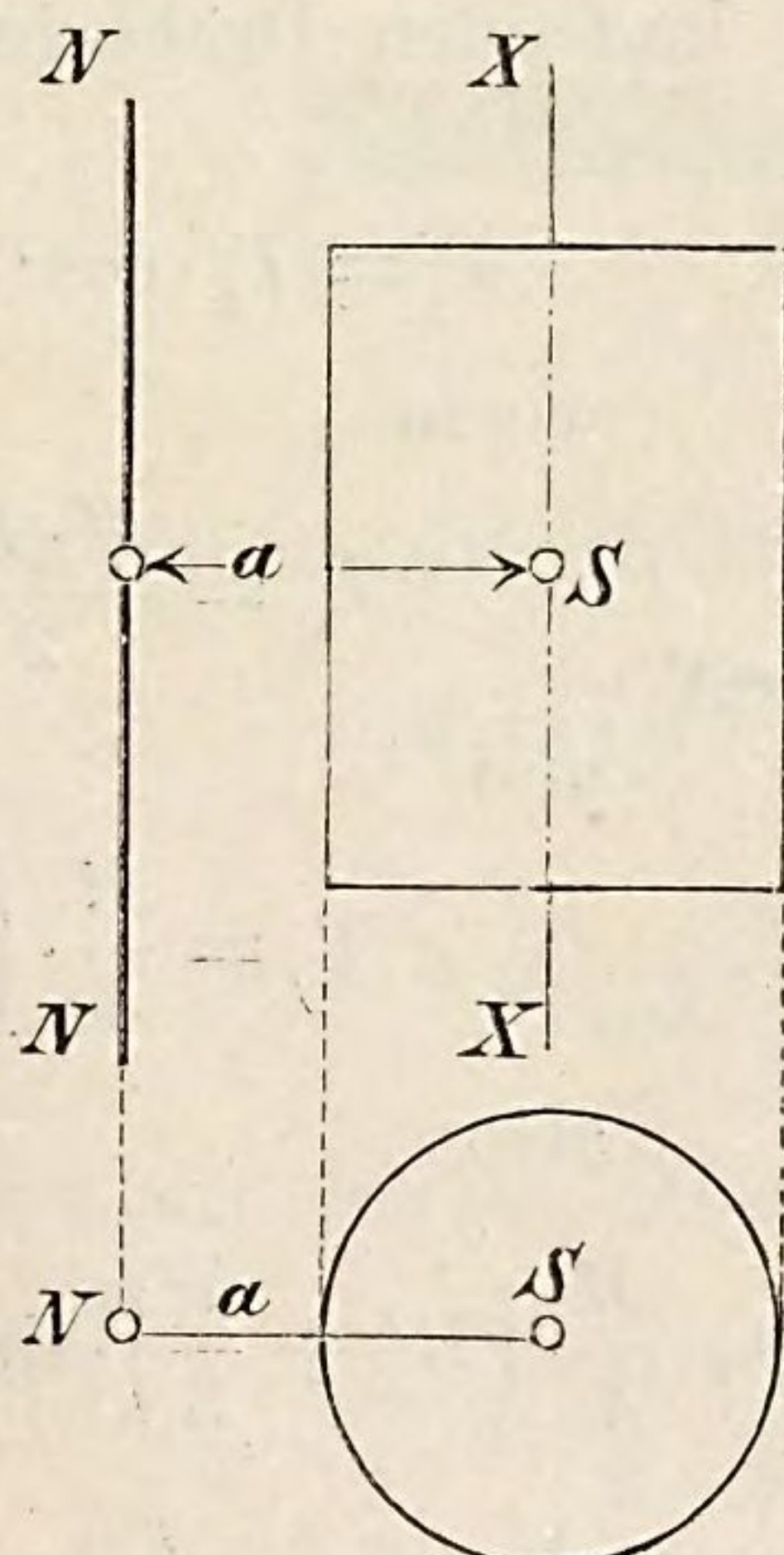


Fig. 306.

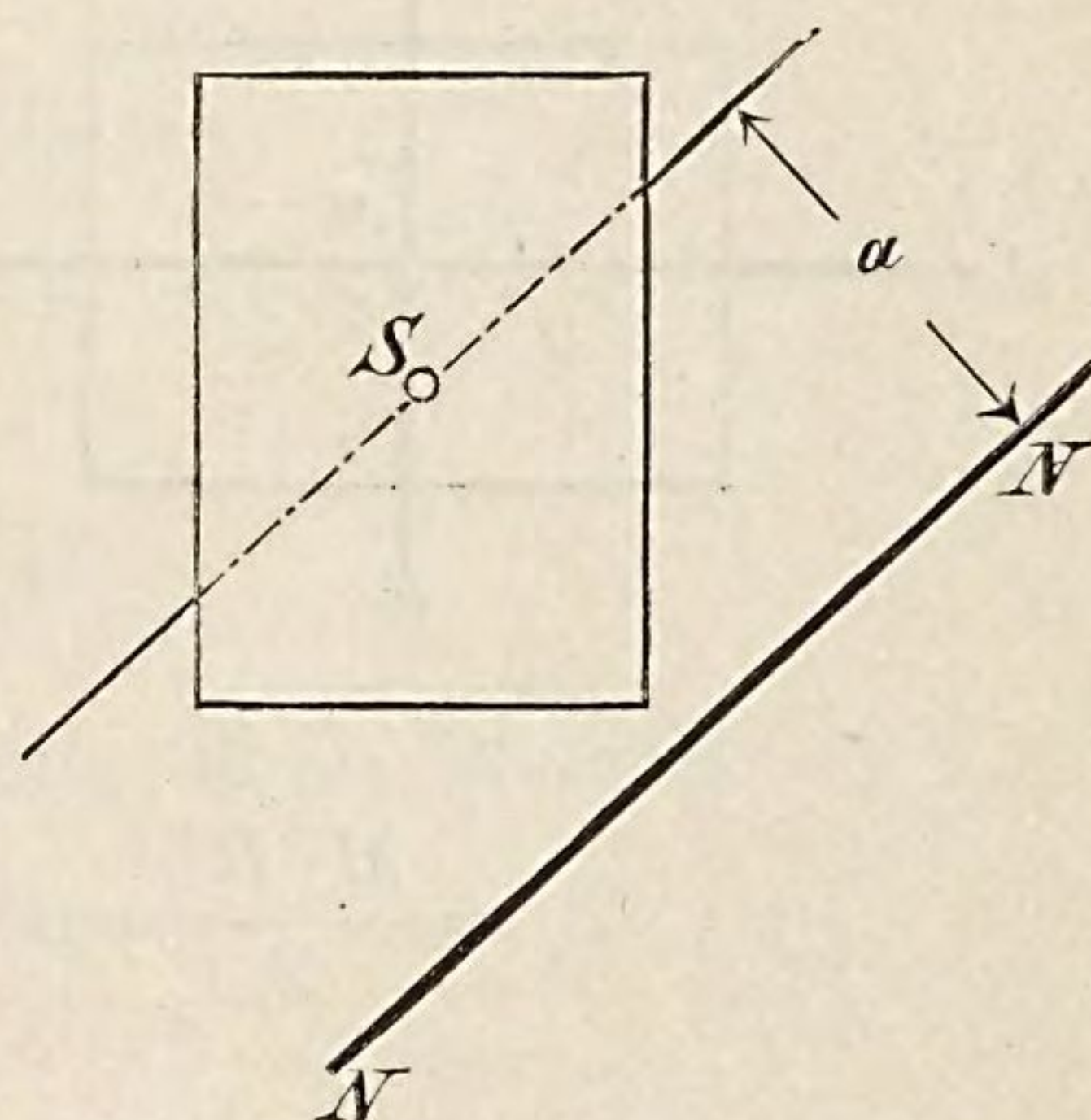


Fig. 307.

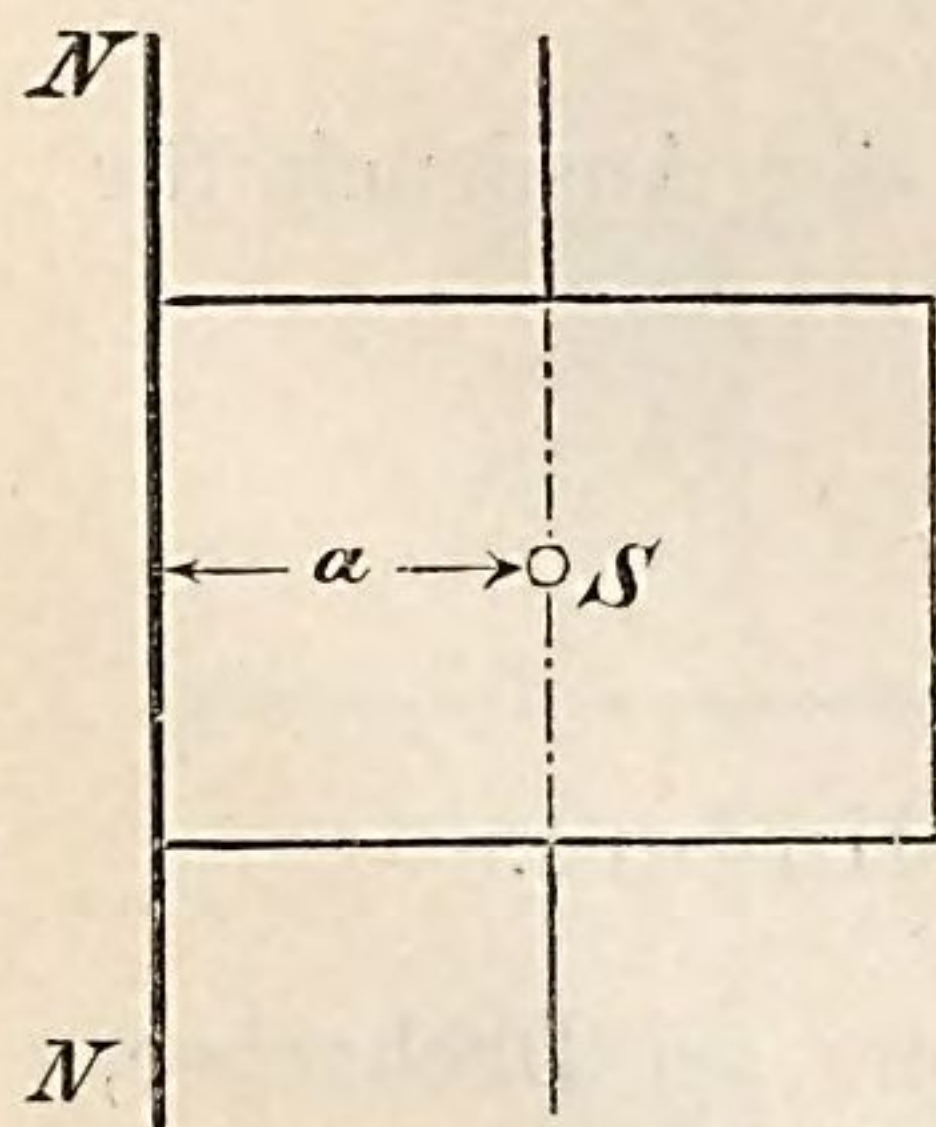


Fig. 308.

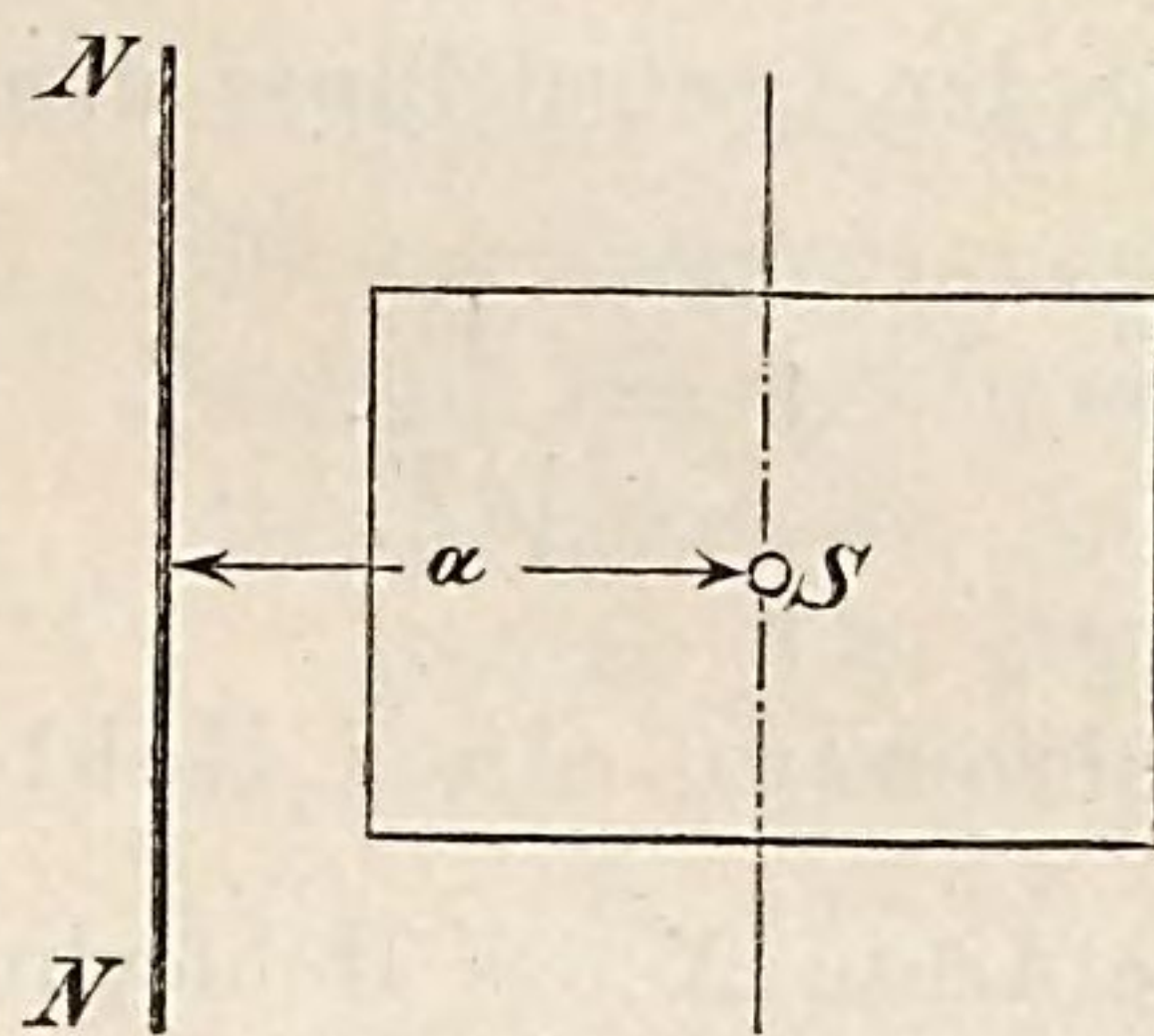


Fig. 309.

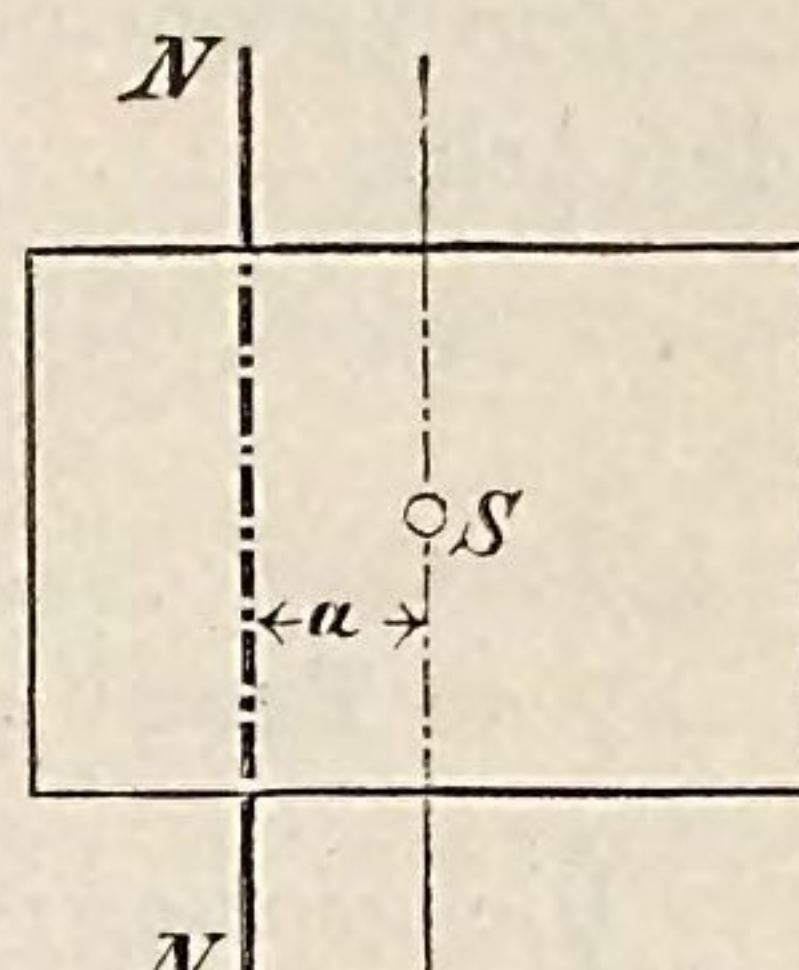


Fig. 310.

und 310), dann berechnet man für jede parallele Achse N in der beliebigen Entfernung a das Trägheitsmoment des Cylinders

$$T_n = T_s + M \cdot a^2$$

durch

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{G}{2g} \cdot \left\{ R^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\} + \frac{G}{g} \cdot a^2 \\ &= \frac{G}{g} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[R^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right] + a^2 \right\}. \end{aligned}$$

- f) Schneiden sich die X - und Y -Achse im Schwerpunkte des Cylinders, dann sind die Trägheitsmomente auf alle durch den Schwerpunkt laufenden Drehachsen zu ermitteln nach

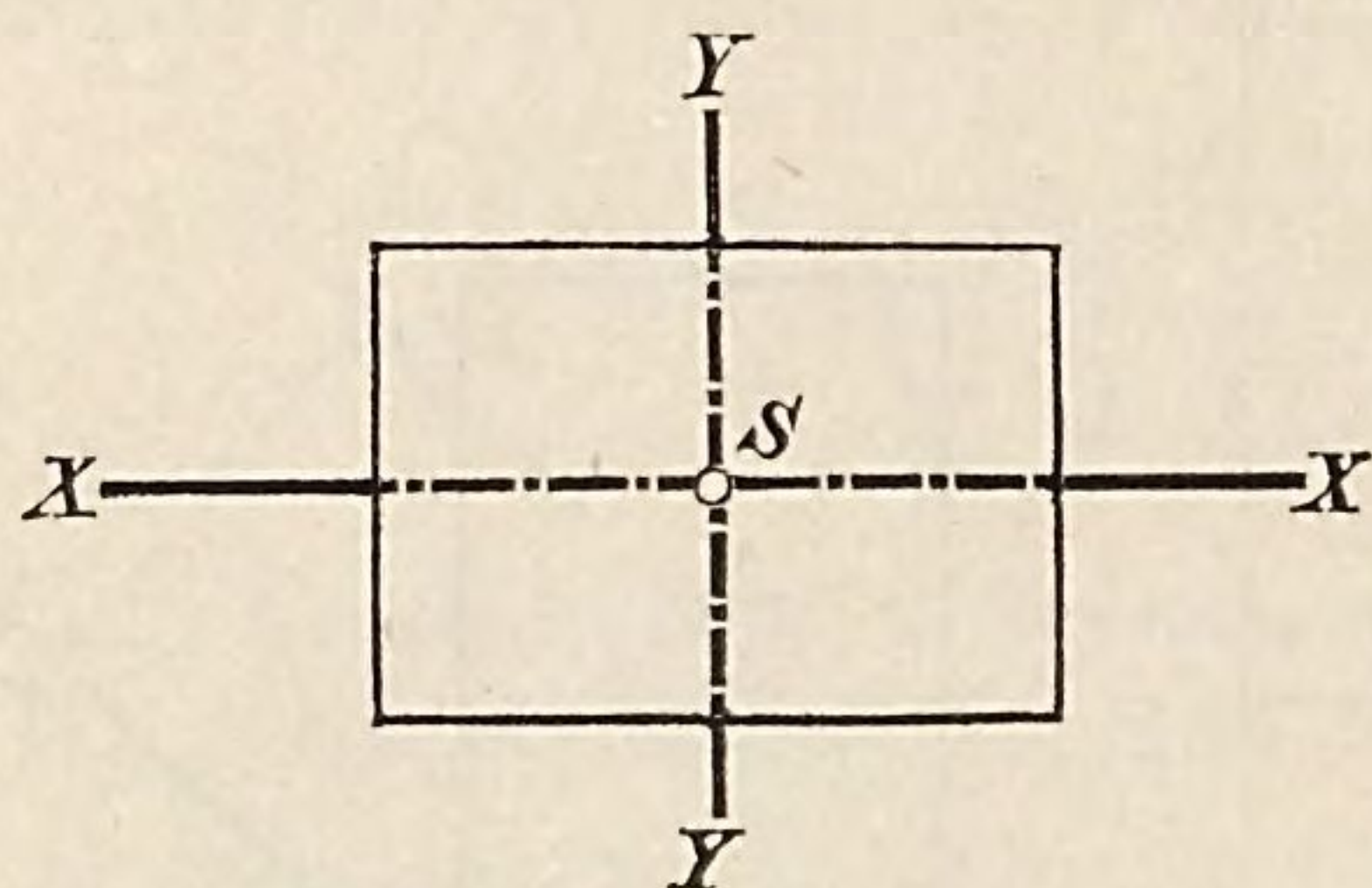


Fig. 311.

$$T_s = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \sin^2 \alpha,$$

worin

$$T_x = \frac{M \cdot R^2}{2}$$

und

$$T_y = \frac{M}{4} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right),$$

also

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{M \cdot R^2}{2} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{M}{4} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \\ &= \frac{G}{2g} \cdot \left\{ R^2 \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right) \cdot \sin^2 \alpha \right\} \end{aligned}$$

ist.

Zur Verzeichnung der Centralellipse dient der Ausdruck für die Achse

$$A_s = \frac{1}{\sqrt{T_s}}.$$

Trägheitsmoment eines Hohlcyllinders.

Die geometrische Achse X des Hohlcyllinders sei Drehachse, dann berechnet sich das Trägheitsmoment desselben bezogen auf

diese Achse aus der Differenz der Trägheitsmomente T_x des vollen Cylinders und des fehlenden Theiles, also ist

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\pi \cdot R^4}{2} \cdot h \cdot \gamma - \frac{\pi \cdot r^4}{2} \cdot h \cdot \gamma \\ &= \frac{\pi \cdot h \cdot \gamma}{2} \cdot (R^4 - r^4). \end{aligned}$$

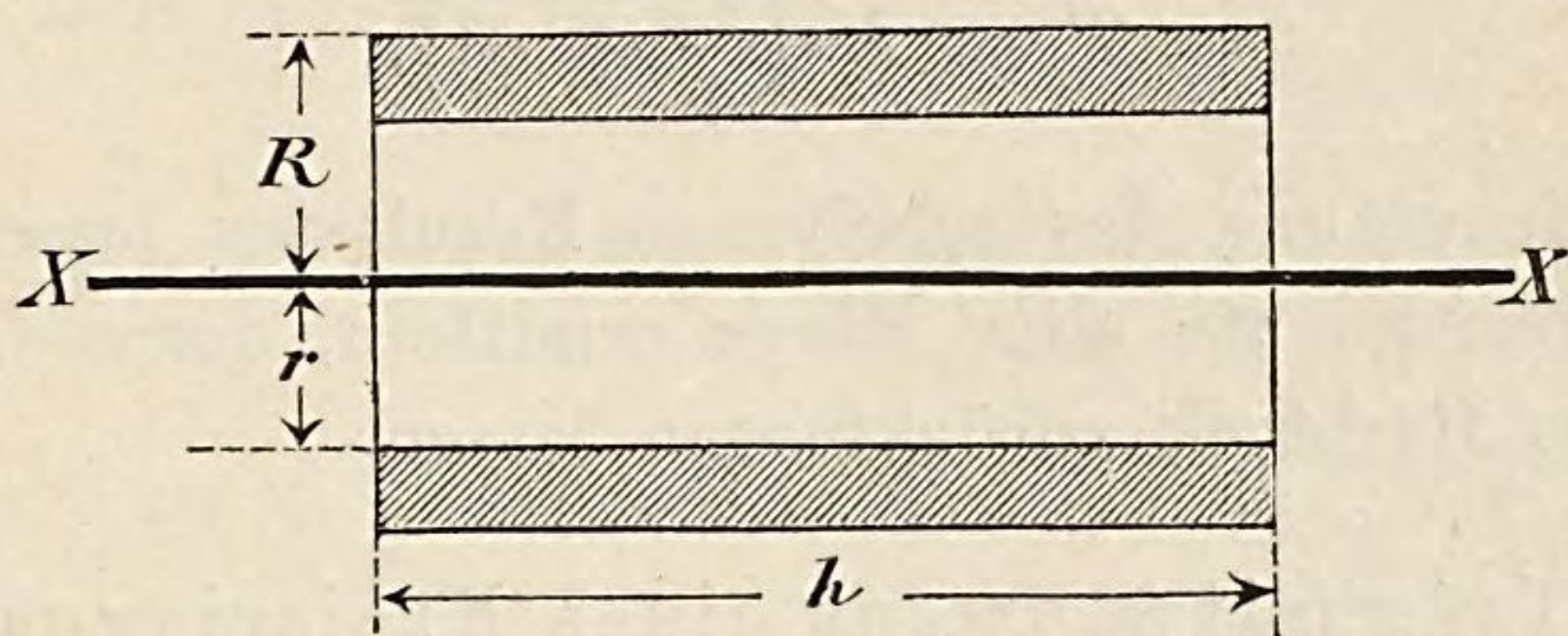


Fig. 312.

Nun ist die Masse des Hohlcyllinders

$$M = (R^2 - r^2) \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma$$

oder

$$\pi \cdot h \cdot \gamma = \frac{M}{R^2 - r^2},$$

folglich ergibt sich durch Einsetzung dieses Werthes

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{M}{2} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2} \\ &= \frac{G}{2g} \cdot (R^2 + r^2). \end{aligned}$$

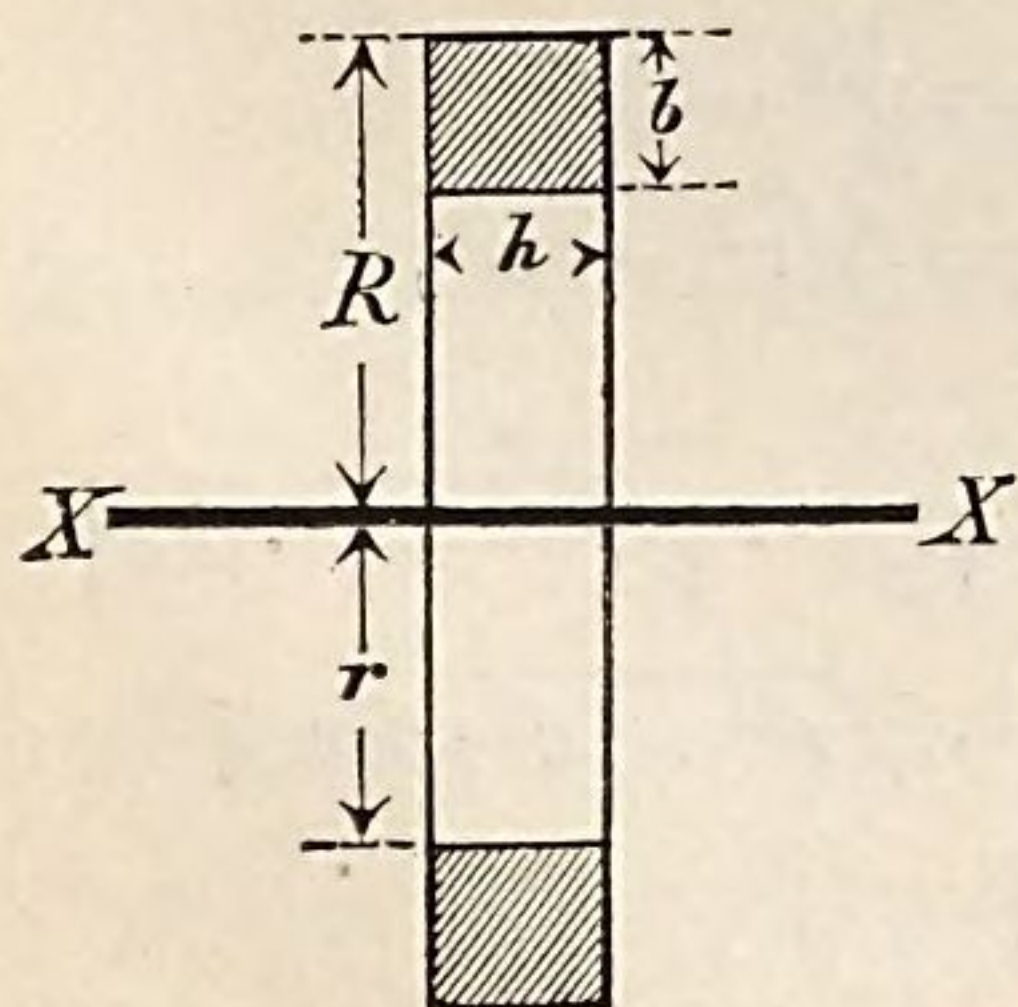


Fig. 313.

Dieses Resultat gilt natürlich auch für das Trägheitsmoment des rechteckigen Ringes eines Schwungrades bezogen auf die geometrische Achse.

Besitzt der Ring mit rechteckigem Querschnitt die Dicke h , die Breite b (Fig. 313), und ist ϱ der Schwerpunktsabstand der Fläche $b \cdot h$ von der X -Achse, dann kann auch geschrieben werden

$$M = 2 \cdot \varrho \cdot \pi \cdot b \cdot h,$$

$$R = \varrho + \frac{b}{2},$$

$$r = \varrho - \frac{b}{2},$$

und es ergibt sich mit Hilfe dieser Werthe und der Gleichung für T_x auch

$$T_x = M \cdot \left(\frac{b^2}{4} + \varrho^2 \right).$$

Unter Benutzung des erhaltenen Resultates lassen sich nun die Trägheitsmomente aller Ringe ermitteln, deren Querschnitte sich auf das Rechteck zurückführen lassen.

Trägheitsmoment eines Kreisringes

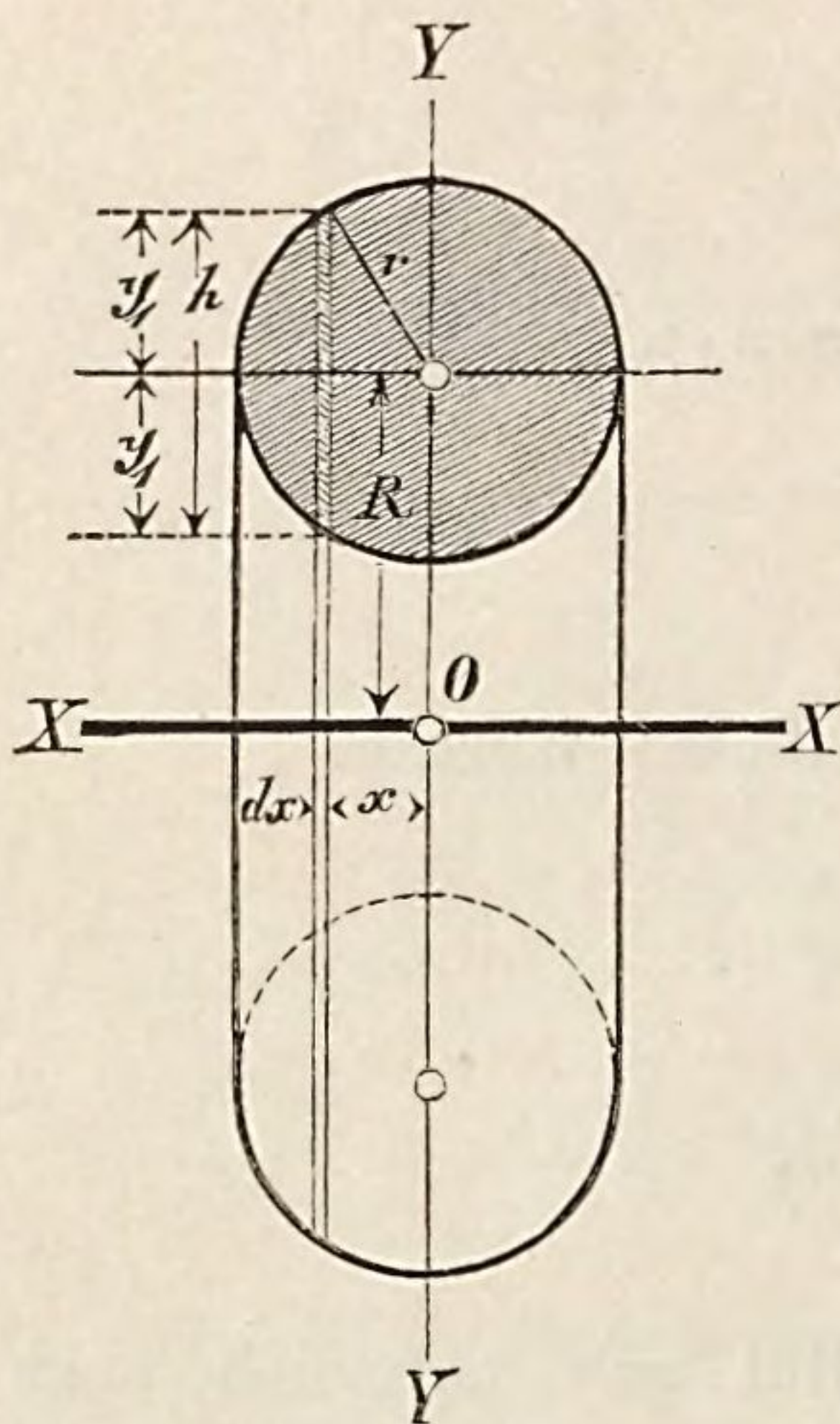


Fig. 314.

bezogen auf die geometrische Achse X . Nach Fig. 314 hat das ringförmige Element parallel zur Y -Achse eine Masse

$$m = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot (2 \cdot y_1) \cdot dx \cdot \gamma,$$

weil dx die Dicke und $2y_1$ die Breite des rechteckigen Querschnittes ist. Das Trägheitsmoment dieses Elementes ist

$$\begin{aligned} dT_x &= m \cdot \left[\frac{(2 \cdot y_1)^2}{4} + R^2 \right] \\ &= 2 \cdot R \cdot \pi \cdot 2 \cdot y_1 \cdot dx \cdot \gamma \cdot (y_1^2 + R^2) \\ &= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot (y_1^3 \cdot dx + y_1 \cdot R^2 \cdot dx). \end{aligned}$$

Nun ist nach Figur

$$y_1^2 = r^2 - x^2$$

oder $y_1 = \sqrt{r^2 - x^2},$

also auch

$$\begin{aligned} dT_x &= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot [(r^2 - x^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx + R^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx] \\ &= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot [r^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx - x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx + \\ &\quad + R^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx] \\ &= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot [(r^2 + R^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx - x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx] \end{aligned}$$

oder das Trägheitsmoment des ganzen Ringes

$$\begin{aligned}
 T_x &= 8 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \int_0^r [(r^2 + R^2) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx - x^2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx] \\
 &= 8 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \left\{ (r^2 + R^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8} \cdot r^4 \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \\
 &= 2 \cdot R \cdot r^2 \cdot \pi^2 \cdot \gamma \cdot \left\{ R^2 + \frac{3}{4} \cdot r^2 \right\} \\
 &= 2 \cdot R \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \left\{ R^2 + \frac{3}{4} \cdot r^2 \right\} \\
 &= M \cdot \left\{ R^2 + \frac{3}{4} \cdot r^2 \right\},
 \end{aligned}$$

wobei M die Masse des ganzen Ringes ist.

Trägheitsmoment eines Ringes von elliptischem Querschnitt bezogen auf die geometrische Achse.

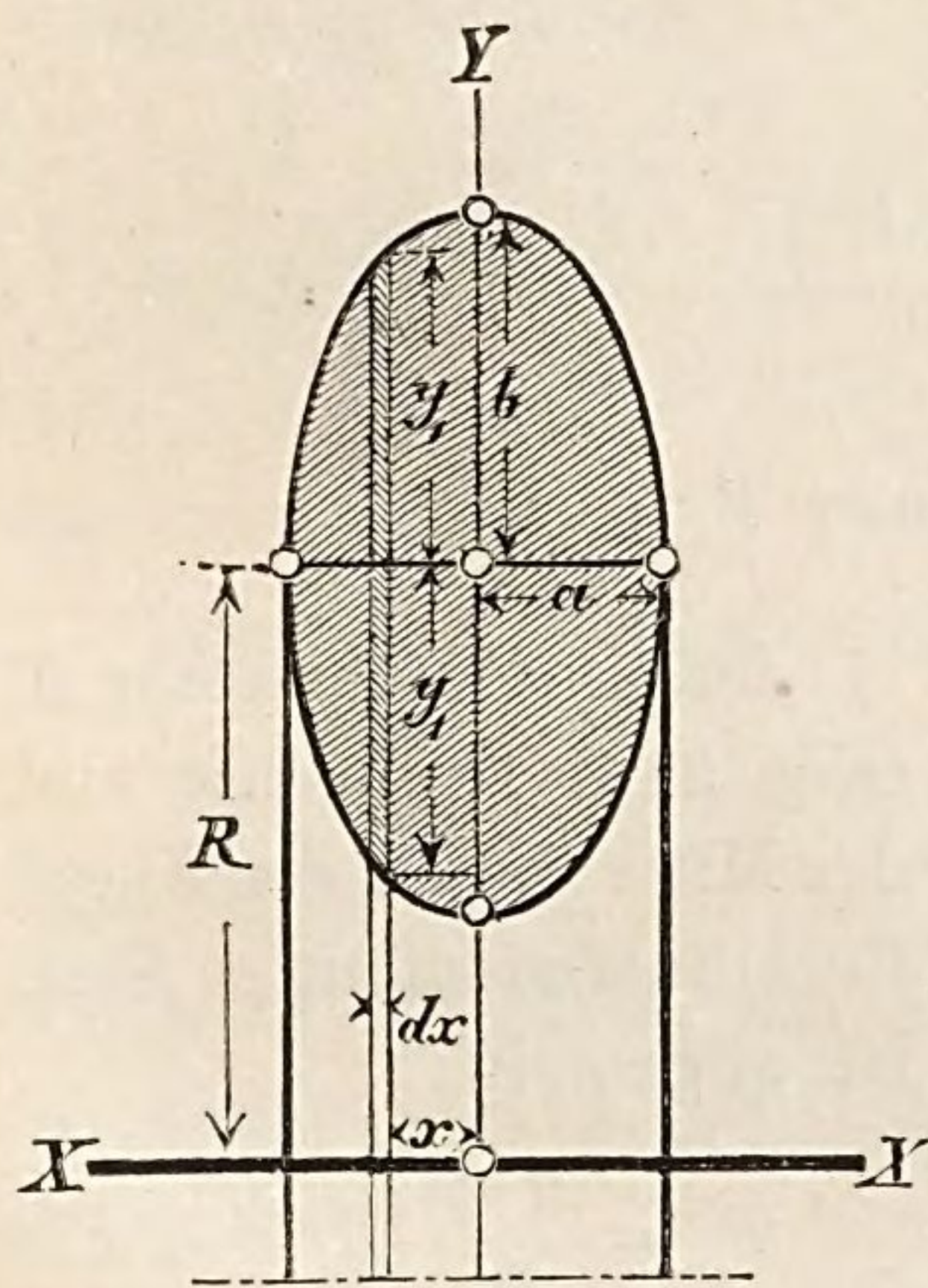


Fig. 315.

Es ist mit Bezug auf Fig. 315

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

oder

$$y_1^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot b^2$$

und

$$dT_x = m \cdot \left[\frac{(2 \cdot y_1)^2}{4} + R^2 \right];$$

ferner ist die Masse eines normal zur X-Achse gelegten Ringelementes

$$m = 2 \cdot y_1 \cdot dx \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma$$

und infolgedessen

$$\begin{aligned}
 dT_x &= 2 \cdot y_1 \cdot dx \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot (y_1^2 + R^2) \\
 &= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot (y_1^3 \cdot dx + R^2 \cdot y_1 \cdot dx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot b^3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + R^2 \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx \right] \\
&= 4 \cdot R \cdot \pi \cdot b \cdot \gamma \cdot \left[b^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx - \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx + \right. \\
&\quad \left. + R^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx \right].
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich das Trägheitsmoment des ganzen Ringes:

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{8 \cdot R \cdot \pi \cdot b \cdot \gamma}{a} \cdot \int_0^a \left[(b^2 + R^2) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx - \frac{b^2 \cdot x^2}{a^2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \right] \\
&= \frac{8 \cdot R \cdot \pi \cdot b \cdot \gamma}{a} \cdot \left[(b^2 + R^2) \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4 \cdot \pi}{16} \right] \\
&= 2 \cdot R \cdot \pi^2 \cdot a \cdot b \cdot \gamma \cdot \left[R^2 + \frac{3}{4} \cdot b^2 \right]
\end{aligned}$$

oder, da die Masse des elliptischen Ringes

$$M = 2 \cdot R \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \pi \cdot \gamma$$

ist, so folgt schliesslich auch

$$T_x = M \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot b^2 + R^2 \right).$$

Trägheitsmoment einer Kugel.

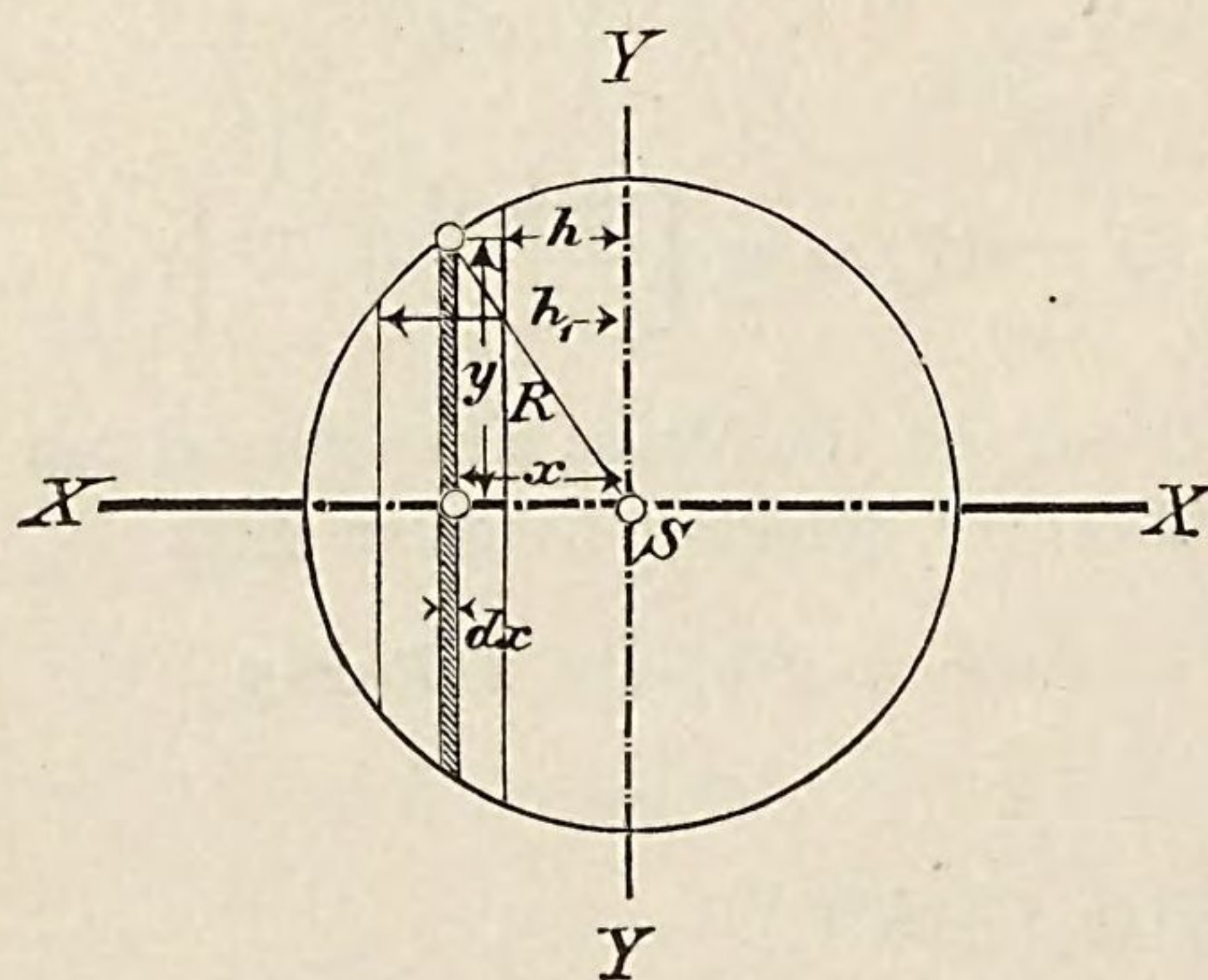


Fig. 316.

Ist ein Durchmesser X (Fig. 316) Drehachse und der Mittelpunkt der Kugel Koordinatenanfang, dann ist allgemein

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx,$$

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx$$

und im vorliegenden Falle

$$y^2 = R^2 - x^2;$$

folglich gilt für den Kugeltheil von h bis h_1

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int_h^{h_1} (R^2 - x^2)^2 \cdot dx$$

oder

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int_h^{h_1} (R^4 \cdot dx - 2 \cdot R^2 \cdot x^2 \cdot dx + x^4 \cdot dx) \\ &= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \left\{ R^4 \cdot (h_1 - h) - \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot (h_1^3 - h^3) + \frac{1}{5} \cdot (h_1^5 - h^5) \right\}. \end{aligned}$$

Die Masse jenes Kugeltheiles beträgt

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \int_h^{h_1} (R^2 \cdot dx - x^2 \cdot dx)$$

oder

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \left\{ R^2 \cdot (h_1 - h) - \frac{1}{3} \cdot (h_1^3 - h^3) \right\},$$

weshalb schliesslich

$$T_x = \frac{M}{2} \cdot \frac{R^4 \cdot (h_1 - h) - \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot (h_1^3 - h^3) + \frac{1}{5} \cdot (h_1^5 - h^5)}{R^2 \cdot (h_1 - h) - \frac{1}{3} \cdot (h_1^3 - h^3)}$$

ist.

Für die Halbkugel ist $h = 0$ und $h_1 = R$, folglich

$$T_x = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2,$$

worin M die Masse der Halbkugel bedeutet.

Behält man dieselbe Bedeutung für M bei, dann gilt für die ganze Kugel

$$T_x = \frac{4}{5} \cdot M \cdot R^2;$$

versteht man jedoch unter M die Masse und unter G das Gewicht der ganzen Kugel, dann gilt für das Trägheitsmoment der letzteren

$$T_x = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{G \cdot R^2}{g}.$$

Nach der Gleichung

$$T_s = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \sin^2 \alpha$$

ist, da hier

$$T_x = T_y$$

ist,

$$T_s = T_x,$$

d. h. das Trägheitsmoment bezogen auf einen beliebigen Durchmesser ist stets dasselbe, und das Trägheitsellipsoid geht in eine Kugel über.

Für das Trägheitsmoment bezogen auf eine ausserhalb des Kugelmittelpunktes liegende Achse gilt stets

$$T_n = T_x + M \cdot a^2$$

$$= \frac{G}{g} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot R^2 + a^2 \right).$$

Trägheitsmoment eines Kegels

bezogen auf die geometrische Achse X . In die allgemeine Gleichung

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx$$

ist mit Bezug auf Fig. 317

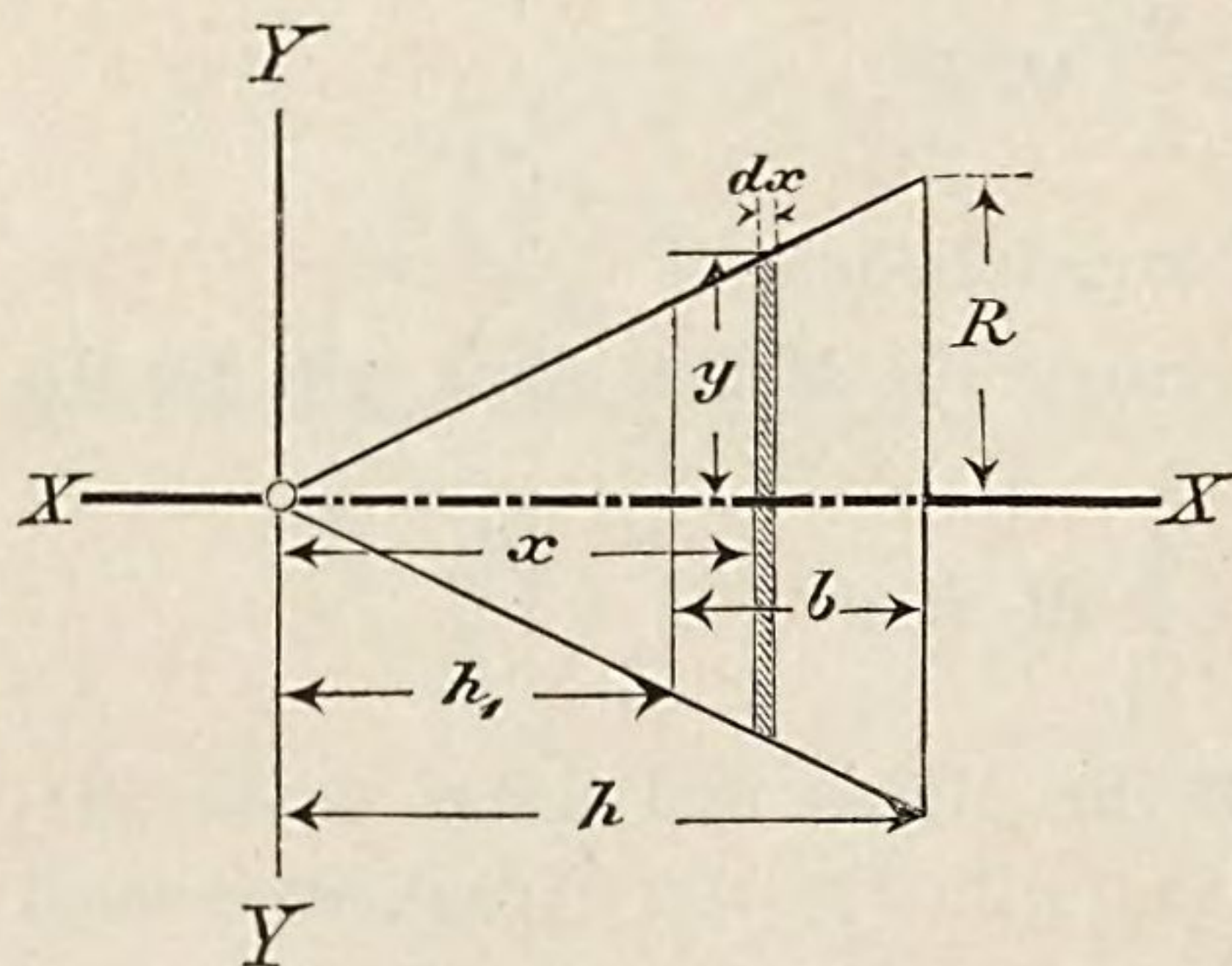


Fig. 317.

$$y = \frac{R}{h} \cdot x$$

einzusetzen, und es folgt für das Trägheitsmoment des Kegelstumpfes von der Höhe $b = h - h_1$

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \frac{R^4}{h^4} \cdot \int_{h_1}^h x^4 \cdot dx$$

$$= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \frac{R^4}{h^4} \cdot \frac{(h^5 - h_1^5)}{5}.$$

Die Masse des Kegelstutzes ist

$$\begin{aligned} M &= \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx = \pi \cdot \gamma \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \int_{h_1}^h x^2 \cdot dx \\ &= \pi \cdot \gamma \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{h^3 - h_1^3}{3}; \end{aligned}$$

hieraus folgt aber

$$\pi \cdot \gamma \cdot \frac{R^2}{h^2} = \frac{3 \cdot M}{h^3 - h_1^3}$$

und mit Hilfe dieses Werthes

$$T_x = \frac{3}{10} \cdot \frac{M \cdot R^2}{h^2} \cdot \frac{h^5 - h_1^5}{h^3 - h_1^3}.$$

Es ist zu setzen

$$h_1 = h - b$$

und für den ganzen Kegel

$$h_1 = 0,$$

also

$$h = b$$

oder

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{3}{10} \cdot M \cdot R^2 \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{G \cdot R^2}{g}. \end{aligned}$$

Trägheitsmoment eines Hohlkegels

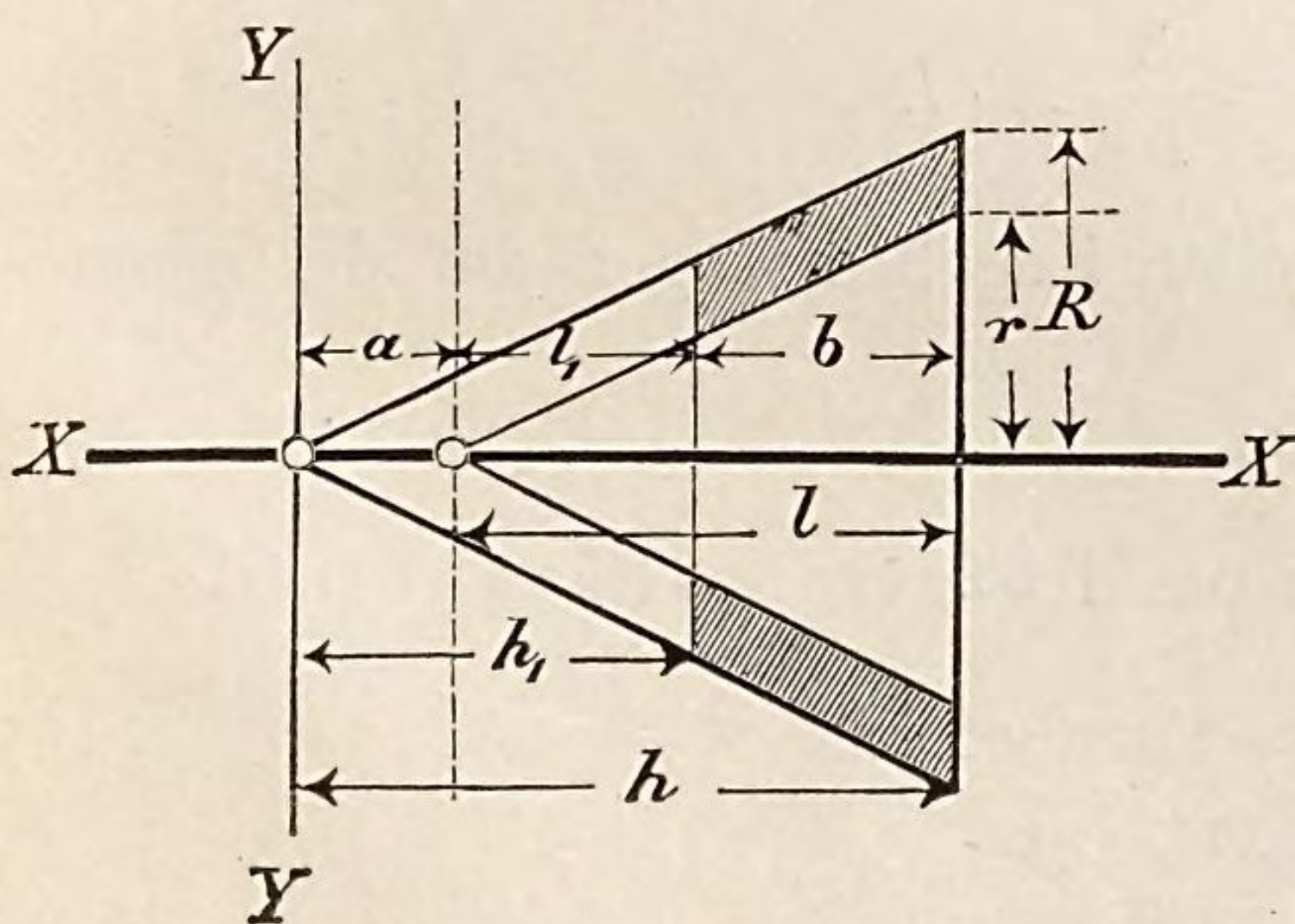


Fig. 318.

bezogen auf die geometrische Achse X .

Mit Rücksicht auf Fig. 318 gelten folgende Beziehungen:

$$h_1 = h - b, \quad l = \frac{r}{R} \cdot h,$$

$$l_1 = l - b,$$

jedoch nur bis $h_1 = a$; wird

$$h_1 \leq a,$$

so ist, wie aus Fig. 318 hervorgeht,

$$l_1 = 0$$

zu setzen.

Ferner ist mit Bezug auf die vorigen Rechnungen

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{10} \cdot \left\{ \frac{R^4}{h^4} \cdot (h^5 - h_1^5) - \frac{r^4}{l^4} \cdot (l^5 - l_1^5) \right\},$$

$$M = \frac{\pi \cdot \gamma}{3} \cdot \left\{ \frac{R^2}{h^2} \cdot (h^3 - h_1^3) - \frac{r^2}{l^2} \cdot (l^3 - l_1^3) \right\},$$

und nach Einsetzung des letzten Werthes in den ersteren ergibt sich das Trägheitsmoment eines Stutzes vom Hohlkegel, dessen Höhe b ist, durch

$$T_x = \frac{3}{10} \cdot \frac{M \cdot R^2}{h^2} \cdot \frac{(h^5 - h_1^5) - (l^5 - l_1^5)}{(h^3 - h_1^3) - (l^3 - l_1^3)}.$$

Für den ganzen Hohlkegel ist

$$h_1 = 0, \text{ also auch } l_1 = 0,$$

$$b = h$$

und

$$l = \frac{r}{R} \cdot h,$$

folglich ist

$$T_x = \frac{3}{10} \cdot M \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck

$$r = 0,$$

so ergibt sich wieder

$$T_x = \frac{3}{10} \cdot M \cdot R^2,$$

das Trägheitsmoment des vollen Kegels bezogen auf die geometrische Achse.

Trägheitsmoment eines Rotations-Paraboloids.

Es ist für das Rotations-Paraboloid

$$\frac{y^2}{x} = \frac{R^2}{h}$$

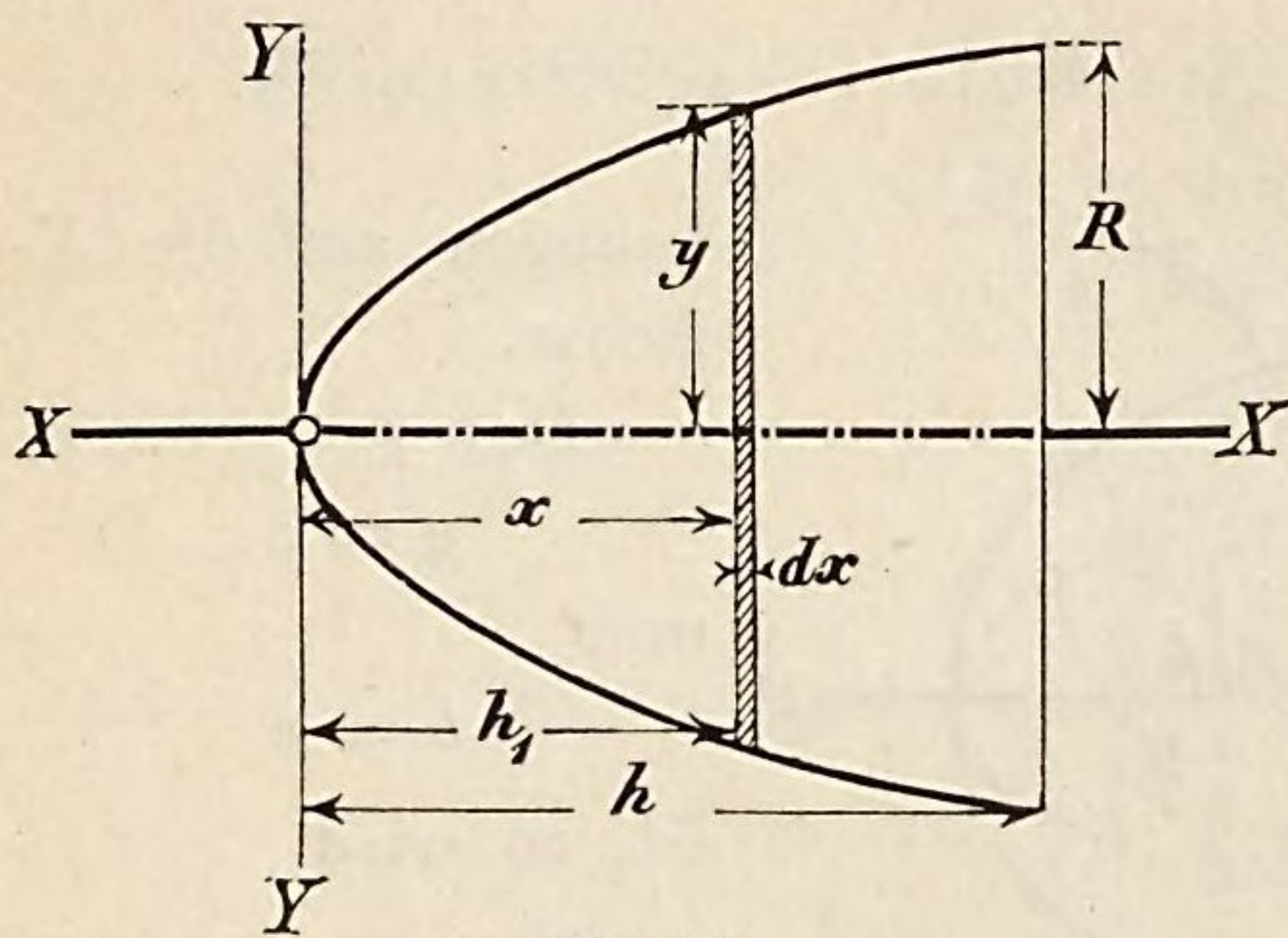


Fig. 319.

oder

$$y^2 = \frac{R^2}{h} \cdot x,$$

folglich ergibt sich nach den allgemeinen Gleichungen

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx$$

und

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx,$$

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \frac{R^4}{h^2} \cdot \int_{h_1}^h x^2 \cdot dx \\ &= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \frac{R^4}{3 \cdot h^2} \cdot (h^3 - h_1^3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} M &= \pi \cdot \gamma \cdot \frac{R^2}{h} \cdot \int_{h_1}^h x \cdot dx \\ &= \pi \cdot \gamma \cdot \frac{R^2}{2 \cdot h} \cdot (h^2 - h_1^2) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\pi \cdot \gamma \cdot R^2}{2 \cdot h} = \frac{M}{h^2 - h_1^2}.$$

Setzt man den letzten Werth in die Gleichung für T_x ein, so ergibt sich

$$T_x = \frac{M \cdot R^2}{3 \cdot h} \cdot \frac{h^3 - h_1^3}{h^2 - h_1^2},$$

und für das Trägheitsmoment des ganzen Paraboloids, da für dasselbe

$$h_1 = 0$$

ist, wird

$$T_x = \frac{M \cdot R^2}{3}.$$

Trägheitsmoment des Rotations-Ellipsoids,

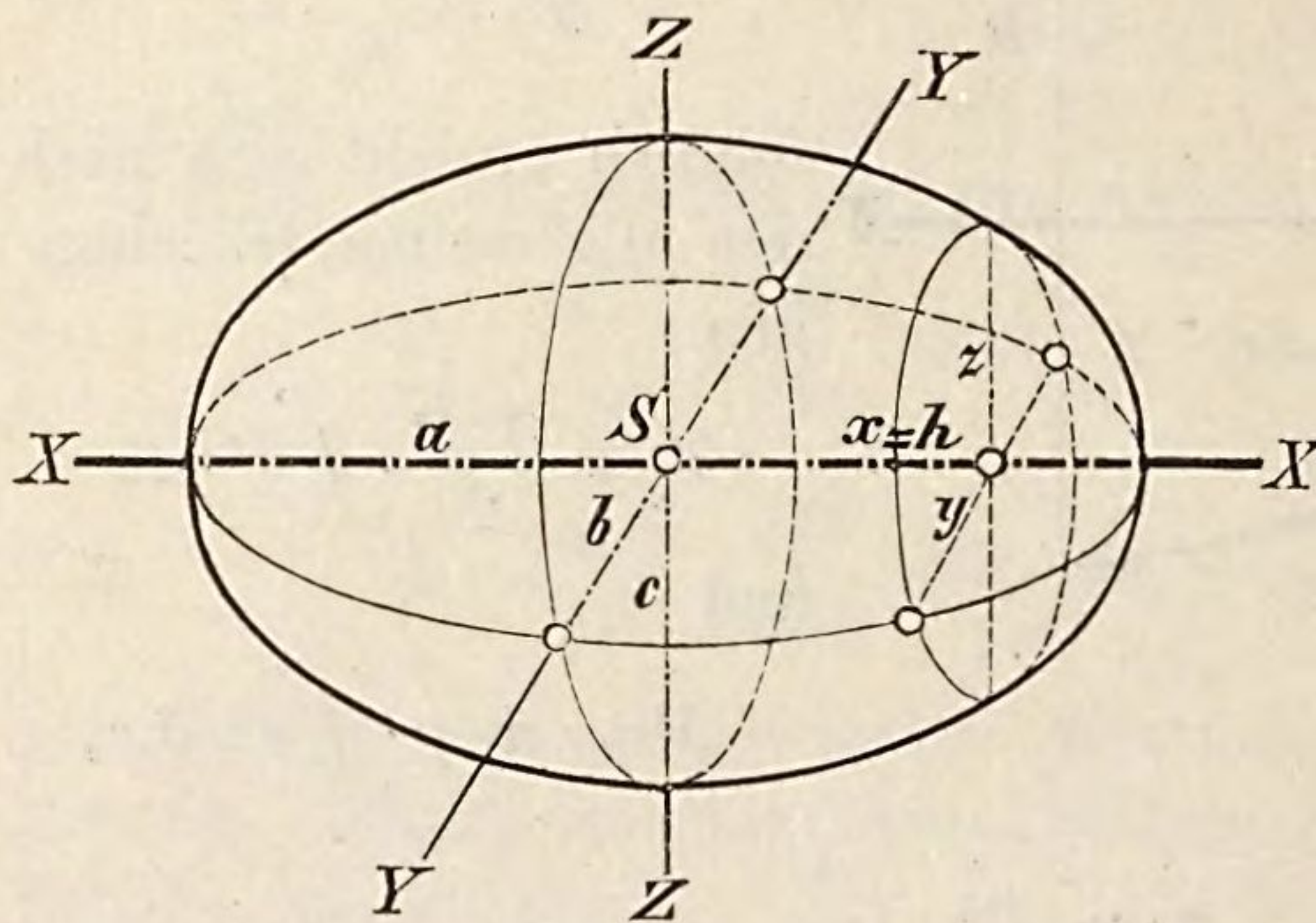


Fig. 320.

bezogen auf die X-Achse.

Da

$$y = z$$

und

$$b = c$$

ist, so wird

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot b^2.$$

Nach

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot \int y^4 \cdot dx$$

und

$$M = \pi \cdot \gamma \cdot \int y^2 \cdot dx$$

wird im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\pi \cdot \gamma}{2} \cdot b^4 \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \cdot dx \\ &= \frac{\pi \cdot \gamma \cdot b^4}{2} \cdot \int_0^h \left(1 - 2 \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right) \cdot dx \end{aligned}$$

$$T_x = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot b^4}{2} \cdot \left(h - \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3}{a^2} + \frac{h^5}{5 \cdot a^4}\right)$$

und

$$\begin{aligned} M &= \pi \cdot \gamma \cdot b^2 \cdot \int_0^h \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \cdot dx \\ &= \pi \cdot \gamma \cdot b^2 \cdot \left(h - \frac{h^3}{3 \cdot a^2}\right) \end{aligned}$$

oder

$$\pi \cdot \gamma \cdot b^2 = \frac{M}{h - \frac{h^3}{3 \cdot a^2}};$$

folglich gilt auch

$$T_x = \frac{M \cdot b^2}{2} \cdot \frac{h - \frac{2}{3} \cdot \frac{h^3}{a^2} + \frac{h^5}{5 \cdot a^4}}{h - \frac{h^3}{3 \cdot a^2}}.$$

Für das halbe Rotations-Ellipsoid würde sein

$$h = a,$$

also

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{4}{5} \cdot \frac{M \cdot b^2}{2} \\ &= \frac{2}{5} \cdot M \cdot b^2, \end{aligned}$$

wenn M die Masse des halben Rotations-Ellipsoids ist.

Bedeutet hingegen M die Masse des ganzen Körpers, dann kann auch für dessen Trägheitsmoment, bezogen auf die X -Achse, geschrieben werden

$$T_x = \frac{2}{5} \cdot M \cdot b^2$$

und geht das Ellipsoid in eine Kugel über, wird also

$$b = R,$$

so folgt, wie früher,

$$T_x = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2.$$

Trägheitsmoment einer unendlich dünnen rechteckigen Platte (Fig. 321).

- a) Bezogen auf die durch den Schwerpunkt S der Platte laufende und mit derselben zusammenfallende X -Achse

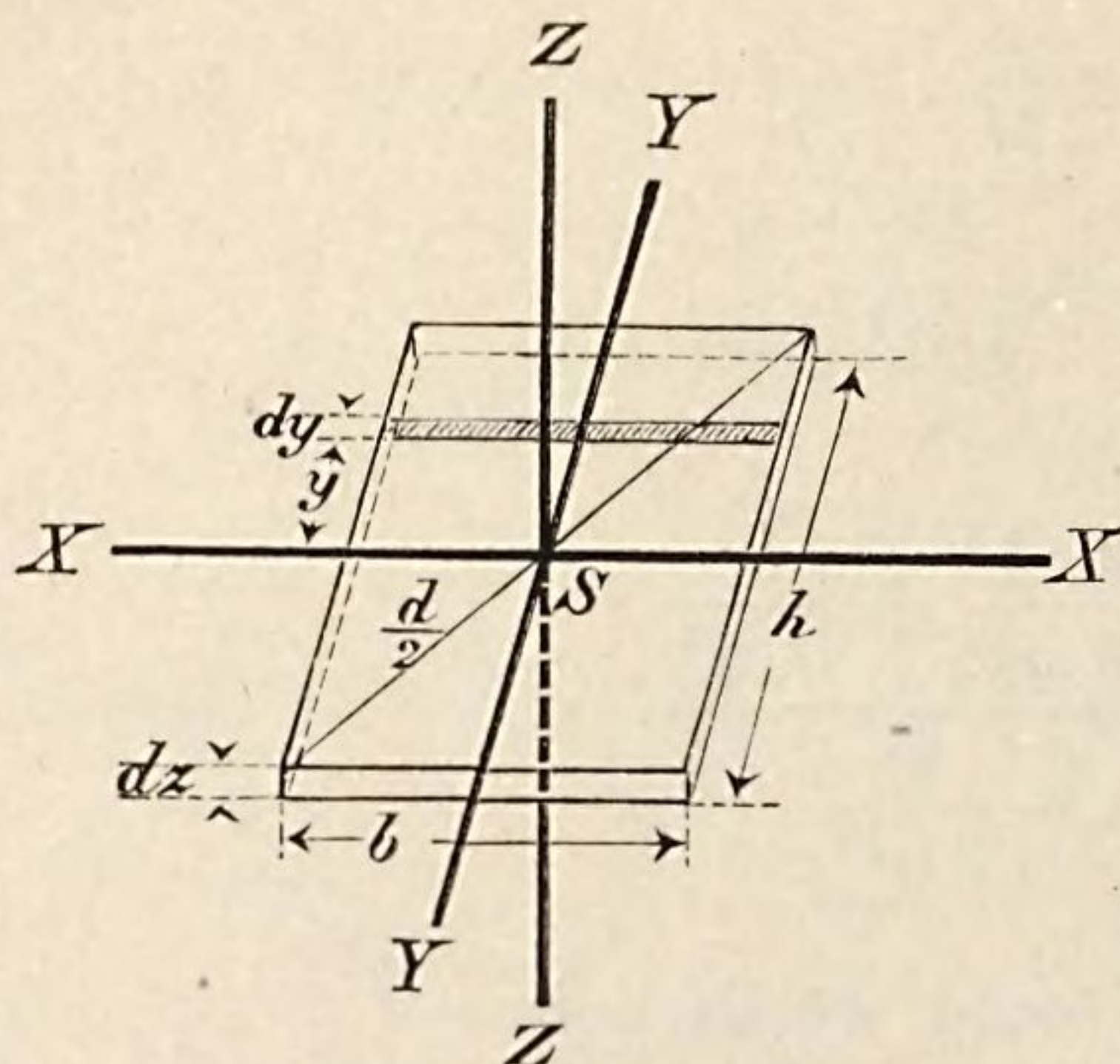


Fig. 321.

findet sich das Trägheitsmoment mit Hilfe des Querschnittsmomentes * durch

$$T_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \gamma \cdot dz$$

und

b) bezogen auf die Y-Achse durch

$$T_y = \frac{h \cdot b^3}{12} \cdot \gamma \cdot dz.$$

c) Das Trägheitsmoment der Platte bezogen auf die zur Platte resp. zu der X- und Y-Achse senkrecht stehende und durch den Schwerpunkt S laufende Z-Achse hingegen bestimmt sich durch

$$\begin{aligned} T_z &= T_x + T_y \\ &= \frac{1}{12} \cdot (b \cdot h^3 + h \cdot b^3) \cdot \gamma \cdot dz \\ &= \frac{b \cdot h}{12} \cdot (b^2 + h^2) \cdot \gamma \cdot dz \end{aligned}$$

oder durch

$$T_z = \frac{b \cdot h \cdot dz \cdot \gamma \cdot d^2}{12}.$$

* Es ist das Querschnittsmoment

$$q = \Sigma(f \cdot \varrho^2)$$

und hier mit Bezug auf Fig. 321

$$f = b \cdot dy,$$

$$\varrho = y,$$

also

$$\begin{aligned} \Sigma(f \cdot \varrho^2) &= 2b \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy \\ &= \frac{b \cdot h^3}{12}. \end{aligned}$$

Da nun die Masse der Platte

$$M = b \cdot h \cdot dz \cdot \gamma$$

ist, so ergibt sich schliesslich

$$T_z = \frac{M \cdot d^2}{12}.$$

Trägheitsmoment eines dreiseitigen Prismas.

Der Querschnitt sei ein gleichschenkeliges Dreieck mit den gleichen Seiten r und der dritten Seite a (Fig. 322 und 323),

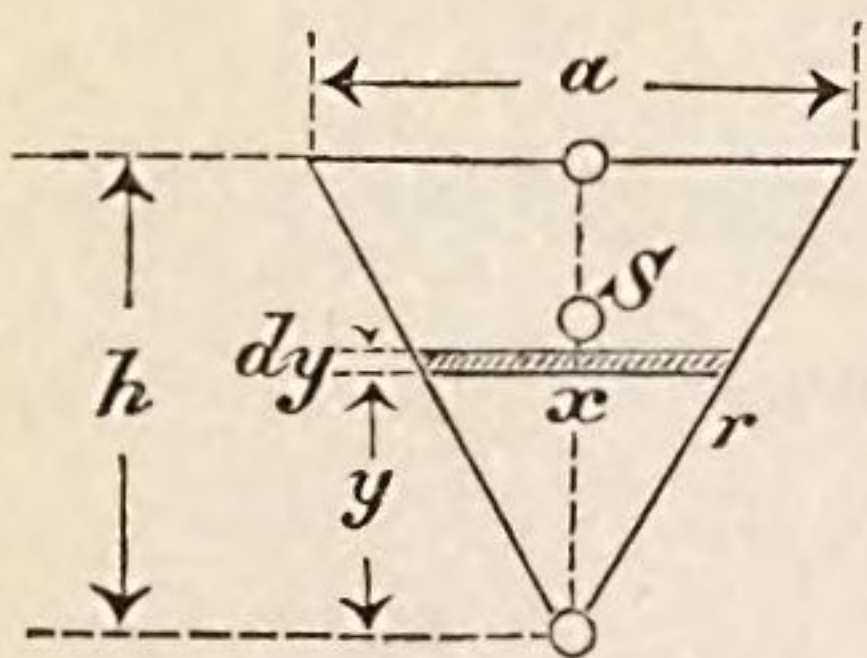


Fig. 322.

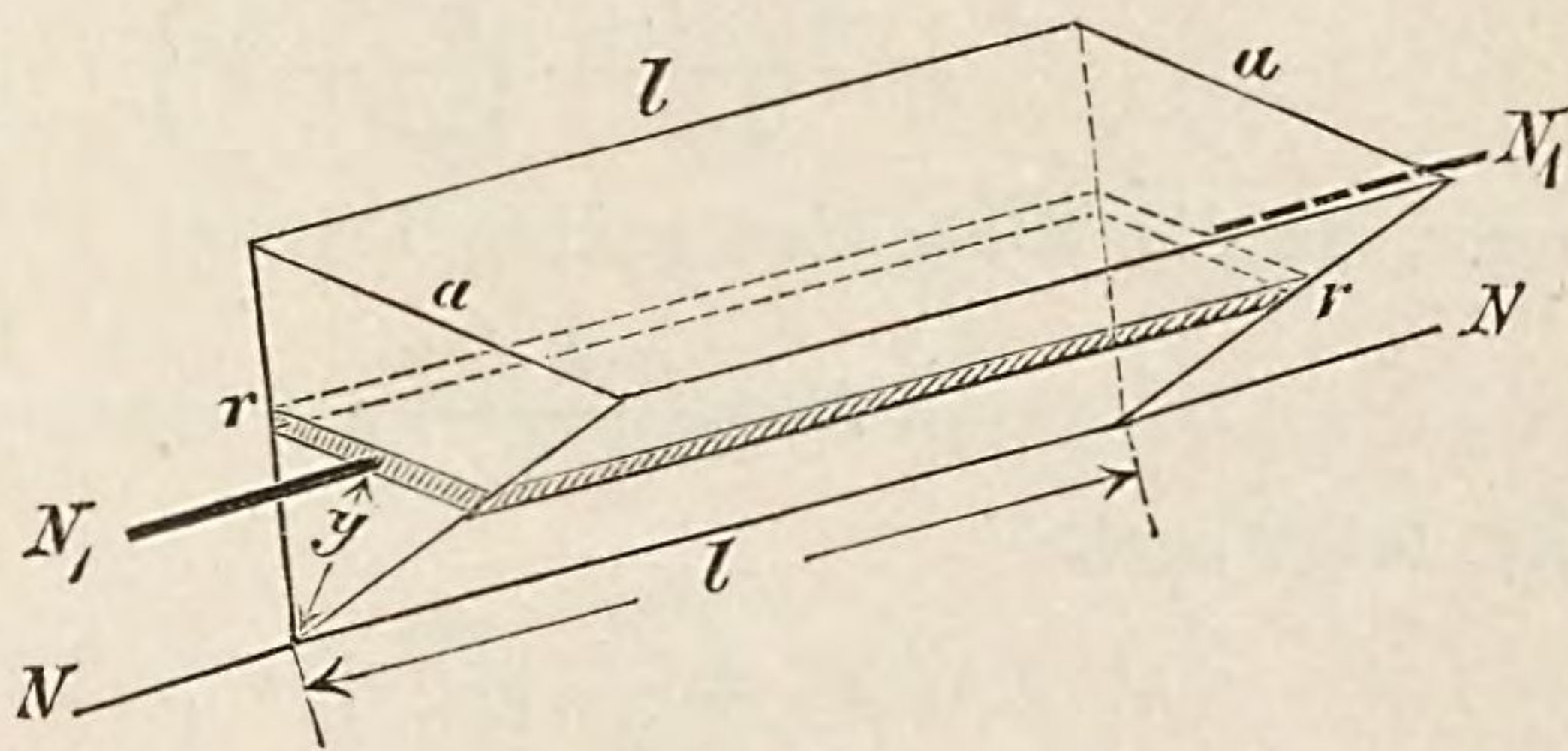


Fig. 323.

die Drehachse N des Prismas falle mit einer Kante von der Länge l zusammen, und das Trägheitsmoment bezogen auf jene Achse werde mit Hilfe von Massenelementen

$$m = l \cdot x \cdot dy \cdot \gamma$$

parallel zur Fläche $a \cdot l$ resp. zur Drehachse N bestimmt.

Es ist das Trägheitsmoment eines Elementes bezogen auf die zur N -Achse parallele N_1 -Achse

$$T_{n_1} = \frac{l \cdot x^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy$$

und das Trägheitsmoment desselben bezogen auf die N -Achse

$$\begin{aligned} dT_n &= T_{n_1} + m \cdot y^2 \\ &= \frac{l \cdot x^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy + l \cdot x \cdot dy \cdot \gamma \cdot y^2. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Fig. 322

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{h}$$

oder $x = \frac{a}{h} \cdot y,$

folglich wird

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^h \left(\frac{l}{12} \cdot \frac{a^3}{h^3} \cdot \gamma \cdot y^3 \cdot dy + l \cdot \frac{a}{h} \cdot \gamma \cdot y^3 \cdot dy \right) \\ &= \left(\frac{l}{12} \cdot \frac{a^3}{h^3} \cdot \gamma + l \cdot \frac{a}{h} \cdot \gamma \right) \cdot \int_0^h y^3 \cdot dy \\ &= \frac{a \cdot h \cdot l \cdot \gamma}{2 \cdot 2} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + h^2 \right) \end{aligned}$$

oder, da die Masse des ganzen Prismas

$$M = \frac{a \cdot h \cdot l \cdot \gamma}{2}$$

ist, folgt auch

$$T_n = \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + h^2 \right).$$

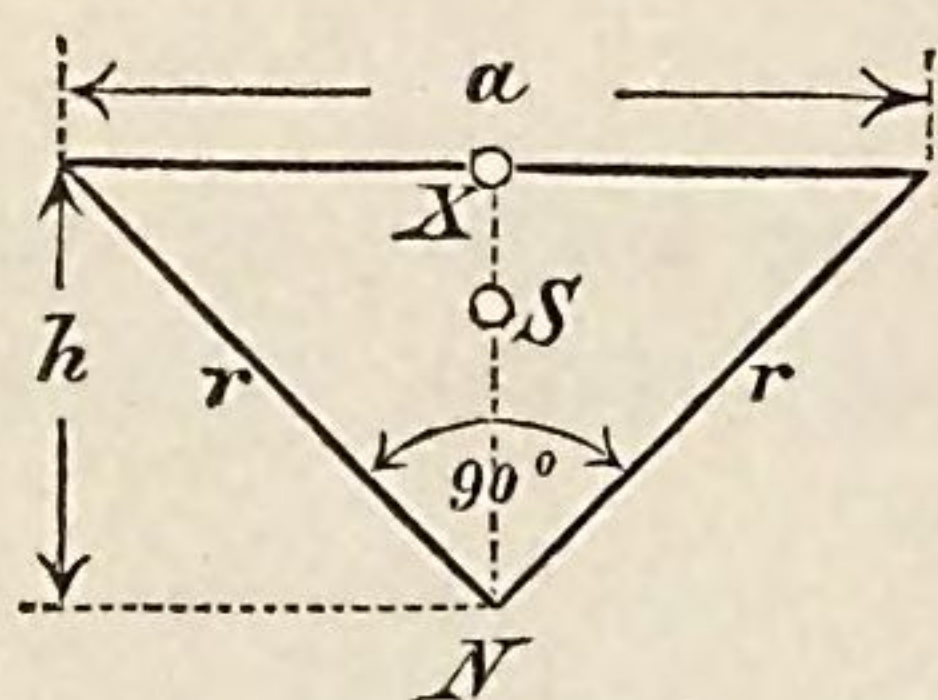


Fig. 324.

Ist der Querschnitt ein rechtwinkelig gleichschenkeliges Dreieck (Fig. 324), so ergibt sich, da hier

$$h = \frac{a}{2},$$

$$T_n = \frac{M \cdot a^2}{6}.$$

Führt man in erstere Gleichung für T_n die gleichen Seiten r ein, setzt man also

$$r^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + h^2$$

oder

$$a^2 = 4 \cdot (r^2 - h^2),$$

so folgt für das gleichschenkelige Dreieck

$$T_n = \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right)$$

und für das rechtwinkelig gleichschenkelige Dreieck, da

$$a^2 = 2 \cdot r^2$$

ist,

$$T_n = \frac{M \cdot r^2}{3}.$$

Legt man parallel zur N -Achse durch den Schwerpunkt S des Prismas eine Achse, so ist bezogen auf dieselbe das Trägheitsmoment, wenn der Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist,

$$\begin{aligned} T_s &= T_n - M \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot h \right)^2 \\ &= \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 - \frac{4 \cdot h^2}{3} \right) \\ &= \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{h^2}{3} \right) = \frac{M}{18} \cdot \left(r^2 + \frac{a^2}{2} \right), \end{aligned}$$

und wenn der Querschnitt rechtwinkelig gleichschenkelig ist, so folgt

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{M \cdot r^2}{3} - M \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right)^2 \\ &= M \cdot \left(\frac{r^2}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{2 \cdot r^2}{4} \right) \\ &= M \cdot \left(\frac{r^2}{3} - \frac{2 \cdot r^2}{9} \right) \\ &= \frac{M \cdot r^2}{9} = \frac{M \cdot a^2}{18}. \end{aligned}$$

Denkt man sich durch die Mitten der beiden Seiten a des Prismas eine Drehachse X gelegt, dann ist im ersten und zweiten Falle

$$\begin{aligned} T_x &= T_s + M \cdot \left(\frac{h}{3} \right)^2 \\ &= \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{h^2}{3} \right) + M \cdot \left(\frac{h}{3} \right)^2 \\ &= \frac{M \cdot r^2}{6}. \end{aligned}$$

Trägheitsmoment eines Prismas von rechteckigem Querschnitte.

Ist die X -Achse Schwerlinie und zugleich Drehachse, so ist das Trägheitsmoment $d T_x$ eines Elementes von der Dicke dx und der Masse m (Fig. 325) bezogen auf jene Achse (s. Seite 417)

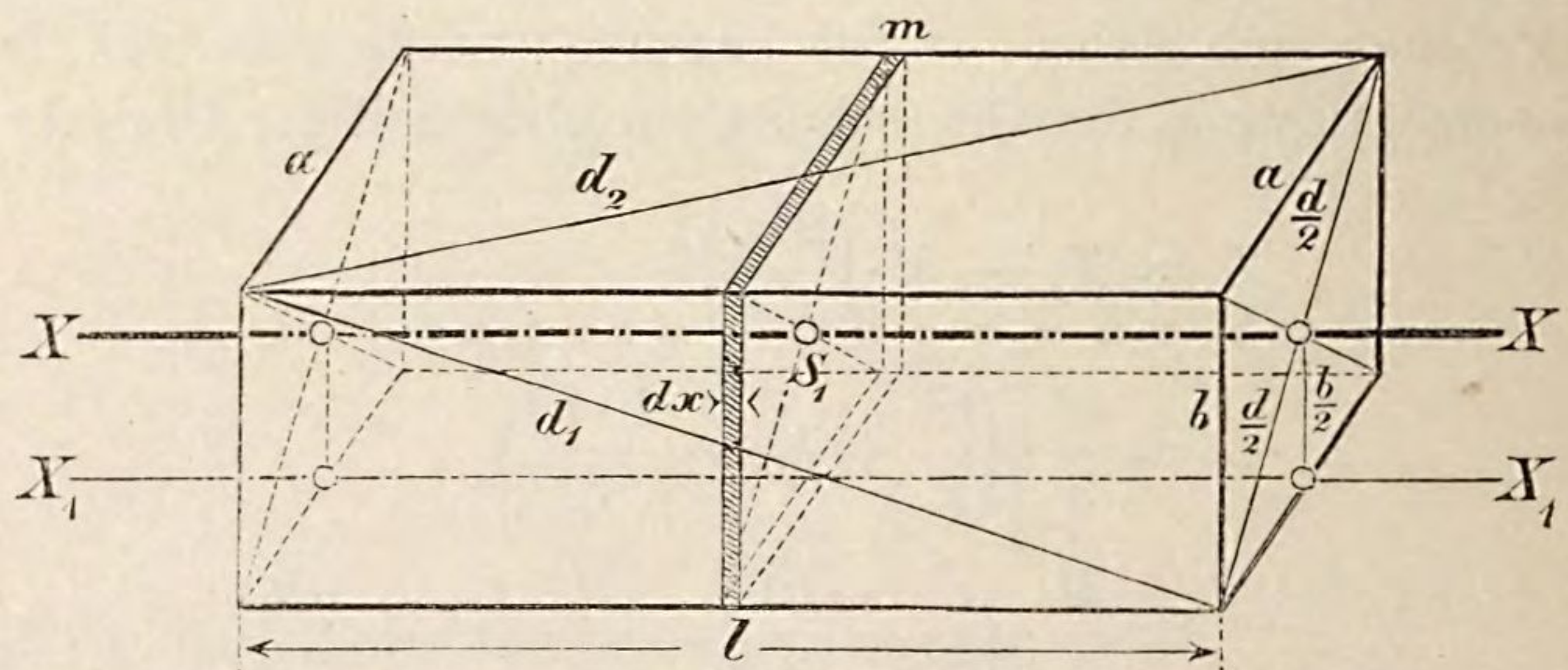


Fig. 325.

$$d T_x = \frac{m \cdot d^2}{12},$$

worin

$$m = a \cdot b \cdot dx \cdot \gamma$$

ist; es ist daher

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\Sigma(m) \cdot d^2}{12} \\ &= \frac{M \cdot d^2}{12} \end{aligned}$$

und hierin

$$\begin{aligned} M &= a \cdot b \cdot l \cdot \gamma, \\ d^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Trägheitsmomente bezogen auf die zu den Seitenkanten a und b parallelen und durch den Schwerpunkt des Prismas laufenden Achsen Y und Z mit T_y und T_z , dann gilt für dieselben analog und mit Bezug auf Fig. 325

$$\begin{aligned} T_y &= \frac{M \cdot d_1^2}{12}, \\ T_z &= \frac{M \cdot d_2^2}{12}, \end{aligned}$$

worin

$$d_1^2 = b^2 + l^2$$

und

$$d_2^2 = a^2 + l^2$$

ist.

Da nun die Achsen X , Y , Z Symmetrie-Achsen sind, so sind die Trägheitsmomente T_x , T_y , T_z Hauptträgheitsmomente, und es bestimmen sich daher die Trägheitsmomente des Prismas, bezogen auf jede andere durch den Ursprung O der Achsen laufende unter den Winkeln α , β , γ zur X -, Y - und Z -Achse geneigten Drehachse O , durch

$$T_0 = T_x \cdot \cos^2 \alpha + T_y \cdot \cos^2 \beta + T_z \cdot \cos^2 \gamma.$$

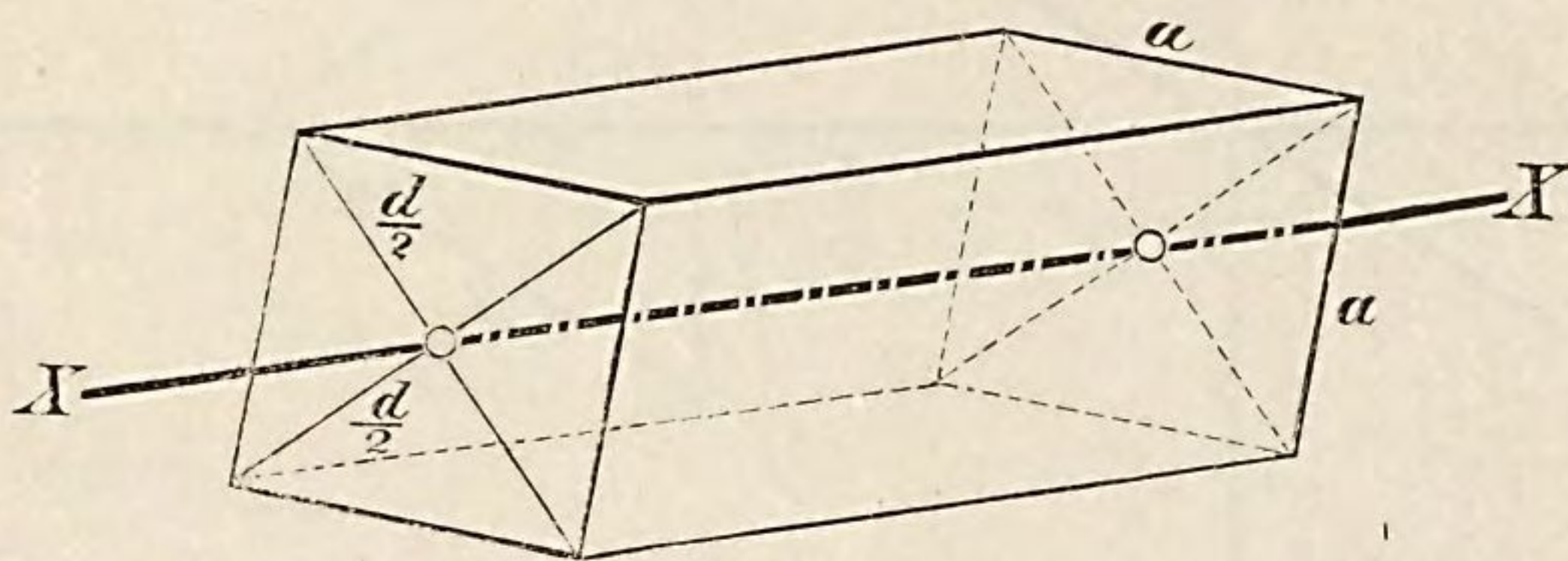


Fig. 326.

Wird der Querschnitt des Prismas ein Quadrat (Fig. 326), also

$$a = b,$$

dann ist

$$d^2 = 2 \cdot a^2,$$

$$d_1 = d_2$$

und infolgedessen

$$T_x = \frac{M \cdot a^2}{6}$$

und

$$T_y = T_z.$$

Aus diesem Grunde wird aber auch das Trägheits-Ellipsoid ein Rotations-Ellipsoid.

(In diesem Falle gilt, wenn man unter M die Masse des vierseitigen Prismas versteht, ohne Weiteres die für das Prisma mit rechtwinkelig gleichschenkeligem Dreiecksquerschnitt erhaltene Formel $T_n = \frac{M \cdot r^2}{3} = \frac{M \cdot d^2}{12}$.)

Geht das Prisma in einen Würfel über, wird also

$$a = b = l,$$

dann ist

$$T_x = T_y = T_z = \frac{M \cdot a^2}{6}$$

und das Centralellipsoid eine Kugel.

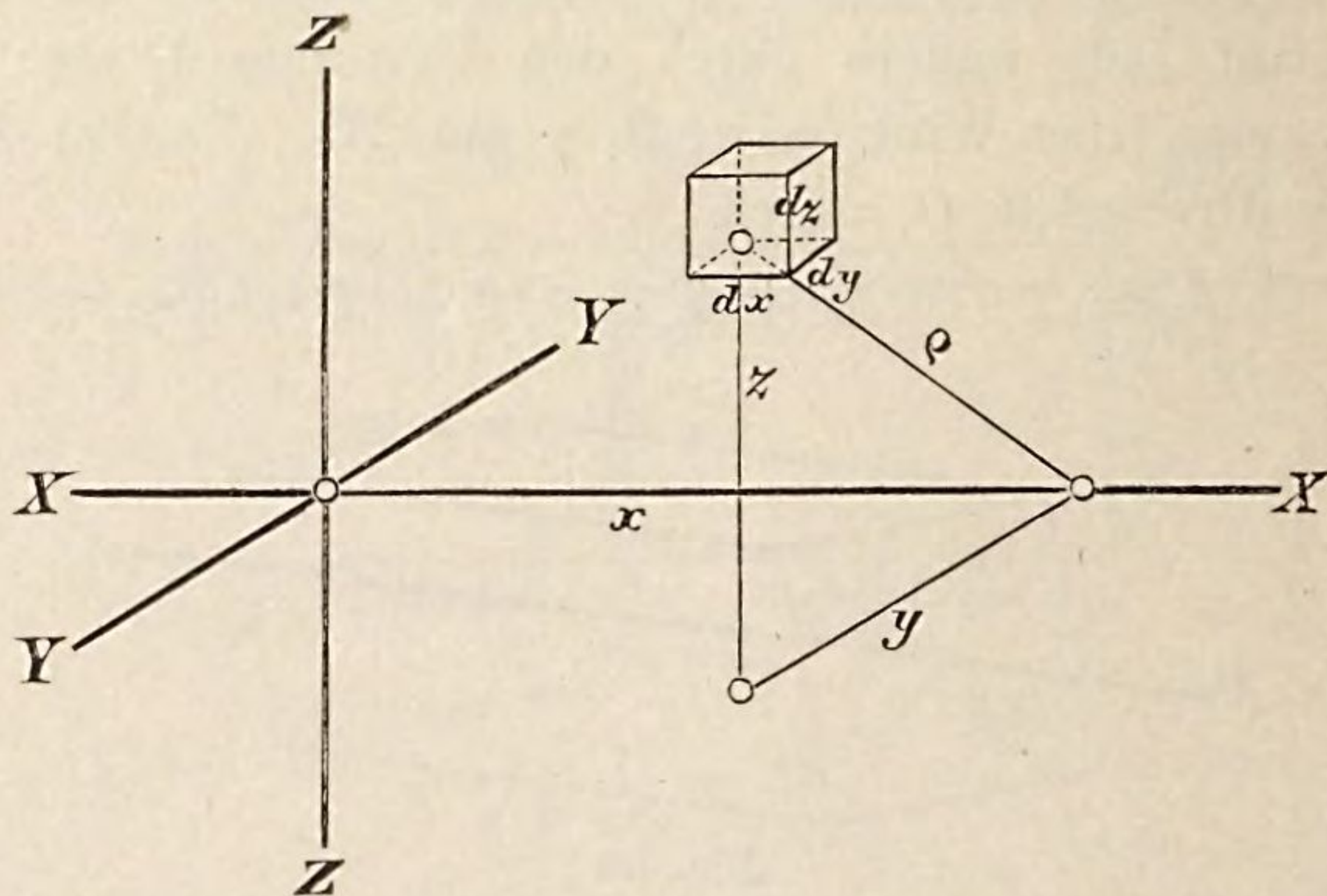


Fig. 327.

Das Resultat kann auch durch eine dreifache Integration gefunden werden:

Allgemein ist mit Bezug auf Fig. 327 die Form des Trägheitsmomentes

$$T_x = \Sigma(m \cdot \varrho^2) = \gamma \cdot \int dx \cdot dy \cdot dz \cdot \varrho^2,$$

wenn dx , dy , dz die Dimensionen eines Elementes und ϱ der Drehungshalbmesser desselben ist.

Da

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

so ist auch

$$T_x = \gamma \cdot \int dx \cdot dy \cdot dz \cdot (y^2 + z^2).$$

In dieser Formel hat man in Bezug auf x in den Grenzen $+\frac{l}{2}$ und $-\frac{l}{2}$, in Bezug auf y in den Grenzen $+\frac{a}{2}$ und $-\frac{a}{2}$,

in Bezug auf z zwischen den Grenzen $+\frac{b}{2}$ und $-\frac{b}{2}$ zu integrieren, und es folgt

$$\begin{aligned}
 T_x &= \gamma \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy \cdot \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \cdot (z^2 + y^2) \\
 &= \gamma \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dy \cdot \left(\frac{b^3}{12} + b \cdot y^2 \right) \\
 &= \gamma \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b}{12} + \frac{a \cdot b^3}{12} \right)
 \end{aligned}$$

oder schliesslich

$$\begin{aligned}
 T_x &= \frac{a \cdot b \cdot l \cdot \gamma}{12} \cdot (a^2 + b^2) \\
 &= \frac{M \cdot d^2}{12}.
 \end{aligned}$$

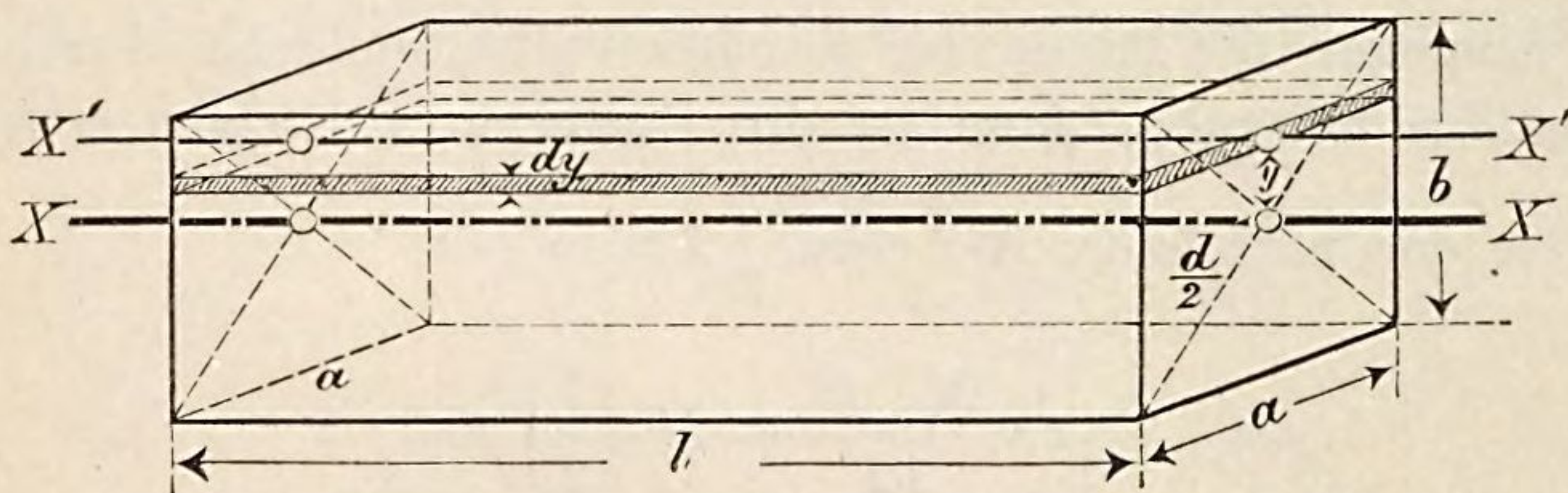


Fig. 328.

Schneller jedoch gelangt man zum Ziele, wenn man das Element

$$m = a \cdot l \cdot dy \cdot \gamma \quad (\text{Fig. 328})$$

zur Bestimmung benutzt und setzt

$$dT_{x'} = \frac{l \cdot a^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy,$$

$$dT_x = \frac{l \cdot a^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy + m \cdot y^2$$

$$= \frac{l \cdot a^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy + a \cdot l \cdot \gamma \cdot y^2 \cdot dy$$

und

$$T_x = 2 \cdot \int_0^{\frac{b}{2}} \left(\frac{l \cdot a^3}{12} \cdot \gamma \cdot dy + a \cdot l \cdot \gamma \cdot y^2 \cdot dy \right)$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot l \cdot \gamma}{12} \cdot (a^2 + b^2)$$

$$T_x = \frac{M \cdot d^2}{12}.$$

Verlegt man die Drehachse in eine Seitenkante des Prismas von der Länge l (Fig. 325), so wird der Abstand der neuen Achse von der parallelen X -Achse $\frac{d}{2}$ und das Trägheitsmoment

$$T_n = \frac{M \cdot d^2}{12} + M \cdot \left(\frac{d}{2} \right)^2,$$

$$T_n = \frac{M \cdot d^2}{3};$$

läuft hingegen die Drehachse durch eine Seitenfläche, durch die Mitten der Seiten a , dann ist die Entfernung der neuen Achse X_1 von der parallelen X -Achse $\frac{b}{2}$, also

$$T_{x_1} = \frac{M \cdot d^2}{12} + M \cdot \left(\frac{b}{2} \right)^2,$$

$$T_{x_1} = \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{a^2}{4} + b^2 \right).$$

Trägheitsmomente von mehrseitigen Prismen.

Vier- und mehrseitige Prismen kann man sich aus einzelnen dreiseitigen Prismen zusammengesetzt denken, weshalb die Trägheitsmomente der letzteren auch zur Ermittlung der Trägheits-

momente der ersteren dienen. Bezieht man das Trägheitsmoment auf die geometrische Achse X eines regelmässigen mehrseitigen Prismas, und ist die ganze Masse des letzteren

$$M = n \cdot M_1,$$

worin n die Anzahl gleicher dreiseitiger Prismen, in welche das mehrseitige Prisma zerlegt werden kann, und M_1 die Masse je eines derselben bedeutet, so gilt nach Früherem (Seite 418)

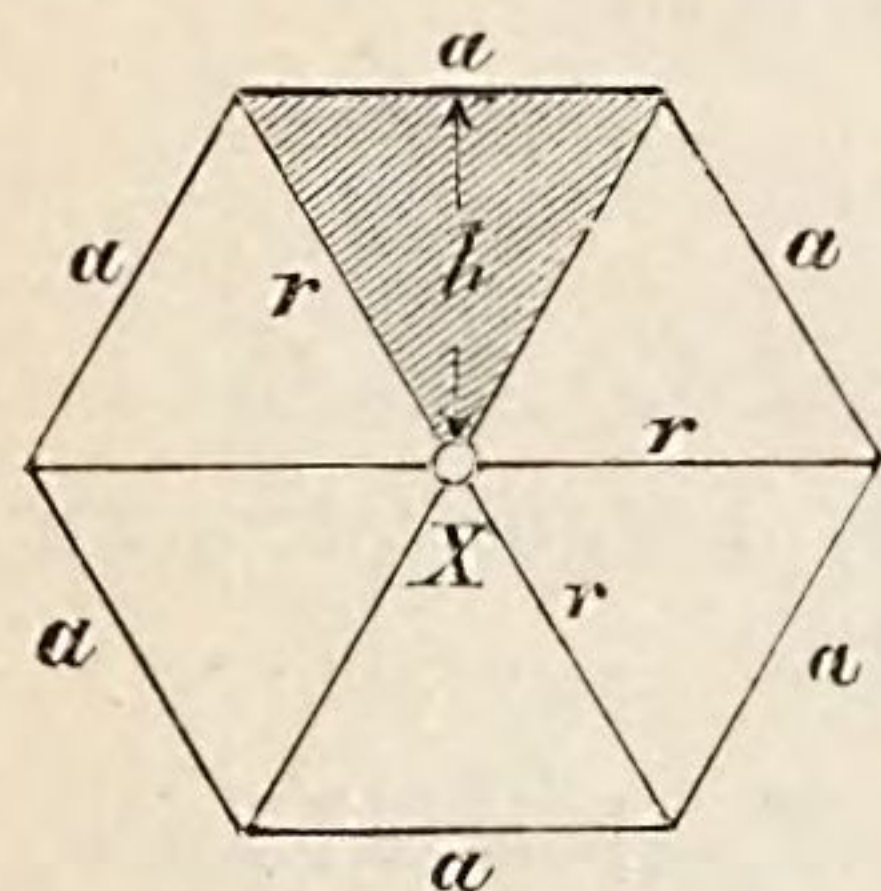


Fig. 329.

oder auch

$$T_x = n \cdot \frac{M_1}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + h^2 \right)$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + h^2 \right)$$

$$T_x = \frac{M}{3} \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right),$$

wenn (Fig. 329) a die Länge der gleichen Querschnittsseiten, r eine halbe Diagonale des Querschnittes und h das Loth bedeutet, welches von der geometrischen Achse auf eine Querschnittsseite gefällt werden kann.

Als specieller Fall tritt im vorliegenden Falle das Trägheitsmoment des Cylinders auf, indem letzterer als ein Prisma mit unendlich vielen Seiten angesehen werden kann.

Setzt man die Seitenlänge $a = 0$ und $r = h$, so liefern die beiden letzten Gleichungen den schon früher gefundenen Werth

$$T_x = \frac{M \cdot r^2}{2}.$$

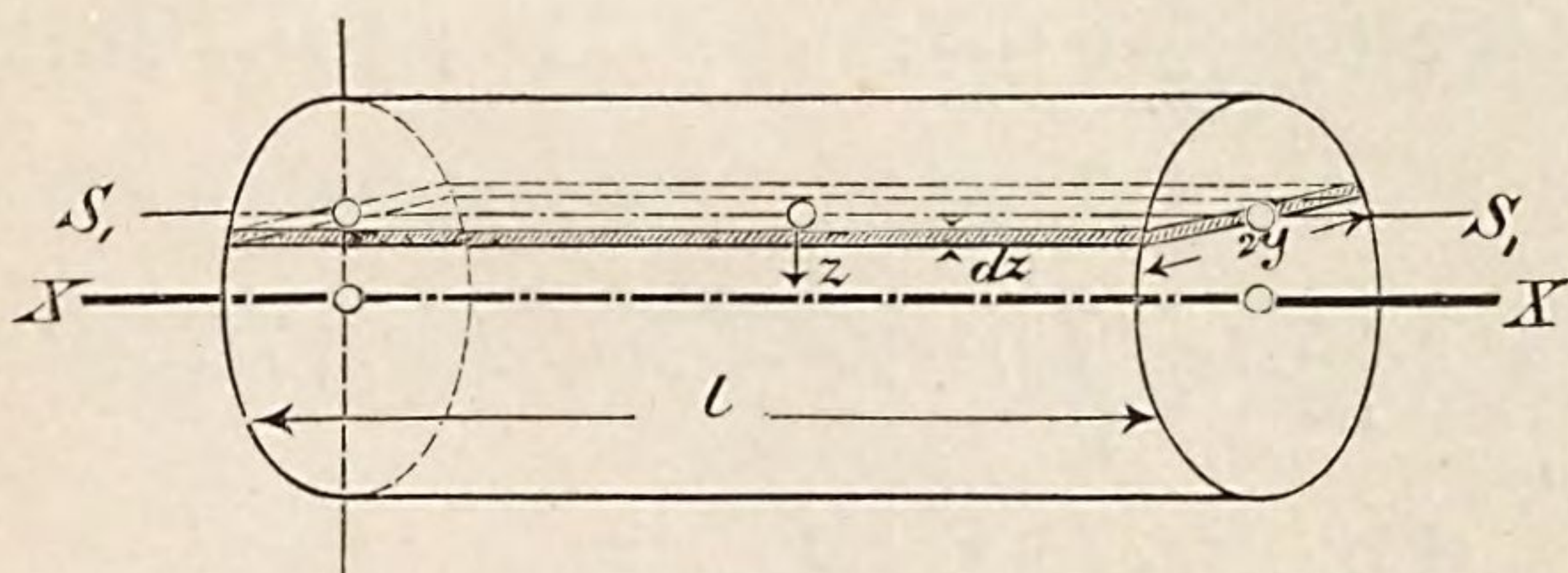


Fig. 330.

Eine selbstständige Bestimmung des Trägheitsmomentes eines Cylinders mag hier noch Platz finden:

Die geometrische Achse X (Fig. 330) sei Drehachse, und man denke sich den Cylinder parallel zu jener Achse in Elemente

$$m = 2 \cdot y \cdot l \cdot dz \cdot \gamma$$

zerlegt, deren Schwerpunktsabstand von der X -Achse allgemein z und deren Trägheitsmomente bezogen auf die zur X -Achse parallel laufende S_1 -(Schwerpunkts-)Achse

$$T_{s_1} = \frac{l \cdot (2 \cdot y)^3}{12} \cdot \gamma \cdot dz$$

ist.

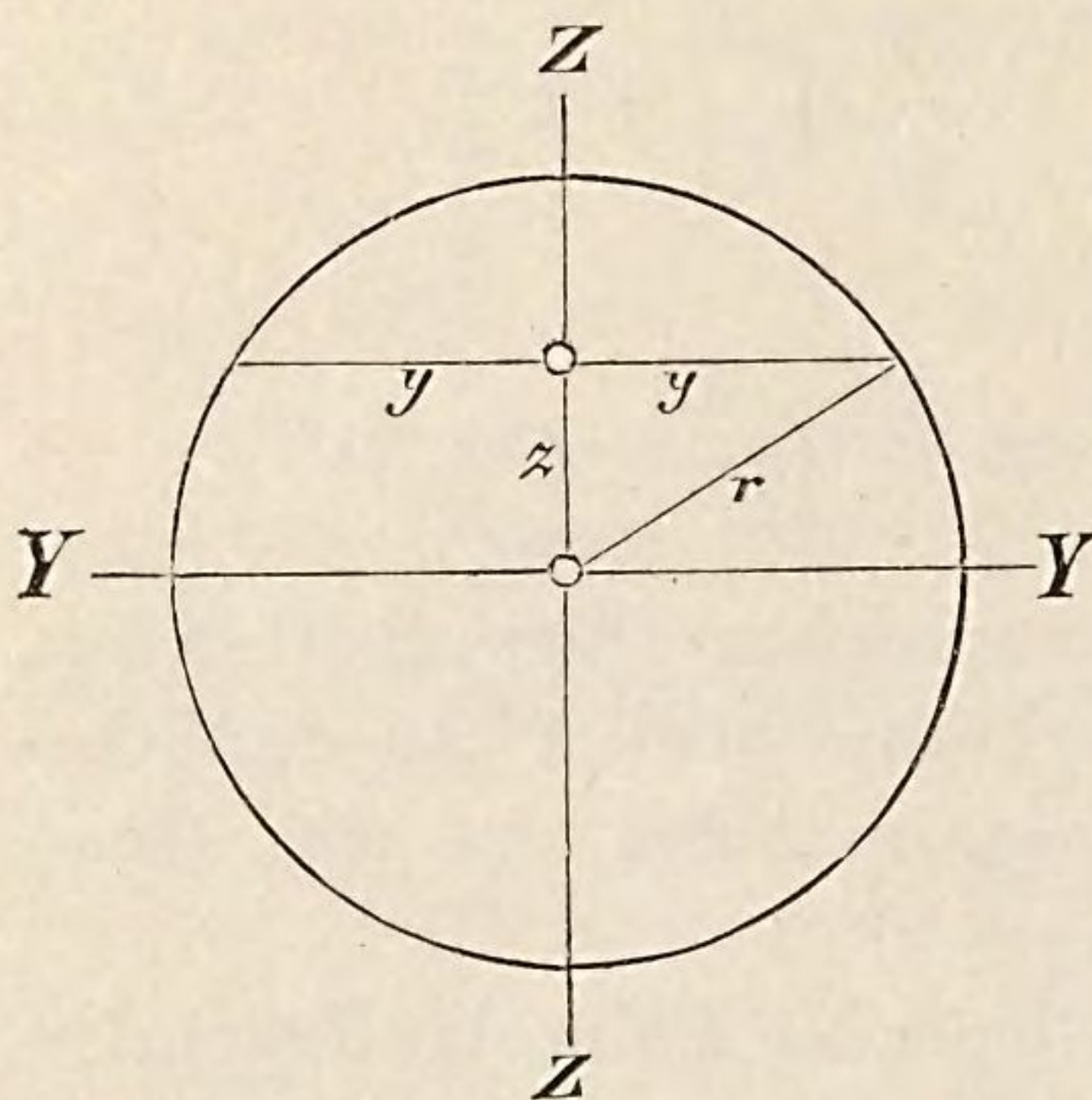


Fig. 331.

Bezogen auf die X -Achse beträgt aber das Trägheitsmoment eines Elementes

$$\begin{aligned} dT_x &= T_{s_1} + m \cdot z^2 \\ &= l \cdot \frac{(2 \cdot y)^3}{12} \cdot \gamma \cdot dz + 2 \cdot y \cdot l \cdot dz \cdot \gamma \cdot z^2 \\ &= 2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \left(\frac{y^3}{3} \cdot dz + y \cdot z^2 \cdot dz \right). \end{aligned}$$

Nun ist aber, wenn in Fig. 331 r den Halbmesser des Cylinders bedeutet,

$$y^2 = r^2 - z^2$$

und

$$y = \sqrt{r^2 - z^2},$$

auch

$$dT_x = 2 \cdot l \cdot \gamma \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot (r^2 - z^2) \cdot \sqrt{r^2 - z^2} + \sqrt{r^2 - z^2} \cdot z^2 \right\} \cdot dz$$

und

$$\begin{aligned} T_x &= 2 \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot l \cdot \gamma \cdot \int_0^r \{ r^2 \cdot \sqrt{r^2 - z^2} + 2 \cdot z^2 \cdot \sqrt{r^2 - z^2} \} \cdot dz \right] \\ &= \frac{4}{3} \cdot l \cdot \gamma \cdot \left\{ r^2 \cdot r^2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{2}{8} \cdot r^4 \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{r^4 \cdot \pi \cdot l \cdot \gamma}{2} \end{aligned}$$

oder, da die Masse des ganzen Cylinders

$$M = r^2 \cdot \pi \cdot l \cdot \gamma$$

ist, folgt auch schliesslich, wie früher,

$$T_x = \frac{M \cdot r^2}{2}.$$

Trägheitsmomente von Pyramiden.

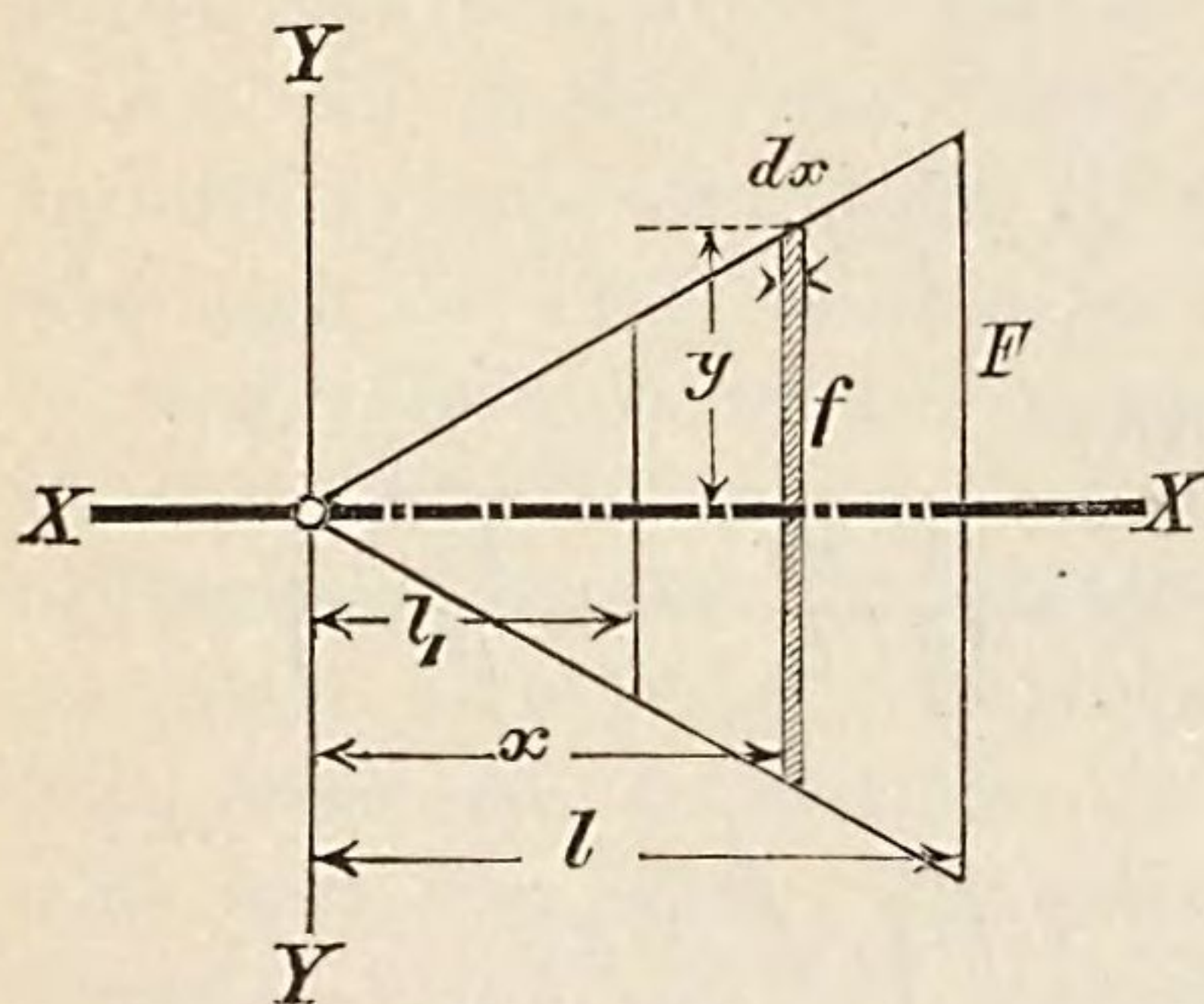


Fig. 332.

Zwei auf der geometrischen Achse X senkrecht stehende im Abstände dx befindliche Schnitte liefern ein Element der Pyramide, welches als ein Prisma angesehen werden kann.

Versteht man unter u die veränderliche halbe Diagonale des veränderlichen Querschnittes f (Fig. 332), ist y der veränderliche senkrechte Abstand

der Querschnittsseiten von der geometrischen Achse und m die Masse des Elementes, dann ist das Trägheitsmoment des letzteren bezogen auf jene Achse (s. Seite 418 und 425)

$$dT_x = \frac{m}{3} \cdot \left(\frac{u^2}{2} + y^2 \right),$$

in welchem Werthe

$$m = f \cdot dx \cdot \gamma$$

ist.

Nun gilt für Prismen und nach Fig. 332

$$f : F = x^2 : l^2$$

oder

$$f = \frac{F}{l^2} \cdot x^2,$$

folglich ist für m zu setzen

$$m = \frac{F}{l^2} \cdot \gamma \cdot x^2 \cdot dx.$$

Ferner mag in der Endfläche F

$$u = r$$

und

$$y = h$$

sein, dann gilt noch

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{l};$$

$$y = \frac{h}{l} \cdot x$$

und

$$\frac{u}{x} = \frac{r}{l}, \quad u = \frac{r}{l} \cdot x;$$

folglich lässt sich auch schreiben

$$dT_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{l^2} \cdot \gamma \cdot x^2 \cdot dx \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2} \cdot x^2 + \frac{h^2}{l^2} \cdot x^2 \right)$$

oder

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{l^4} \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right) \cdot \int_{l_1}^l x^4 \cdot dx \\ &= \frac{1}{15} \cdot F \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right) \cdot \frac{l^5 - l_1^5}{l^4}. \end{aligned}$$

Setzt man für die ganze Pyramide

$$l_1 = 0,$$

so folgt

$$T_x = \frac{1}{15} \cdot F \cdot l \cdot \gamma \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right);$$

es ist aber die Masse der Pyramide

$$M = \frac{1}{3} \cdot F \cdot l \cdot \gamma,$$

also auch

$$T_x = \frac{1}{5} \cdot M \cdot \left(\frac{r^2}{2} + h^2 \right).$$

Lässt man die Pyramide in einen Kegel übergehen, d. h. wird

$$h = r,$$

so folgt

$$T_x = \frac{3}{10} \cdot M \cdot r^2,$$

wie früher bereits bestimmt.

Anmerkung: Für alle geraden Prismen und Cylinder ist die geometrische Achse eine Schwerpunktsachse. Die beiden zugeordneten liegen in dem Querschnitte durch den Schwerpunkt. Hat der Querschnitt eine Symmetrieachse, so ist diese eine Hauptachse (z. B. Prismen mit dreischenkeliger dreiseitiger Basis). Lassen sich in dem Querschnitte durch dessen Schwerpunkt zwei zueinander Senkrechte legen, für welche die Querschnittsmomente, also auch die Trägheitsmomente des Prismas gleich gross sind, so sind jede zwei in der Querschnittsebene im Schwerpunkte zu einander Senkrechte zwei Schwerpunkthauptachsen. Das Trägheitsmoment ist dann für alle durch den Schwerpunkt gehenden, zur Achse senkrechten, Drehachsen gleich gross. Dies ist der Fall, wenn der Querschnitt ein Kreis, ein reguläres Polygon, oder auch eine Figur von solcher Regelmässigkeit ist (Stern, Kreuz u. s. w.), dass die angegebene Bedingung gleicher Trägheitsmomente für zwei senkrechte Achsen erfüllt ist.

Trägheitsmoment des Ellipsoids bezogen auf die Drehachse X.

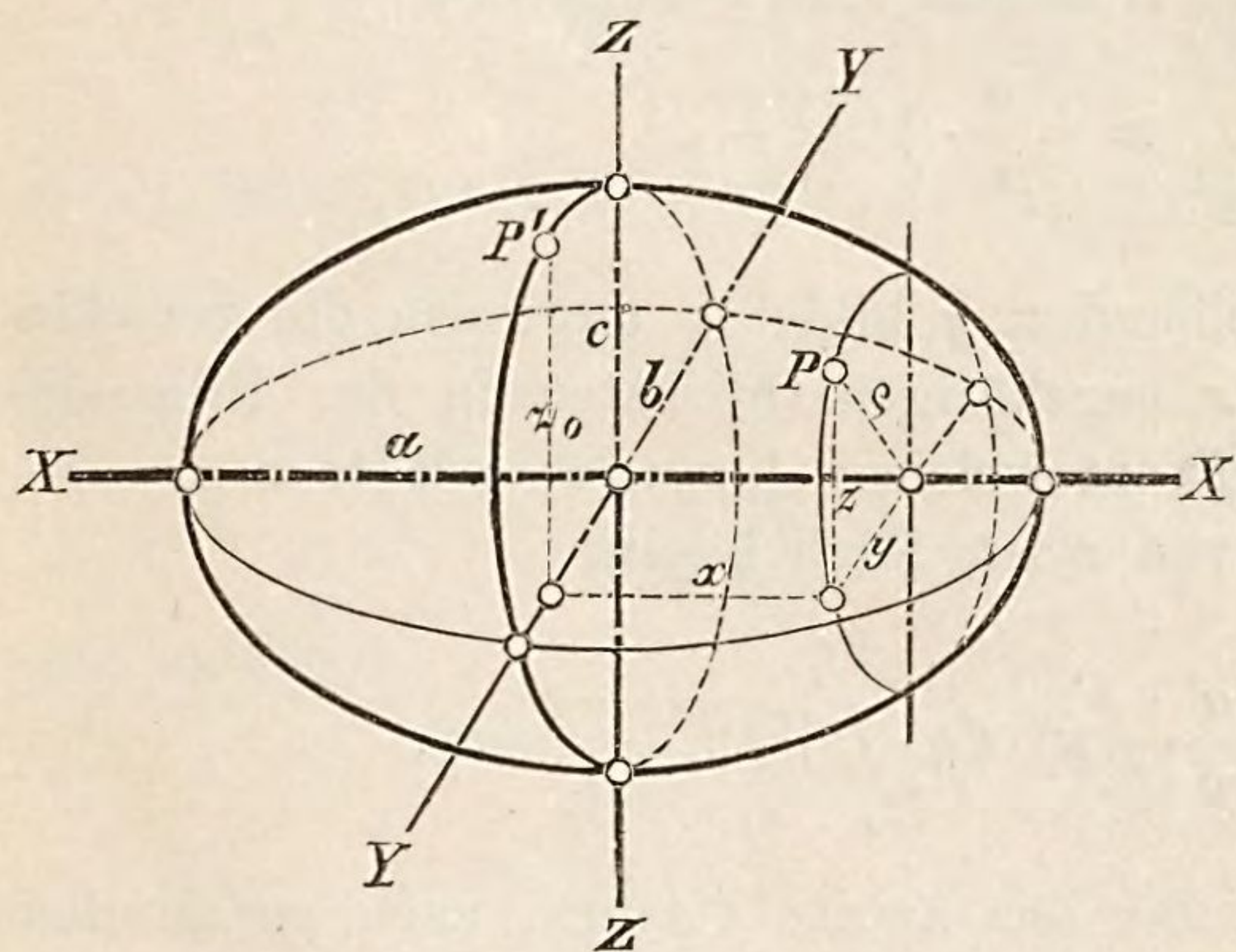


Fig. 333.

Als Massenelement m werde die Masse eines parallel zur X -Achse (Fig. 333) ausgeschnittenen Parallelepipeden

$$2 \cdot x \cdot dy \cdot dz$$

gewählt, so dass gesetzt werden kann

$$m = 2 \cdot x \cdot dy \cdot dz \cdot \gamma;$$

weiter ist

$$\varrho^2 = y^2 + z^2$$

und infolgedessen, da

$$\begin{aligned} T_x &= \Sigma(m \cdot \varrho^2), \\ T_x &= 2 \cdot \gamma \cdot \iint x \cdot (y^2 + z^2) \cdot dy \cdot dz \\ &= 2 \cdot \gamma \cdot \left\{ \iint x \cdot y^2 \cdot dz \cdot dy + \iint x \cdot z^2 \cdot dy \cdot dz \right\} \\ &= 2 \cdot \gamma \cdot \{A + B\}. \end{aligned}$$

Nun ist die Gleichung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und somit

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)} \\ &= \frac{a}{c} \cdot \sqrt{c^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - z^2}. \end{aligned}$$

Setzt man in der Gleichung des Ellipsoids $x = 0$, so folgt der zugehörige Werth für z aus

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} &= 1, \\ z_0^2 &= c^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \end{aligned}$$

welcher Werth in die Gleichung für x eingesetzt

$$x = \frac{a}{c} \cdot \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

liefert.

Bei constant bleibendem y bildet z allgemein die verschiedenen Werthe von x zugehörigen Ordinaten in der Ellipsoid-schnittfläche $P'z_0xzP$, in welcher $+z_0$ der grösste und $-z_0$ der kleinste Werth von z ist, folglich gilt

$$A = \frac{a}{c} \cdot \int y^2 \cdot dy \cdot \int_{-z_0}^{+z_0} \sqrt{z_0^2 - z^2} \cdot dz,$$

in welchem Werthe für das zweite Integral auch geschrieben werden kann

$$2 \cdot \int_0^{z_0} \sqrt{z_0^2 - z^2} \cdot dz = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{z_0^2 \cdot \pi}{2};$$

demnach ist

$$A = \frac{a}{c} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int z_0^2 \cdot y^2 \cdot dy,$$

und setzt man hierin für z_0^2 den oben gefundenen Werth ein und berücksichtigt man, dass sich y von $-b$ bis $+b$ ändert, so folgt

$$\begin{aligned} A &= a \cdot c \cdot \pi \cdot \int_0^b y^2 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \cdot dy \\ &= a \cdot c \cdot \pi \cdot \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}\right) \\ &= \frac{2}{15} \cdot a \cdot b^3 \cdot c \cdot \pi. \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} B &= \iint x \cdot z^2 \cdot dy \cdot dz \\ &= \frac{2}{15} \cdot a \cdot b \cdot c^3 \cdot \pi. \end{aligned}$$

Nach der Einsetzung der erhaltenen Werthe in die letzte Gleichung für T_x folgt

$$T_x = \frac{4}{15} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi \cdot \gamma \cdot (b^2 + c^2);$$

es ist jedoch nach Früherem die Masse des ganzen Ellipsoides

$$M = \frac{4}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \pi \cdot \gamma,$$

folglich

$$T_x = \frac{M}{5} \cdot (b^2 + c^2)$$

und analog

$$T_y = \frac{M}{5} \cdot (a^2 + c^2),$$

$$T_z = \frac{M}{5} \cdot (a^2 + b^2).$$

Wird $a = b = c = r$, geht also das Ellipsoid in eine Kugel über, so ist — wie früher gefunden —

$$T_x = T_y = T_z = \frac{2}{5} \cdot M \cdot r^2.$$

Anhang zur Bewegungslehre eines Körpers.

Mit Hilfe der durch die Untersuchungen „der freien Bewegung eines starren Körpers“ gefundenen Resultate und derjenigen, welche sich unter „Bewegung eines materiellen Punktes auf einer vorgeschriebenen Bahn“ ergaben, lassen sich mit Leichtigkeit die Bewegungen der Körper auf vorgeschriebenen Bahnen untersuchen.

Man ermittelt die von den vorgeschriebenen Bahnen herührenden Widerstände nach Grösse, Richtung und Angriffspunkt, rechnet dieselben zu den auf den Körper wirkenden Kräften und behandelt hierauf den Körper als einen freien.

Vierter Abschnitt.

Bewegungslehre eines Systems von Körpern, eines
sogenannten Massensystems.

Bilden mehrere Massen ein durch innere Kräfte geordnetes Ganzes, wie beispielsweise die Sprengstücke einer Granate, so spricht man allgemein von einem Massensystem.

Unter den inneren Kräften sind hierbei diejenigen Kräfte zu verstehen, welche die einzelnen Massen unter sich aufeinander ausüben. Auch hier sind je zwei dieser Kräfte gleich gross und in der geraden Verbindungslinie zweier Massen entgegengesetzt gerichtet, also unter sich im Gleichgewicht.

Bewegung eines Massensystems.

1.

Das d'Alembert'sche Princip und das Gesetz des Schwerpunktes.

Die dem System zugehörigen Massen haben einen gemeinschaftlichen Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt, dessen Bewegung unter dem Einfluss von den auf die Massen des Systems wirkenden äusseren Kräften genau so erfolgt, wie bei einem starren Körper. Man kann sich daher auch hier die totale Masse des Systems im Schwerpunkt vereinigt und die Resultirende aus allen äusseren Kräften an letzterem angreifend denken.

Für die Resultirende galt

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und für die Summanden unter dem Wurzelzeichen

$$X = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 x_0}{dt^2},$$

$$Y = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 y_0}{dt^2},$$

$$Z = \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = M \cdot \frac{d^2 z_0}{dt^2},$$

in welchen Werthen die Grössen m alle Massenelemente des Systems und M die totale Masse desselben bedeuten.

Zu den äusseren Kräften sind auch die Gegendrücke von festen Flächen zu rechnen, gegen welche etwa einzelne Massen des ganzen Systems gedrückt werden.

Ist die Resultirende der äusseren Kräfte gleich Null oder wirken nur die Kräfte, welche die Massen gegenseitig aufeinander ausüben, so befindet sich der Schwerpunkt des Systems in geradlinig gleichförmiger Bewegung oder in Ruhe. Erstere tritt ein, wenn eine ausserhalb des Massensystems existirende Kraft die Ursache zur Erzeugung einer Anfangsgeschwindigkeit sein konnte; fehlt dieselbe oder ist dieselbe überhaupt unmöglich — wie beispielsweise beim ganzen Weltall, dasselbe als ein einziges Massensystem aufgefasst, — so verharret der Schwerpunkt in Ruhe (Princip der Selbsterhaltung der Bewegung des Schwerpunktes).

Die bei der Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers gefundenen Werthe

$$0 = X - \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \right),$$

$$0 = Y - \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

$$0 = Z - \Sigma \left(m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

repräsentiren auch die „verlorenen Kräfte eines Massensystems“; das d'Alembert'sche Princip ist aber für letzteres zu lesen: „Die verlorenen Kräfte entsprechen bei einem Massensystem den Bedingungen des Gleichgewichtes, welche für einen starren Körper gelten“.

2.

Lebendige Kräfte des Massensystems und Arbeit der wirkenden Kräfte.

Die einzelnen Massentheile eines Massensystems können sich von einander entfernen oder übereinander weg bewegen, weshalb bei der Ermittlung der lebendigen Kraft des Massensystems nicht allein die sogenannten äusseren, sondern auch diejenigen Kräfte in Betracht kommen, welche die einzelnen Massen gegenseitig aufeinander ausüben. Im Uebrigen gilt aber die für die Aenderung der lebendigen Kraft starrer Körper aufgestellte Gleichung

$$\begin{aligned}\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{m \cdot c^2}{2}\right) &= \Sigma\left(\int P \cdot ds \cdot \cos \alpha\right) \\ &= \Sigma\left\{\int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz)\right\}.\end{aligned}$$

Kräftefunctionen.

Eine auf einen materiellen Punkt m wirkende Kraft P oder eine Resultirende P aus mehreren an dem Punkt m angreifenden Kräften kann im Allgemeinen derart beschaffen sein, dass ihre Componenten X , Y , Z nach drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen sich mit den Coordinaten x , y , z des materiellen Punktes nach beliebigen Gesetzen ändern.

Giebt es nun irgend eine Grösse, eine sogenannte „Kraftfunction“

$$U = f(x, y, z),$$

welche sich mit den Coordinaten x , y , z des materiellen Punktes m so ändert, dass die partiellen Differentialquotienten derselben nach x , y und z genommen stets die Componenten

$$X = \frac{dU}{dx} \quad \text{oder} \quad X \cdot dx = dU,$$

$$Y = \frac{dU}{dy} \quad \text{oder} \quad Y \cdot dy = dU$$

$$\text{und} \quad Z = \frac{dU}{dz} \quad \text{oder} \quad Z \cdot dz = dU$$

ergeben, so gilt

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{dU}{dz}\right) \cdot dz = dU,$$

$$\int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) = \int dU$$

$$\text{oder} \quad \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot c^2}{2} = \int_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0,$$

wenn U_0 den Werth der Kraftfunction im Anfange und U_1 denselben am Ende der Bewegung bedeutet.

Letztere Grössen werden aus der Gleichung für U gefunden, wenn in dieselbe die den Zeiten entsprechenden Coordinaten des materiellen Punktes eingeführt werden.

Nun giebt es aber noch unendlich viele andere Coordinaten oder Punkte im Raum, für welche sich die Werthe U_0 und U_1 ergeben; es liefert daher die Gleichung

$$U_0 = f(x, y, z)$$

eine krumme Fläche für alle geometrischen Orte derjenigen Punkte, welche dem Werthe $U = U_0$ entsprechen, während die Gleichung

$$U_1 = f(x, y, z)$$

eine krumme Fläche für die geometrischen Orte der Punkte, welche dem Werthe

$$U = U_1$$

entsprechen, liefert.

Die Zunahme an lebendiger Kraft des materiellen Punktes m wird daher dieselbe bleiben, wenn ein beliebiger Punkt der ersten Fläche als Anfangs- und ein beliebiger Punkt der zweiten Fläche als Ausgangspunkt gewählt wird.

Specieller Fall: Ist stets

$$U_1 = U_0,$$

so wird

$$v = c,$$

d. h. „sobald der materielle Punkt zu der Fläche U_0 zurückkehrt, welcher der Anfangspunkt der Bewegung angehört, so wird die Geschwindigkeit wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit, und es würde die Geschwindigkeit stets gleich c bleiben, wenn der materielle Punkt während seiner Bewegung nicht aus der Fläche U_0 heraustreten würde“.

Die dem Letzteren entsprechende Bedingungsgleichung wäre

$$dU = 0,$$

$$0 = \left(\frac{dU}{dx}\right) \cdot dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) \cdot dy + \left(\frac{dU}{dz}\right) \cdot dz$$

oder
$$0 = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Allgemein galt für die Arbeit einer an einem, in krummer Bahn sich bewegendem, Punkt angreifenden Kraft

$$P \cdot ds \cdot \cos \varphi = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz,$$

folglich muss im vorliegenden Falle nothwendigerweise

$$\cos \varphi = 0,$$

d. h.

$$\varphi = 90^\circ$$

sein, die Kraft also stets normal auf dem in der krummen Fläche liegenden Bahnelemente ds stehen.

Da nun die Richtung von ds in der Fläche beliebig ist, so folgt als eine Eigenschaft der Fläche, dass dieselbe in jedem ihrer Punkte rechtwinkelig auf der augenblicklichen Richtung der Kraft steht.

In dem Falle, in welchem die Kraftfunction einen constanten Werth hat, nennt man die Fläche „Niveaufläche“.

Eine Kraftfunction existirt stets, wenn die wirkende Kraft P eine anziehende oder abstossende ist, die von einem festen Punkte ausgehend, eine Function des Abstandes von

dem letzteren ist. Ferner existirt stets eine Kraftfunction, wenn die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft die Resultirende aus mehreren Einzelkräften ist, deren jede von einem festen Punkte ausgeht und eine Function des Abstandes von demselben ist.

Die Definition vom Begriff der Kraftfunction kann auch auf ein System von mehreren materiellen Punkten übertragen werden:

Ändern sich die auf das System wirkenden Kräfte mit der Lage desselben, und bilden die Componenten $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \dots$ der Kräfte eine Kraftfunction U , so gilt für dieselbe, wenn die Coordinaten der Angriffspunkte $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ heissen,

$$U = f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, \dots)$$

$$\begin{aligned} \text{und} \quad \frac{dU}{dx_1} &= X_1; & \frac{dU}{dx_2} &= X_2 \dots, \\ \frac{dU}{dy_1} &= Y_1; & \frac{dU}{dy_2} &= Y_2 \dots, \\ \frac{dU}{dz_1} &= Z_1; & \frac{dU}{dz_2} &= Z_2 \dots, \end{aligned}$$

mit welchen Werthen sich der Ausdruck

$$\Sigma \left\{ \int (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) \right\} = \int dU$$

$$\text{oder} \quad \int dU = \Sigma \left(\frac{m \cdot v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m \cdot c^2}{2} \right)$$

ergiebt.

Heisst U_0 die Grösse der Veränderlichen U für die Coordinaten der Anfangslage und U_1 die Grösse derselben für die Endlage, so folgt

$$U_1 - U_0 = \Sigma \left(\frac{m \cdot v^2}{2} \right) - \Sigma \left(\frac{m \cdot c^2}{2} \right).$$

Bewegt sich das System nur unter dem Einfluss von anziehenden und abstossenden Kräften, welche Functionen der Abstände sind und entweder von festen Punkten aus-

gehen oder von den materiellen Punkten des Systems gegenseitig aufeinander ausgeübt werden, so existirt stets eine solche Kräftefunction.

Sind keine äusseren Kräfte am System vorhanden, so wird die Geschwindigkeit des Systemschwerpunktes nicht geändert; es bildet dann U lediglich eine Kraftfunction der inneren Kräfte, und es kann geschrieben werden

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) - U_1 = \Sigma\left(\frac{m \cdot c^2}{2}\right) - U_0,$$

d. h.: „Befindet sich der Systemschwerpunkt in Ruhe, so ist die augenblickliche wirkliche lebendige Kraft des Systems, vermindert um den der augenblicklichen Lage des Systems entsprechenden Werth der Kraftfunction, eine constante Grösse“, oder „besitzt der Systemschwerpunkt eine geradlinig gleichförmige Bewegung, so ist die augenblickliche lebendige Kraft der relativen Bewegung des Systems, vermindert um den der augenblicklichen Lage des Systems entsprechenden Werth der Kraftfunction, eine Constante“.

Wird U constant, d. h.

$$U_1 = U_0,$$

so folgt

$$\Sigma\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = \Sigma\left(\frac{m \cdot c^2}{2}\right)$$

oder „die lebendige Kraft ändert sich vermöge der inneren Kräfte periodisch, d. h. das System erhält, sobald sämtliche vorhandene materielle Punkte des Systems wieder in den Ausgangspunkt gelangen, wieder diejenige lebendige Kraft, welche dasselbe in letzterem besass, so dass ein Verlust an lebendiger Kraft nicht entsteht (Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft eines Systems träger Massen)“.

Sind die Anziehungs- oder Abstossungskräfte den Quadraten der Entfernungen der aufeinander einwirkenden Agentien „umgekehrt“ proportional, so giebt man den hier stets bestehenden Kraftfunctionen den Namen

„Potentialfunctionen“.

Princip der virtuellen Geschwindigkeit.

(Gleichgewicht der Kräfte an einem Massensystem.)

Nach Früherem stehen die Kräfte an einem einzigen materiellen Punkte im Gleichgewicht, wenn sie für jede unendlich kleine Verschiebung des Punktes die Arbeit Null ergeben oder wenn sie für drei nicht in einer Ebene liegende unendlich kleine Verschiebungen die Arbeiten Null liefern.

Existiren nun in n verschiedenen Punkten Massen, welche gegenseitig Kraftwirkungen aufeinander ausüben und welche ausserdem von ausserhalb des Systems liegenden Kräften beeinflusst werden, so befindet sich jede der n Massen im Gleichgewicht, wenn für drei nicht in einer Ebene liegende Verschiebungen einer jeden Masse die Summe der Arbeiten der auf sie wirkenden Kräfte gleich Null ist.

Hieraus ergeben sich allgemein für das Gleichgewicht des ganzen aus n Massen bestehenden Massensystems

$$3 \cdot n$$

Bedingungen.

Specielle Fälle:

1) Befinden sich zwei materielle Punkte in der Entfernung l in „starrer“ Verbindung, so ergeben sich wegen der letzteren

$$\text{statt } 3 \cdot n = 3 \cdot 2 = 6$$

Bedingungen nur „fünf“, weil sich hier die willkürlichen Verschiebungen auf fünf zurückführen lassen.

Heissen die beiden materiellen Punkte m_1 und m_2 , ihre Coordinaten bezogen auf ein rechtwinkeliges Achsensystem X, Y, Z x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 , sind X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 die Componenten der auf die materiellen Punkte wirkenden Kräfte nach jenen Achsen und schliesslich $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$ die Projectionen der unendlich kleinen Verschiebungen von m_1 und m_2 , so muss für das Gleichgewicht gelten

$$X_1 \cdot \delta x_1 + Y_1 \cdot \delta y_1 + Z_1 \cdot \delta z_1 + X_2 \cdot \delta x_2 + Y_2 \cdot \delta y_2 + Z_2 \cdot \delta z_2 = 0;$$

ausserdem ist constant

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2,$$

woraus durch Differentiation

$$(x_2 - x_1) \cdot (\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1) \cdot (\delta y_2 - \delta y_1) + \\ + (z_2 - z_1) \cdot (\delta z_2 - \delta z_1) = 0$$

folgt.

Beispielsweise ergiebt der letzte Ausdruck den Werth

$$(z_2 - z_1) \cdot \delta z_1 = \\ (x_2 - x_1) \cdot (\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1) \cdot (\delta y_2 - \delta y_1) + (z_2 - z_1) \cdot \delta z_2$$

und hierdurch den Beweis, dass von den sechs Verschiebungen nur noch fünf willkürlich, die sechste aber durch jene fünf und die Länge l des Abstandes zu bestimmen ist.

2) Sind 3 Punkte in gegebenen Entfernungen „starr“ mit einander verbunden, so ergeben sich

$$\text{statt } 3 \cdot n = 3 \cdot 3 = 9$$

willkürlichen Verschiebungen mit Rücksicht auf den vorhergehenden Fall deren nur „sechs“.

3) Kommt zu den „starr“ mit einander verbundenen 3 Punkten noch ein vierter, welcher mit den drei ersten nicht in derselben Ebene liegt, aber „starr“ mit denselben verbunden ist, so sind die Verschiebungen desselben von den Verschiebungen der ersteren abhängig; es bleibt in folgedessen die Zahl der willkürlichen Verschiebungen „sechs“, und es gilt noch dasselbe, wenn zu den 4 Punkten noch mehrere „starr“ mit diesen Punkten verbundene hinzutreten.

Hieraus folgt, „dass wenn die Arbeiten der an den Punkten eines «starren» Systems wirkenden Kräfte für sechs von einander unabhängige Verschiebungen des Systems Null sind, dies auch für jede Verschiebung des Systems giltig ist.“

Mit Hilfe dieses Resultates lassen sich die sechs Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers nun auch fol-

gendermassen ableiten: Nach der geometrischen Bewegungslehre lässt sich eine jede Verschiebung zurückführen auf 3 fortschreitende Bewegungen in den Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems X, Y, Z und auf 3 augenblickliche Drehbewegungen um jene Achsen. Heissen nun allgemein X, Y, Z die Componenten der Kraft am materiellen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, und bedeuten $\delta x, \delta y, \delta z$ die Verschiebungen nach den 3 Achsen, $\delta \omega$ aber die Drehung um eine zu den Coordinatenachsen um die Winkel α, β, γ geneigte Drehachse, so muss die Summe aller Arbeiten für die Verschiebung gleich Null, also

$$\Sigma(X) \cdot \delta x + \Sigma(Y) \cdot \delta y + \Sigma(Z) \cdot \delta z + \Sigma(Z \cdot y - Y \cdot z) \cdot \delta \omega \cdot \cos \alpha \\ + \Sigma(X \cdot z - Z \cdot x) \cdot \delta \omega \cdot \cos \beta + \Sigma(Y \cdot x - X \cdot y) \cdot \delta \omega \cdot \cos \gamma = 0$$

sein, welcher Ausdruck wegen der Willkürlichkeit von $\delta x, \delta y, \delta z, \delta \omega, \alpha, \beta, \gamma$ in die früher erhaltenen sechs Gleichgewichtsgleichungen eines „starren“ Körpers

$$\Sigma(X) = 0, \quad \Sigma(Y) = 0, \quad \Sigma(Z) = 0, \\ \Sigma(Z \cdot y - Y \cdot z) = 0, \quad \Sigma(X \cdot z - Z \cdot x) = 0, \quad \Sigma(Y \cdot x - X \cdot y) = 0$$

zerlegt werden kann.

4) Besitzt ein materieller Punkt eine vorgeschriebene Bahn, ist er also gezwungen in einer Linie oder Fläche zu bleiben, so gilt nach „Gleichgewicht eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn (siehe Seite 221, 6)“ als Bedingung für's Gleichgewicht: „Summe der Arbeiten aller auf den Punkt wirkenden Kräfte für jede durch die Linie oder Fläche zulässige Verschiebung des Punktes gleich Null oder negativ.“

Treten Widerstände auf, so kommen nur die tangentialen in Betracht, und es muss in diesem Falle für gleichförmige Bewegung die Summe aller Arbeiten gleich Null werden.

5) Gleiches gilt für zwei feste Körper, welche gezwungen sind, sich so übereinander zu bewegen, dass sie sich an einer Stelle berühren. Die Normaldrücke zwischen beiden

Körpern geben bei den möglichen Verschiebungen des ganzen Systems gleich grosse, aber dem Vorzeichen nach verschiedene Arbeiten, im Ganzen also die Arbeit gleich Null. Zur Arbeitsumme aller auf die beiden Körper wirkenden Kräfte liefern die Normaldrücke demnach keinen Antheil.

Sind die Wege beider Körper in der Richtung verschieden, wie beim Uebereinandergleiten derselben, und tritt ein Tangentialwiderstand, beispielsweise Reibung, auf, so liefert derselbe eine negative Arbeit.

Stehen die Kräfte an beiden Körpern im Gleichgewicht — die an der Berührungsstelle auftretenden Normaldrücke mit berücksichtigt —, so wird für einen jeden Körper bei einer zulässigen Verschiebung die Summe der Arbeiten aller auf den Körper wirkenden Kräfte gleich Null oder negativ.

Hiernach ergibt sich „für die Summe der Arbeiten der Kräfte an beiden Körpern“ bei der für beide Körper zulässigen Verschiebung entweder ein Null- oder ein negativer Werth. Negativ wird jedoch die Arbeit nur, wenn ein tangentialer Widerstand an der Berührungsstelle der Körper herrscht und durch denselben der Ruhezustand bedingt wird.

Bei diesen beiden Körpern sind auch Verschiebungen möglich, bei denen die Körper von einander gebracht werden.

Ist δs eine Verschiebung in der Richtung des Normaldruckes N , so ist für den ersten Körper die Gleichgewichtsbedingung — Berührung der Körper und das Nichtvorhandensein eines tangentialen Widerstandes vorausgesetzt —

$$K \cdot \delta s + N \cdot \delta s = 0,$$

in welcher $K \cdot \delta s$ die negative Arbeit der an diesem ersten Körper angreifenden Kräfte ohne den Normaldruck N ist.

Bedeutet $K_1 \cdot \delta s$ die positive Arbeit der an dem zweiten Körper thätigen Kräfte ohne den Normaldruck N , so gilt für das Gleichgewicht des zweiten Körpers

$$K_1 \cdot \delta s - N \cdot \delta s = 0.$$

Beide Bedingungen liefern aber für das ganze System

$$K \cdot \delta s + K_1 \cdot \delta s = 0,$$

d. h.

$$K = -K_1.$$

Kommen beide Körper ausser Berührung, so legt der ursprüngliche Berührungspunkt des ersten Körpers in der Richtung des Normaldruckes einen Weg δs zurück, welcher grösser ist als der Weg δs_1 des ursprünglichen Berührungspunktes vom zweiten Körper in derselben Richtung.

$$K \cdot \delta s + K_1 \cdot \delta s_1$$

wird folglich negativ; denn $K \cdot \delta s$ repräsentirt eine grössere negative und $K_1 \cdot \delta s_1$ eine kleinere positive Arbeit.

Positiv und grösser als Null kann die Summe der Arbeiten der Kräfte an einem Systeme von Massen nur für eine unendlich kleine Verschiebung vom Ruhezustande aus sein, wenn die Kräfte am System nicht im Gleichgewicht stehen.

Denkt man sich nun das ganze Massensystem in einzelne materielle Punkte aufgelöst und auf einen jeden sowohl die an ihm wirkenden äusseren, als auch die durch die ursprüngliche Verbindung bedingten inneren Kräfte — letztere durch äussere ersetzt gedacht — angreifen, so wird ein jeder Punkt in der Richtung der Resultirenden jener Kräfte Bewegung erhalten, und die Resultirende selbst positive Arbeit verrichten. Aus diesem Grunde wird aber auch die Summe der Arbeiten der äusseren und der durch die Verbindung bedingten Kräfte des ganzen Systems positiv. Die letzteren Kräfte heben sich entweder paarweise auf, und liefern in diesem Falle die Arbeitsumme Null, oder sie ergeben bei dem Vorhandensein von Bewegungswiderständen eine negative Arbeit.

Aus Allem folgt, dass die Summe der Arbeiten der äusseren Kräfte positiv und — unter Ausschluss des Gleichgewichtszustandes — grösser als Null sein muss.

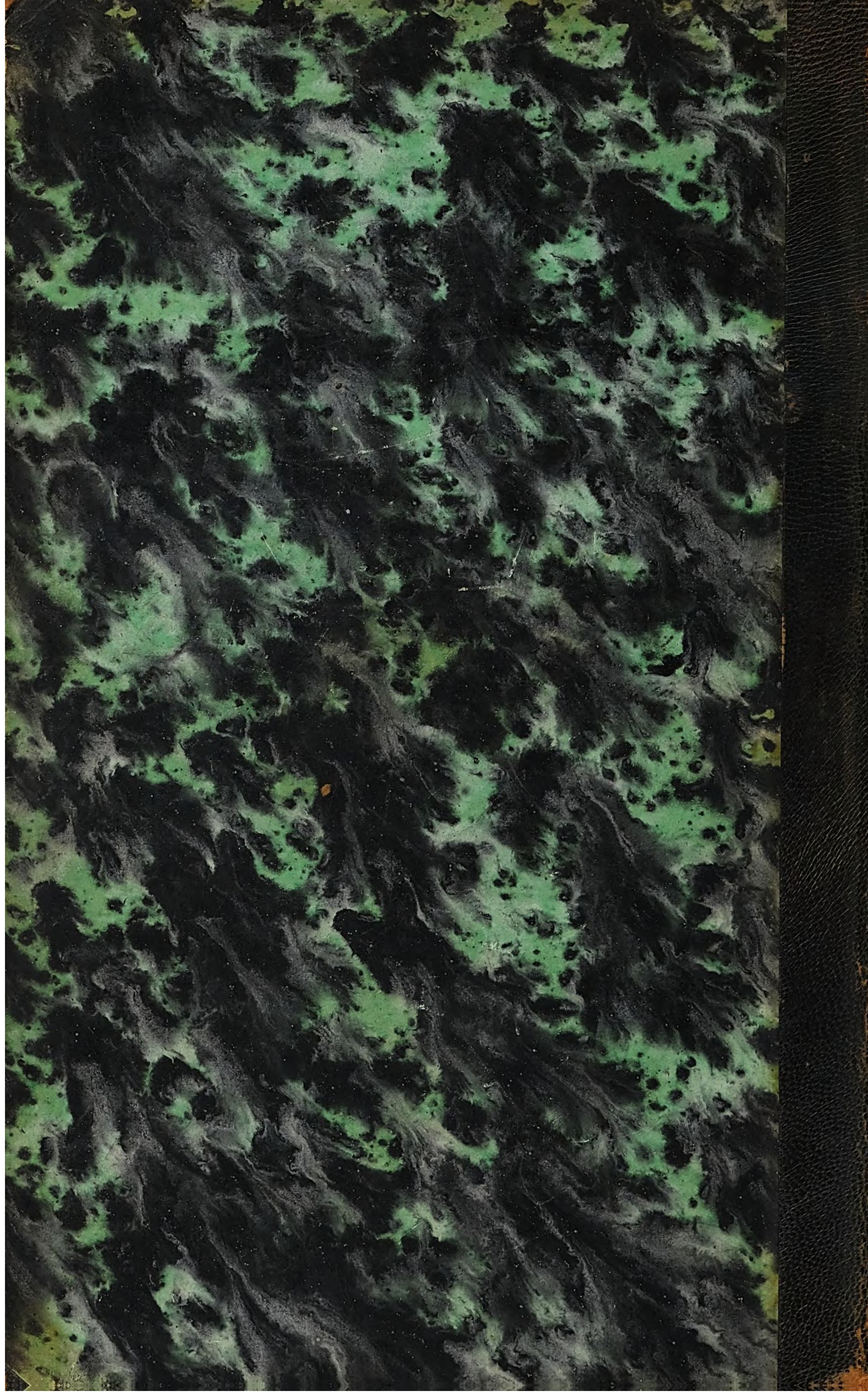
Und weiter ergibt sich, „dass Kräfte an einem Massensystem im Gleichgewicht sind, wenn sie für jede bei diesem Systeme mögliche unendlich kleine Verschiebung eine Arbeit geben, welche Null oder negativ ist“.

Dieser Satz drückt ganz allgemein das „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten“ aus.

Befinden sich Kräfte an einem Massensystem im Gleichgewicht, so sind sie dies auch dann noch, wenn man die einzelnen Massen in der Gleichgewichtslage zu einem starren System verbindet.



DRUCK VON F. A. BROCKHAUS IN LEIPZIG.



Undeutsch, Hermann,

Einführung in die Mechanik zum Gebrauch bei Vorlesungen sowie zum
Selbststudium

Freiberg 1881

Math.a. 245 s

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650555-6